XLIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2020)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas **à mão, a tinta ou a lápis**; que estejam **legíveis**. Soluções digitadas ou ilegíveis **não** serão consideradas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Você já assistiu ao filme Velozes e Furiosos 6 de 2013? O comitê elaborador de provas da OPM estava assistindo a esse filme e notou que durante um trecho relativamente longo do filme há um avião de carga e vários carros interagindo em alta velocidade em uma pista de pouso. E surgiu a pergunta: qual seria o comprimento dessa pista para essa cena durar tanto assim?

Vamos estimar esse comprimento usando algumas informações da matéria "How long is the runway in Fast & Furious 6?" do site da BBC (procure depois da prova!). Segundo a matéria, a cena em alta velocidade durou 13 minutos e a velocidade de aviões de carga em pistas de pouso é, em geral, 240 km/h.

a) A partir desses valores, qual é o comprimento aproximado da pista dessa cena?

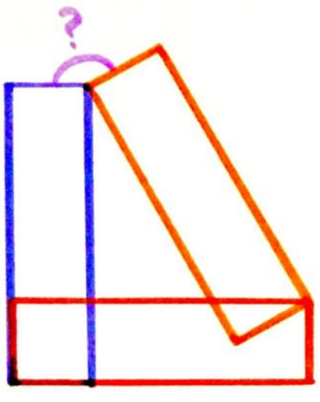
b) A maior pista de pouso do aeroporto de Guarulhos tem 3700 metros de comprimento. O comprimento calculado no item a seria equivalente a quantas destas pistas do aeroporto de Guarulhos?

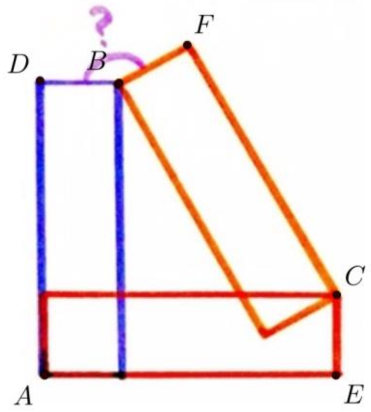
c) A matéria da BBC faz outras considerações antes de calcular sua estimativa do comprimento da pista, que deu 29,6 km (não se assuste, era para ser diferente da sua resposta do item a mesmo!). Entre outras informações estão o relato do ator The Rock sobre a velocidade ser de aproximadamente 185 km/h durante as gravações e também o fato de que ações acontecem ao mesmo tempo, mas para o espectador acontecem em sequência, como por exemplo uma luta entre vilão e mocinho que aparece durante a corrida.

Considerando a velocidade média que o ator citou, por quantos minutos o avião esteve efetivamente na pista no filme?

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

Catriona Agg é uma professora de Matemática em Cambridge, no Reino Unido, que posta frequentemente no Twitter (@CShearer41) quebra-cabeças geométricos, desenhados à mão. Um deles, exibido na figura da esquerda, é calcular o ângulo marcado, sabendo que os três retângulos são idênticos. Para resolver esses problemas usaremos os nomes para os pontos indicados na figura da direita.





a) Prove que o triângulo ABC tem todos seus lados iguais, ou seja, é equilátero.

b) Determine as medidas dos ângulos do triângulo ABD.

c) Calcule o ângulo $\angle DBF$ marcado com ?.

A professora Catriona também tem um livro, *Geometry Puzzles in Felt Tip* (publicada sob seu nome de solteira, Catriona Shearer). Se você gostou desse problema, há muitos mais de onde esse veio.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Desde setembro de 2018, as placas de identificação de veículos no Brasil passaram a seguir um novo sistema de formação. Ainda em implantação gradativa, os dois sistemas alfanuméricos coexistem: o atual, com quatro letras (`A` a `Z`, sem acentos nem cedilhas, num total de 26 possibilidades em cada posição) e três números (`0` a `9`, num total de 10 possibilidades em cada posição), no formato $L_1L_2L_3N_1L_4N_2N_3$, no qual `L´s` representam letras e `N´s` representam números, denominado Placa de Identificação Veicular – PIV e também conhecido "Padrão Mercosul", e o anterior, não mais emitido, mas ainda válido, com três letras e quatro dígitos, no formato $L_1L_2L_3\ N_1N_2N_3N_4$, que iniciou-se em 1990.

a) Uma das razões para a implantação do novo sistema é o aumento da quantidade de placas de identificação. Calcule quantas placas podem ser geradas no Padrão Mercosul.

b) Diferentemente de outras mudanças de sistemas de emplacamento, na mudança para o Padrão Mercosul os veículos já emplacados no sistema anterior mantêm as combinações anteriores de letras, trocando o segundo dígito por uma letra conforme a tabela a seguir:

Segundo dígito da placa	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quarta letra da placa Mercosul	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Por exemplo, a antiga placa `XYZ 1234` terá como equivalente a placa do Padrão Mercosul `XYZ1C34`. Veja que o dígito `2` foi substituído pela letra `C`. Essa correspondência pode permitir a conversão dos emplacamentos e a coexistência entre os dois sistemas.

Calcule o percentual das placas do Padrão Mercosul que têm correspondência com o sistema antigo de emplacamento, sabendo que as placas no padrão anterior com final `0000` não são usadas. Suponha que não há outras restrições com relação às letras e números em ambos os padrões (em particular, placas Padrão Mercosul podem terminar em “zero letra zero zero”, como por exemplo `EEE0E00`).

c) Estima-se que a frota nacional de veículos era de 58,8 milhões de veículos em 2019 e deve crescer 2,6% em 2020. Além disso, cerca de 30% da frota está no estado de São Paulo, tanto em 2019 como em 2020.

Seria possível utilizar apenas placas no Padrão Mercosul com as letras iniciais `OPM` para emplacar os veículos correspondentes ao crescimento estimado da frota no estado de São Paulo de 2019 para 2020?

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

A *pilha de cartas de Si Stebbins* é uma organização das 52 cartas do baralho baseada numa regra matemática. Ela foi popularizada pelo mágico (e matemático) Si Stebbins. As cartas são ordenadas de modo que sempre alternam os naipes seguindo a ordem **CHaSeD** usando os nomes dos naipes em inglês: **C**lubs (em português, Paus ♣), **H**earts (Copas ♥), **S**pades (Espadas ♠) e **D**iamonds (Ouros ♦). E o número de cada carta soma 3 no número anterior, sendo Ás (A) considerado o número 1, Valete (J) considerado o número 11, Dama (Q) considerado 12 e o Rei (K) considerado o número 13. Se a soma passar de 13, então deve-se subtrair o número 13 do valor para obter o número da próxima carta. Com essas regras, cada uma das 52 cartas aparece exatamente uma vez na pilha.

Por exemplo, na pilha de Si Stebbins o Ás de Paus (A♣) vem seguido de quatro de copas (4♥), sete de espadas (7♠), dez de ouros (10♦), rei de paus (K♣) e três de copas (3♥). Nesse último passo a soma seria $13 + 3 = 16$ e como passou de 13 devemos subtrair 13 para obter a próxima carta.

a) Determine as 4 cartas que vêm após o três de copas na pilha de Si Stebbins.

b) Com essa organização de cartas um mágico (e matemático) pode descobrir uma carta desconhecida sabendo qual carta vem antes ou qual carta vem depois na pilha de cartas. Determine quais cartas vêm antes e depois das cartas a seguir:

b1) Cinco de Espadas (5♠);

b2) Dois de Paus (2♣).

c) Suponha que os reis sejam retirados do baralho e que as contas devam ser feitas de 1 a 12, ou seja, se o número passar de 12 deve-se subtrair 12 do número. Prove que, independentemente da carta inicial, não será possível fazer a pilha de Si Stebbins somando de 3 em 3 nos números das cartas.

d) Agora suponha que as cartas mais altas sejam retiradas do baralho e que as contas devam ser feitas de 1 a n, em que n é um número inteiro entre 2 e 12, inclusive. Seguimos com o mesmo procedimento: se o número passar de n deve-se subtrair n do número. Para que valores de n é possível fazer a pilha de Si Stebbins somando de 3 a 3 nos números das cartas? Não se esqueça de justificar sua resposta, ou seja, explicar por que os valores que você descobriu funcionam e por que os outros valores não funcionam.

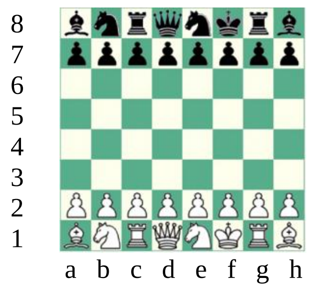
PROBLEMA 5 – Valor: 3 pontos

O Xadrez de Fischer, também conhecido como Fischer Random Chess ou Chess 960 (guarde este nome) é uma variação do jogo de xadrez criada pelo enxadrista Robert James “Bobby” Fischer (1943-2008), campeão mundial em 1972-75 e considerado por muitos o melhor enxadrista da história. Nesta variação são usados o mesmo tabuleiro e as mesmas peças do xadrez padrão, mas as posições iniciais variam obedecendo certas regras. Com essas variações a memorização de aberturas (sequências de movimentos iniciais em partidas) perde espaço e a criatividade se torna mais importante.

Basta definir as posições das peças da cor branca, já que as peças da cor preta são colocadas em posições simétricas, como mostra a figura. Os peões brancos devem ocupar a linha 2. As outras oito peças (um rei, uma rainha, dois bispos, dois cavalos e duas torres) devem ocupar a linha 1 de acordo com as seguintes duas regras:

I. o rei fique entre as duas torres;
II. os bispos fiquem em casas de cores diferentes.

A seguir um exemplo de configuração inicial, em que na linha 1, da esquerda para a direita, temos bispo (♗), cavalo (♘), torre (♖), rainha (♕), cavalo, rei (♔), torre, bispo. Os peões (♙) estão na linha 2.

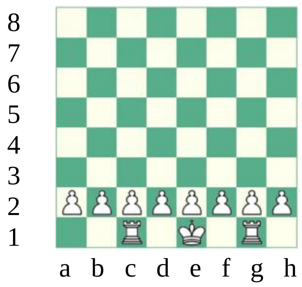


Estamos interessados em saber o número de disposições iniciais possíveis para as peças do Xadrez de Fischer.

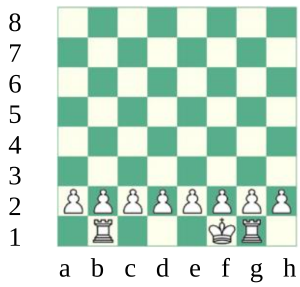
Em geral, em problemas de contagem vale a pena começar pensando em como satisfazer as restrições primeiro. Como há duas regras, há duas restrições. Com qual é melhor começar?

a) Suponha que começaremos colocando na linha 1 apenas o rei, as duas torres e a rainha, seguindo a regra I. É sempre possível colocar as outras quatro peças seguindo a regra II? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.

b) Suponha que colocamos o rei e as duas torres nas seguintes duas disposições:



Disposição X



Disposição Y

De quantas maneiras podemos escolher as posições do bispo da casa branca e do bispo da casa preta em cada disposição?

c) Os itens a e b mostram que começar colocando o rei e as duas torres altera o número de maneiras de colocar as demais peças, complicando nosso processo de contagem.

Uma forma mais simples de contar o número de variações do Xadrez de Fischer é escolher as posições das peças na seguinte ordem:

1º) bispo da casa preta
2º) bispo da casa branca
3º) rainha
4º) os dois cavalos
5º) rei e torres

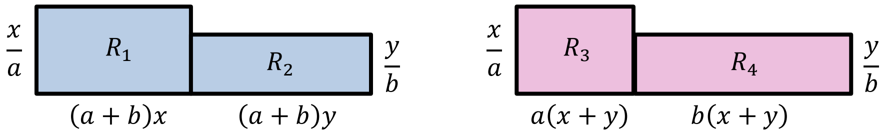
Existem quantas disposições iniciais possíveis para o Xadrez de Fischer? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 6 – $\boxed{\text{Valor: 4 pontos}}$

À medida que você se torna mais experiente nas competições de matemática você acumula ferramentas e entre estas estão os *lemas*. Em Matemática, lemas são teoremas que podem ser usados para resolver problemas ou demonstrar outros teoremas. Nesse problema estudaremos o *Lema de Titu*, uma desigualdade que ficou conhecida por esse nome em homenagem ao professor romeno Titu Andreescu, autor de vários livros de olimpíada de matemática e líder dos Estados Unidos na IMO (Olimpíada Internacional de Matemática) de 1995 até 2002.

Nesse problema iremos descobrir e provar esse lema a partir de uma abordagem geométrica.

a) Na figura a seguir, a, b, x, y são reais positivos com $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$. Considere os retângulos R_1, R_2, R_3 e R_4 a seguir. Escreva expressões em função de a, b, x e y para as áreas dos retângulos R_1, R_2, R_3 e R_4.



b) A partir da desigualdade $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$ mostre que a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2 é maior que ou igual à soma das áreas dos retângulos R_3 e R_4. A partir dessa observação demonstre o *lema de Titu*:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

(O que acontece se $\frac{x}{a} \leq \frac{y}{b}$? Então $\frac{y}{b} \geq \frac{x}{a}$ e vale $\frac{y^2}{b} + \frac{x^2}{a} \geq \frac{(y+x)^2}{b+a}$, que é a mesma coisa! Ou seja, o lema de Titu vale para todos os reais positivos a, b, x, y!)

c) Usando o Lema de Titu para dois termos, prove o Lema de Titu para três termos, ou seja, para quaisquer reais positivos a, b, c, x, y e z, prove que

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

É possível generalizar o Lema de Titu para $n \geq 2$ termos, mas você não precisa fazer isto nesta questão.

PROBLEMA 7 – $\boxed{\text{Valor: 4 pontos}}$

Chrono é um tipo de quebra-cabeça criado por François Robillard. Nessa questão vamos discutir algumas estratégias para resolvê-lo. Cada casa de um tabuleiro 5×5 está preenchida com um número inteiro positivo. Um desses números está destacado. Com o número destacado como ponto de início, você deve ligar os 25 números do diagrama com uma linha que passe por cada casa uma só vez.

Para fazer as ligações a seguinte regra deve ser obedecida: você deve utilizar dois números que sejam horizontal, vertical ou diagonalmente adjacentes para realizar uma das quatro operações $(+, -, \times, \div)$; o terceiro número deve ser adjacente (horizontal, vertical ou diagonalmente) ao segundo e igual ao resultado da operação. Esse terceiro número será, então, o primeiro número de uma próxima operação e assim sucessivamente.

Por exemplo, uma solução do quebra-cabeça na Figura 1 está na Figura 2.

9	9	27	6	7
18	3	6	2	42
4	2	54	12	2
4	16	8	2	40
8	32	24	4	10

Figura 1

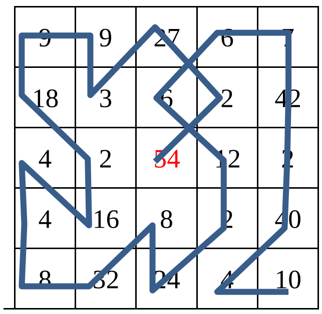


Figura 2

em que: $54 \div 2 = 27$, $27 \div 3 = 9$, $9 + 9 = 18$, $18 - 2 = 16$, $16 \div 4 = 4$, $4 \times 8 = 32$, $32 - 8 = 24$, $24 \div 2 = 12$, $12 - 6 = 6$, $6 \times 7 = 42$, $42 - 2 = 40$, $40 \div 4 = 10$, ou seja, os números são visitados na ordem

$$54 \to 2 \to 27 \to 3 \to 9 \to 9 \to 18 \to 2 \to 16 \to 4 \to 4 \to 8 \to 32$$
$$\to 8 \to 24 \to 2 \to 12 \to 6 \to 6 \to 7 \to 42 \to 2 \to 40 \to 4 \to 10.$$

Os números em azul são resultados de operações.

Falando agora sobre possíveis estratégias, vale a pena olhar inicialmente para os números que estão nos cantos ou adjacentes ao número inicial, pois há menos opções de operações para eles. Também merecem atenção os números primos, pois possuem limitações com relação às operações de multiplicação e divisão. Limitações similares costumam ocorrer para os menores/maiores números na tabela também.

Por exemplo, no quebra-cabeça mostrado anteriormente, podemos concluir que 42 é o resultado de uma operação. Vejamos. Para ser o segundo número em uma, essa operação não poderia ser uma subtração (o resultado seria negativo) ou divisão (o resultado seria menor do que 1). Porém, como ele é o maior número entre todos os que são adjacentes a ele, a operação também não pode ser uma adição ou subtração. Assim, 42 é o resultado de uma operação.
Observemos agora o número 7, vamos provar que ele deve ser o segundo número em uma operação. Para 7 ser o resultado de uma operação, como ele está no canto

27	6	7
6	2	42
54	12	2

alguma operação envolvendo os números (na ordem apresentada) 54 e 2; 12 e 2; 12 e 42; 6 e 2; 6 e 6; 2 e 2; 2 e 42; 27 e 2; 27 e 6 deveria dar 7. Nenhuma dá. Logo 7 é um segundo número e as únicas possibilidades são $6 \times 7 = 42$ ou $42 \div 7 = 6$. Obtemos assim uma (pequena) parte da resolução

27	6	7
6	2	42
54	12	2

Com esse tipo de raciocínio já costuma ser possível eliminar certos números como resultados de operações e estabelecer "pedaços" das ligações, o que simplifica bastante a resolução do quebra-cabeça. Ou até mesmo descobrir o último número que é ligado o que possibilita uma abordagem de solução de "trás para frente".

Vamos resolver um quebra-cabeça agora.

24	36	25	63	1
60	11	7	9	64
6	9	2	8	8
19	10	10	80	72
9	28	90	18	8

No que se segue, chamaremos de *resultado* um número que é resultado de uma operação e de *número do meio* um número que é utilizado em uma operação, mas não é resultado de operação alguma. No primeiro exemplo, em que a ordem é

54 → 2 → 27 → 3 → 9 → 9 → 18 → 2 → 16 → 4 → 4 → 8 → 32
→ 8 → 24 → 2 → 12 → 6 → 6 → 7 → 42 → 2 → 40 → 4 → 10,

todo número em azul (como 27, 16 e 32) é resultado e todo número preto (como ambos os 8 e o 7) é número do meio. Não faremos tal classificação para o número inicial.

a) Mostre que o 28 não pode ser número do meio.
b) Encontre todas as possibilidades de ligar 28 no tabuleiro sendo ele um resultado (desenhe todos os caminhos no tabuleiro para cada possibilidade). Não se esqueça de justificar por que só há essas possibilidades!
c) Mostre que o 28 é necessariamente o último número a ser ligado.
d) Prove que 60 é resultado e que 6 é número do meio.
e) Resolva o quebra-cabeça. Pode-se mostrar que essa solução é a única possível (você não precisa fazer isso).

XLIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2020)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

• **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**
Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.

• A duração da prova é de 4h30min.

• Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.

• Todas as respostas devem ser **justificadas**.

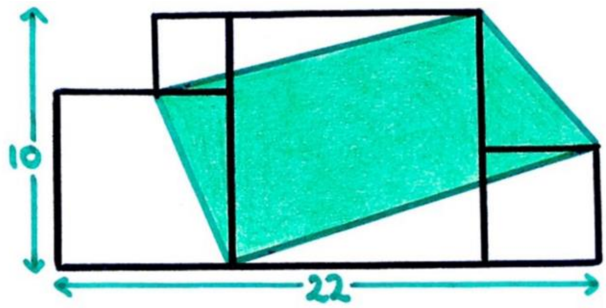
• Somente serão aceitas resoluções feitas **à mão, a tinta ou a lápis**; que estejam **legíveis**. Soluções digitadas ou ilegíveis **não** serão consideradas.

• Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
(1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
(2) calculadora sem acesso à Internet.

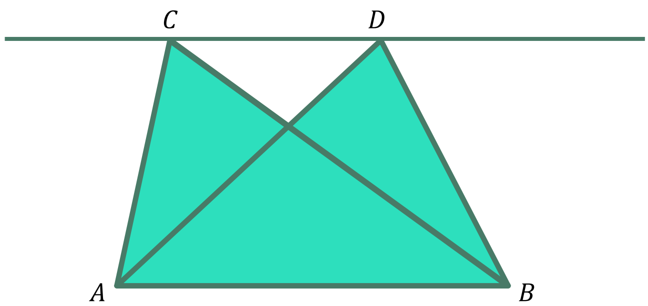
• Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

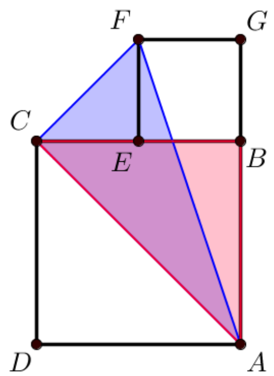
Catriona Agg é uma professora de Matemática em Cambridge, no Reino Unido, que posta frequentemente no Twitter (@CShearer41) quebra-cabeças geométricos, desenhados à mão. Um deles é encontrar a área pintada na figura a seguir, formada por quatro quadrados:



Esse problema pode ser resolvido de várias maneiras. Uma delas é considerar o fato de que se deslocarmos o vértice de um triângulo paralelamente ao lado oposto, a área não muda. Na figura a seguir, CD e AB são paralelos, o que torna as áreas de ABC e ABD iguais.



a) Na figura a seguir $ABCD$ e $BEFG$ são quadrados. Utilizando o fato apresentado mostre que as áreas destacadas, dos triângulos ACF e ACB, são iguais.



b) Observando que quadrados com lados paralelos têm diagonais correspondentes paralelas, encontre a área destacada.

A professora Catriona também tem um livro, *Geometry Puzzles in Felt Tip* (publicada sob seu nome de solteira, Catriona Shearer). Se você gostou desse problema, há muitos mais de onde esse veio (como o problema 6!).

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

A nova gasolina brasileira, produzida pela Petrobras, traz um avanço de tecnologia de produção e tem índices de octanagem e densidade superiores, fazendo com que um carro possa rodar mais com menos combustível. Segundo estudos da ANP, Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis, a nova gasolina traz uma redução do consumo de até 6% na quantidade de litros de gasolina por quilômetro rodado.

Em agosto de 2020 passaram a valer as novas especificações da gasolina comercializada no Brasil. Além disso, o preço da nova gasolina deve ser cerca de 1,5% maior em relação ao preço da antiga. O preço médio da gasolina antiga no Brasil em julho de 2020 foi de R$ 4,144 por litro.

a) Um carro de testes foi utilizado para comparar os dados apresentados. Primeiro, ele foi abastecido com R$150 da gasolina antiga e isso foi suficiente para rodar 502,5 km na cidade. Com a nova gasolina, foi possível rodar 524,8 km, nas mesmas condições. Usando o preço de julho de 2020, verifique se os dados desse teste estão dentro dos parâmetros apresentados.

b) Apesar de mais cara, no final das contas, com um melhor rendimento, o custo com a nova gasolina por km rodado acaba ficando menor. Calcule a economia semanal, em reais, que um motorista de táxi teria com gasolina considerando que ele trabalha 5 dias por semana e roda 250 km por dia de trabalho. Suponha que o carro do motorista de táxi tenha o mesmo rendimento que o carro de testes.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

A *pilha de cartas de Si Stebbins* é uma organização das 52 cartas do baralho baseada numa regra matemática. Ela foi popularizada pelo mágico (e matemático) Si Stebbins. As cartas são ordenadas de modo que sempre alternam os naipes seguindo a ordem **CHaSeD** usando os nomes dos naipes em inglês: **C**lubs (em português, Paus ♣), **H**earts (Copas ♥), **S**pades (Espadas ♠) e **D**iamonds (Ouros ♦). E o número de cada carta soma 3 no número anterior, sendo Ás (A) considerado o número 1, Valete (J) considerado o número 11, Dama (Q) considerado 12 e o Rei (K) considerado o número 13. Se a soma passar de 13, então deve-se subtrair o número 13 do valor para obter o número da próxima carta. Com essas regras, cada uma das 52 cartas aparece exatamente uma vez na pilha.

Por exemplo, na pilha de Si Stebbins o Ás de Paus (A♣) vem seguido de quatro de copas (4♥), sete de espadas (7♠), dez de ouros (10♦), rei de paus (K♣) e três de copas (3♥). Nesse último passo a soma seria $13 + 3 = 16$ e como passou de 13 devemos subtrair 13 para obter a próxima carta.

a) Determine as 4 cartas que vêm após o três de copas na pilha de Si Stebbins.

b) Com essa organização de cartas um mágico (e matemático) pode descobrir uma carta desconhecida sabendo qual carta vem antes ou qual carta vem depois na pilha de cartas. Determine quais cartas vêm antes e depois das cartas a seguir:

b1) Cinco de Espadas (5♠);

b2) Dois de Paus (2♣).

c) Suponha que os reis sejam retirados do baralho e que as contas devam ser feitas de 1 a 12, ou seja, se o número passar de 12 deve-se subtrair 12 do número. Prove que, independentemente da carta inicial, não será possível fazer a pilha de Si Stebbins somando de 3 em 3 nos números das cartas.

d) Agora suponha que as cartas mais altas sejam retiradas do baralho e que as contas devam ser feitas de 1 a n, em que n é um número inteiro entre 2 e 12, inclusive. Seguimos com o mesmo procedimento: se o número passar de n deve-se subtrair n do número. Para que valores de n é possível fazer a pilha de Si Stebbins somando de 3 a 3 nos números das cartas? Não se esqueça de justificar sua resposta, ou seja, explicar por que os valores que você descobriu funcionam e por que os outros valores não funcionam.

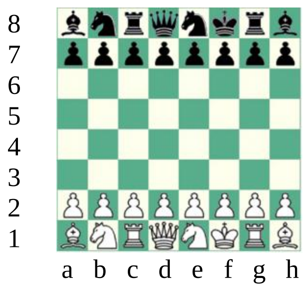
PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

O Xadrez de Fischer, também conhecido como Fischer Random Chess ou Chess 960 (guarde este nome) é uma variação do jogo de xadrez criada pelo enxadrista Robert James “Bobby” Fischer (1943-2008), campeão mundial em 1972-75 e considerado por muitos o melhor enxadrista da história. Nesta variação são usados o mesmo tabuleiro e as mesmas peças do xadrez padrão, mas as posições iniciais variam obedecendo certas regras. Com essas variações a memorização de aberturas (sequências de movimentos iniciais em partidas) perde espaço e a criatividade se torna mais importante.

Basta definir as posições das peças da cor branca, já que as peças da cor preta são colocadas em posições simétricas, como mostra a figura. Os peões brancos devem ocupar a linha 2. As outras oito peças (um rei, uma rainha, dois bispos, dois cavalos e duas torres) devem ocupar a linha 1 de acordo com as seguintes duas regras:

I. o rei fique entre as duas torres;
II. os bispos fiquem em casas de cores diferentes.

A seguir um exemplo de configuração inicial, em que na linha 1, da esquerda para a direita, temos bispo (♗), cavalo (♘), torre (♖), rainha (♕), cavalo, rei (♔), torre, bispo. Os peões (♙) estão na linha 2.

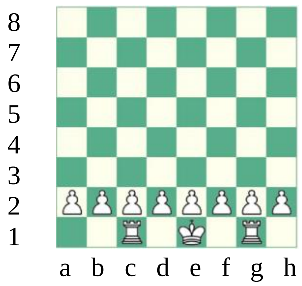


Estamos interessados em saber o número de disposições iniciais possíveis para as peças do Xadrez de Fischer.

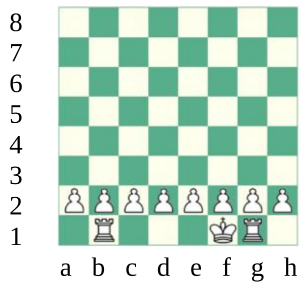
Em geral, em problemas de contagem vale a pena começar pensando em como satisfazer as restrições primeiro. Como há duas regras, há duas restrições. Com qual é melhor começar?

a) Suponha que começaremos colocando na linha 1 apenas o rei, as duas torres e a rainha, seguindo a regra I. É sempre possível colocar as outras quatro peças seguindo a regra II? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.

b) Suponha que colocamos o rei e as duas torres nas seguintes duas disposições:



Disposição X



Disposição Y

De quantas maneiras podemos escolher as posições do bispo da casa branca e do bispo da casa preta em cada disposição?

c) Os itens a e b mostram que começar colocando o rei e as duas torres altera o número de maneiras de colocar as demais peças, complicando nosso processo de contagem.

Uma forma mais simples de contar o número de variações do Xadrez de Fischer é escolher as posições das peças na seguinte ordem:

1º) bispo da casa preta
2º) bispo da casa branca
3º) rainha
4º) os dois cavalos
5º) rei e torres

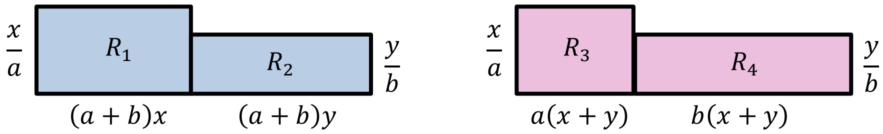
Existem quantas disposições iniciais possíveis para o Xadrez de Fischer? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

À medida que você se torna mais experiente nas competições de matemática você acumula ferramentas e entre estas estão os *lemas*. Em Matemática, lemas são teoremas que podem ser usados para resolver problemas ou demonstrar outros teoremas. Nesse problema estudaremos o *Lema de Titu*, uma desigualdade que ficou conhecida por esse nome em homenagem ao professor romeno Titu Andreescu, autor de vários livros de olimpíada de matemática e líder dos Estados Unidos na IMO (Olimpíada Internacional de Matemática) de 1995 até 2002.

Nesse problema iremos descobrir e provar esse lema a partir de uma abordagem geométrica.

a) Na figura a seguir, a, b, x, y são reais positivos com $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$. Considere os retângulos R_1, R_2, R_3 e R_4 a seguir. Escreva expressões em função de a, b, x e y para as áreas dos retângulos R_1, R_2, R_3 e R_4.



b) A partir da desigualdade $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$ mostre que a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2 é maior que ou igual à soma das áreas dos retângulos R_3 e R_4. A partir dessa observação demonstre o *lema de Titu*:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

(O que acontece se $\frac{x}{a} \leq \frac{y}{b}$? Então $\frac{y}{b} \geq \frac{x}{a}$ e vale $\frac{y^2}{b} + \frac{x^2}{a} \geq \frac{(y+x)^2}{b+a}$, que é a mesma coisa! Ou seja, o lema de Titu vale para todos os reais positivos a, b, x, y!)

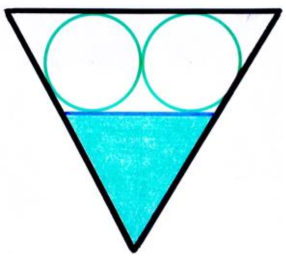
c) Usando o Lema de Titu para dois termos, prove o Lema de Titu para três termos, ou seja, para quaisquer reais positivos a, b, c, x, y e z, prove que

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

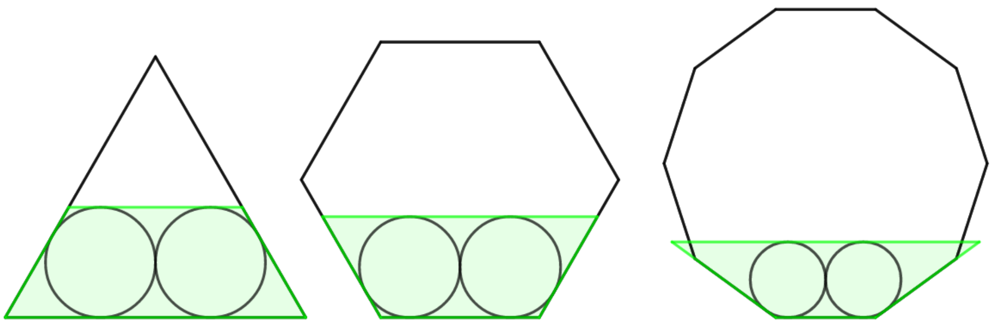
É possível generalizar o Lema de Titu para $n \geq 2$ termos, mas você não precisa fazer isto nesta questão.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Catriona Agg é uma professora de Matemática em Cambridge, no Reino Unido, que posta frequentemente no Twitter (@CShearer41) quebra-cabeças geométricos, desenhados à mão. Um deles é o seguinte: encontrar que fração está pintada no triângulo equilátero a seguir.



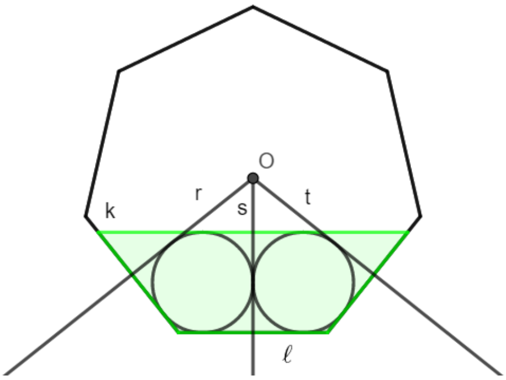
A resposta é bonita, e inspirou Diego Rattaggi, um matemático suíço, a generalizar o problema da seguinte maneira: Dado um polígono regular P de n lados, trace em seu interior duas circunferências de mesmo raio tangentes externamente entre si e a dois lados consecutivos de P, e em seguida a tangente comum paralela ao lado ℓ tangente às duas circunferências. Encontre a razão entre a área do trapézio T delimitado pela faixa que contém as duas circunferências e pelas retas que contêm os lados vizinhos ao lado ℓ e a área de P. A seguir exibimos o problema para $n = 3$, $n = 6$ e $n = 10$ (para o qual o trapézio T não está mais contido em P).



Nos itens a seguir você pode usar uma figura como referência, como o heptágono, mas suas respostas devem se referir a um polígono regular de n lados.

a) Dado o polígono regular P, de n lados, seja O o centro de P, e trace as três retas r, s e t tangentes às duas circunferências, em que s é a tangente interna comum. Mostre que essas três retas passam pelos pontos médios dos três lados que são tangentes a pelo menos uma das circunferências.

Nessa questão você pode querer utilizar que um ponto A no interior do ângulo $\angle XYZ$ está sobre a bissetriz interna desse ângulo se, e somente se, A é equidistante às retas YX e YZ.



b) As três retas r, s e t cortam o trapézio T em dois pentágonos congruentes e dois triângulos congruentes U e V. Seja k a reta que contém o lado do trapézio paralelo ao lado ℓ. Mostre que os triângulos U e V e os triângulos determinados pelos trios de retas $\{k, r, s\}$ e $\{k, s, t\}$ são congruentes.

c) Encontre, em função de n, a razão $\frac{\text{área}(T)}{\text{área}(P)}$.

A professora Catriona também tem um livro, *Geometry Puzzles in Felt Tip* (publicada sob seu nome de solteira, Catriona Shearer). Se você gostou desse problema, há muitos mais de onde esse veio (como o problema 1!).

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Um problema famoso da Matemática é determinar quais inteiros positivos são a soma de dois quadrados perfeitos, não necessariamente distintos. A identidade $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ essencialmente reduz o problema a números primos, ou seja, a verificar quais primos podem ser escritos como soma de dois quadrados. Por exemplo, $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$ e $17 = 4^2 + 1^2$, enquanto 3, 7 e 11 não podem ser escritos como soma de dois quadrados.

a) Sendo p primo ímpar tal que $p = a^2 + b^2$, então um dos números a, b é par e o outro é ímpar. Suponha que a é par e b é ímpar. Mostre que p deve ser da forma $4k+1$, k inteiro.

O item a exclui todos os primos da forma $4k+3$, ou seja, 3, 7, 11 etc. E os primos p da forma $4k+1$? O item a não prova nem que é possível nem que é impossível escrever esses primos como soma de dois quadrados. Veremos que é possível.

Para isso, considere $S = \left\{\{\{a,b\}\}\text{ tal que } p - 4ab = n^2 \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}_+^*, \text{com } a \in \mathbb{Z}_+^* \text{ e } b \in \mathbb{Z}_+^*\right\}$. Aqui, $\{\{a,b\}\}$ é um *multiconjunto*, ou seja, $\{\{a,b\}\} = \{\{b,a\}\}$ e $\{\{a,a\}\}$ tem dois elementos, ambos iguais a a. Por exemplo, se $p = 41$, $S = \left\{\{\{1;4\}\}, \{\{2;2\}\}, \{\{1;8\}\}, \{\{2;4\}\}, \{\{1;10\}\}, \{\{2;5\}\}\right\}$.

b) Determine o conjunto S para $p = 37$.

c) Mostre que se $p - 4ab = n^2$, então os números $p - 4a(b-a+n)$ e $p - 4a(b-a-n)$ também são quadrados perfeitos.

d) Pode-se provar que, se $p - 4ab = n^2$, os números $p - 4b(a-b+n)$ e $p - 4b(a-b-n)$ também são quadrados perfeitos. Assim, mostre que se $\{\{a,b\}\}$ pertence a S então exatamente metade dos multiconjuntos $\{\{a, b-a+n\}\}$, $\{\{a, b-a-n\}\}$, $\{\{b, a-b+n\}\}$, $\{\{b, a-b-n\}\}$ pertence a S. Lembre-se de que os multiconjuntos de S devem ter elementos positivos.

Conecte uma flecha $\mapsto$ de $\{\{a,b\}\}$ aos multiconjuntos de S descritos acima. Por exemplo, para $p = 41$:

$$\{\{1;4\}\} \mapsto \{\{1;8\}\};\ a = 1, b = 4, n = 5 \text{ e } b - a + n = 8$$
$$\{\{1;4\}\} \mapsto \{\{2;4\}\};\ a = 1, b = 4, n = 5 \text{ e } a - b + n = 2$$

e) Quando os multiconjuntos $\{\{a, b-a+n\}\}$, $\{\{a, b-a-n\}\}$, $\{\{b, a-b+n\}\}$, $\{\{b, a-b-n\}\}$ são na verdade dois multiconjuntos distintos em vez de quatro?

f) Mostre que se $\{\{a,b\}\} \mapsto \{\{a,c\}\}$ então $\{\{a,c\}\} \mapsto \{\{a,b\}\}$. Por isso, podemos escrever $\{\{a,b\}\} \leftrightarrow \{\{a,c\}\}$.

g) Para cada p, encontre todos os multiconjuntos $A = \{\{a,b\}\}$ tais que $A \leftrightarrow A$, ou seja, que mandam flechas para si mesmos.

Note que os multiconjuntos de S que satisfazem o item e ou o item g são os únicos que mandam somente uma flecha para um conjunto diferente dele mesmo.

Começando de $A_0 = \left\{\left\{1; \frac{p-1}{4}\right\}\right\}$, fazemos uma cadeia $A_0 \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow \cdots$ de multiconjuntos até obter um multiconjunto da forma $\{\{a,a\}\}$.

Para $p = 41$, temos $\{\{1;10\}\} \leftrightarrow \{\{1;8\}\} \leftrightarrow \{\{1;4\}\} \leftrightarrow \{\{2;4\}\} \leftrightarrow \{\{2;5\}\} \leftrightarrow \{\{2;2\}\}$. Note que, substituindo na equação $p - 4ab = n^2$ obtemos $41 = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 5^2 = 4^2 + 5^2$, ou seja, 41 é a soma de dois quadrados.

h) Mostre que tal cadeia existe para todo primo da forma $p = 4k+1$ e conclua que p é a soma de dois quadrados.

XLIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (novembro de 2020)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.

- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas **à mão, a tinta ou a lápis**; que estejam **legíveis**. Soluções digitadas ou ilegíveis **não** serão consideradas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Há uma crença bastante difundida que cada ano de envelhecimento humano corresponde a sete anos para um cachorro. No entanto, essa equivalência é enganosa e tem sido constantemente rejeitada por veterinários. Um estudo recente, realizado na Universidade da Califórnia em San Diego (UCSD), apresentou uma nova abordagem para comparar o envelhecimento de cães e humanos. Em uma dessas análises, os pesquisadores descobriram que as primeiras oito semanas de vida de um cão são comparáveis aos primeiros nove meses da infância humana, mas essa razão muda com o tempo.

Para estudar tal correspondência, os pesquisadores se concentraram na chamada *metilação do DNA*. A metilação é, em linhas gerais, o acréscimo de moléculas de metil ao DNA. Em cães e humanos, esse acréscimo está associado ao envelhecimento celular.
Com os dados obtidos de 104 cachorros, a maioria da raça labrador, e 320 humanos, eles chegaram à seguinte fórmula:

$$\text{Idade Humana} = 31 + 16 \cdot \ln(\text{Idade do Cachorro})$$

Ambas as idades são medidas em anos.

a) *Adjutant* (14/08/1936 – 20/11/1963) foi reconhecido pelo "Livro dos Recordes" em 1966 como o labrador que morreu mais velho, com 27 anos e 3 meses. Considerando que $e^{3,3} \approx 27,25$, qual era a "Idade Humana" de Adjutant ao falecer?

b) Mostre que, segundo a fórmula, para ter 1000 anos de "Idade Humana", um cachorro teria de ser mais velho do que o universo, cuja idade estimada é 14 bilhões de anos.
Nesse item você pode desejar utilizar que $e^3 \approx 20$.

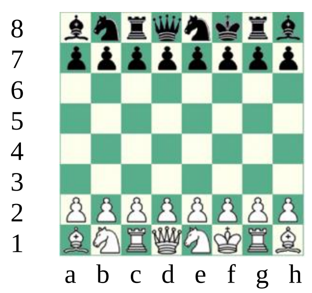
PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

O Xadrez de Fischer, também conhecido como Fischer Random Chess ou Chess 960 (guarde este nome) é uma variação do jogo de xadrez criada pelo enxadrista Robert James "Bobby" Fischer (1943-2008), campeão mundial em 1972-75 e considerado por muitos o melhor enxadrista da história. Nesta variação são usados o mesmo tabuleiro e as mesmas peças do xadrez padrão, mas as posições iniciais variam obedecendo certas regras. Com essas variações a memorização de aberturas (sequências de movimentos iniciais em partidas) perde espaço e a criatividade se torna mais importante.

Basta definir as posições das peças da cor branca, já que as peças da cor preta são colocadas em posições simétricas, como mostra a figura. Os peões brancos devem ocupar a linha 2. As outras oito peças (um rei, uma rainha, dois bispos, dois cavalos e duas torres) devem ocupar a linha 1 de acordo com as seguintes duas regras:

I. o rei fique entre as duas torres;
II. os bispos fiquem em casas de cores diferentes.

A seguir um exemplo de configuração inicial, em que na linha 1, da esquerda para a direita, temos bispo (♗), cavalo (♘), torre (♖), rainha (♕), cavalo, rei (♔), torre, bispo. Os peões (♙) estão na linha 2.

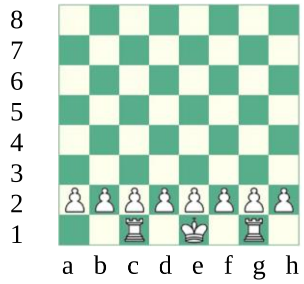


Estamos interessados em saber o número de disposições iniciais possíveis para as peças do Xadrez de Fischer.

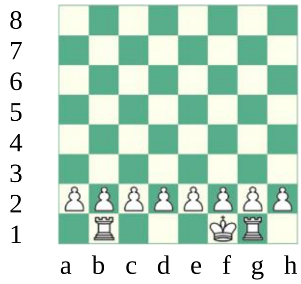
Em geral, em problemas de contagem vale a pena começar pensando em como satisfazer as restrições primeiro. Como há duas regras, há duas restrições. Com qual é melhor começar?

a) Suponha que começaremos colocando na linha 1 apenas o rei, as duas torres e a rainha, seguindo a regra I. É sempre possível colocar as outras quatro peças seguindo a regra II? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.

b) Suponha que colocamos o rei e as duas torres nas seguintes duas disposições:



Disposição X



Disposição Y

De quantas maneiras podemos escolher as posições do bispo da casa branca e do bispo da casa preta em cada disposição?

c) Os itens a e b mostram que começar colocando o rei e as duas torres altera o número de maneiras de colocar as demais peças, complicando nosso processo de contagem.

Uma forma mais simples de contar o número de variações do Xadrez de Fischer é escolher as posições das peças na seguinte ordem:

1º) bispo da casa preta
2º) bispo da casa branca
3º) rainha
4º) os dois cavalos
5º) rei e torres

Existem quantas disposições iniciais possíveis para o Xadrez de Fischer? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Talvez você já tenha visto as seguintes fórmulas:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

Neste problema, mostraremos como encontrar fórmulas para somas do tipo:

$$S_k(n)=0^k+1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k, n\geq 1,$$

para k inteiro não negativo fixado. Adotaremos como convenção que $0^0=1$ (o que só é relevante para $k=0$). Em especial, encontraremos a fórmula para $S_4(n)=0^4+1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4$.

Vamos assumir que, para k inteiro não negativo fixado, $S_k(n)$ é um polinômio de grau $k+1$ na variável n, isto é, $S_k(n)=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0$, em que $a_{k+1},a_k,\ldots,a_0$ não dependem de n.

a) Prove que, para $n\geq 1$, $S_k(n+1)-S_k(n)=n^k$.

A partir desse fato, pode-se demonstrar que devemos ter $a_0=0$.

b) Seja $S_4(n)=a_5n^5+a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n$. Mostre que a_5,a_4,a_3,a_2,a_1 satisfazem o sistema linear:

$$\begin{cases}\binom{5}{0}a_5+\binom{4}{0}a_4+\binom{3}{0}a_3+\binom{2}{0}a_2+\binom{1}{0}a_1=0\\ \binom{5}{1}a_5+\binom{4}{1}a_4+\binom{3}{1}a_3+\binom{2}{1}a_2=0\\ \binom{5}{2}a_5+\binom{4}{2}a_4+\binom{3}{2}a_3=0\\ \binom{5}{3}a_5+\binom{4}{3}a_4=0\\ \binom{5}{4}a_5=1\end{cases}.$$

Dica: Você pode querer utilizar o binômio de Newton:

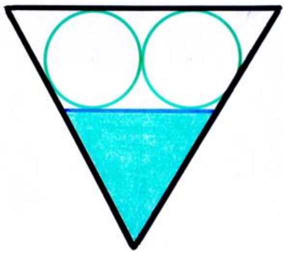
$$(a+b)^m=\binom{m}{m}a^m+\binom{m}{m-1}a^{m-1}b+\binom{m}{m-2}a^{m-2}b^2+\cdots+\binom{m}{1}ab^{m-1}+\binom{m}{0}b^m,$$

em que $\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!(m-k)!}$.

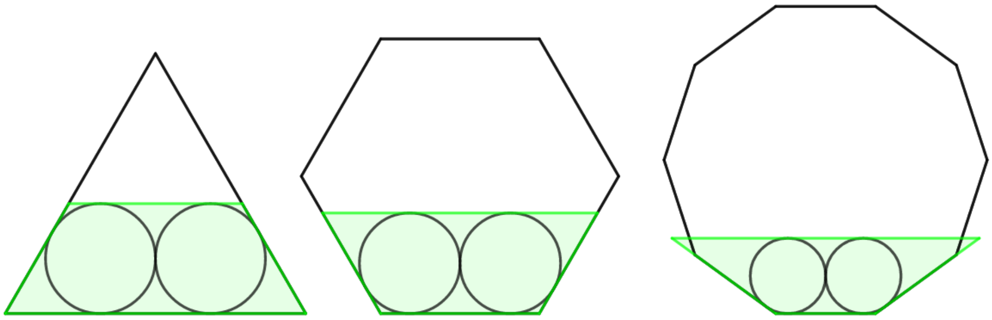
c) Encontre uma fórmula fechada para $S_4(n)=0^4+1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4$.

PROBLEMA 4 – $\boxed{\text{Valor: 3 pontos}}$

Catriona Agg é uma professora de Matemática em Cambridge, no Reino Unido, que posta frequentemente no Twitter (@CShearer41) quebra-cabeças geométricos, desenhados à mão. Um deles é o seguinte: encontrar que fração está pintada no triângulo equilátero a seguir.



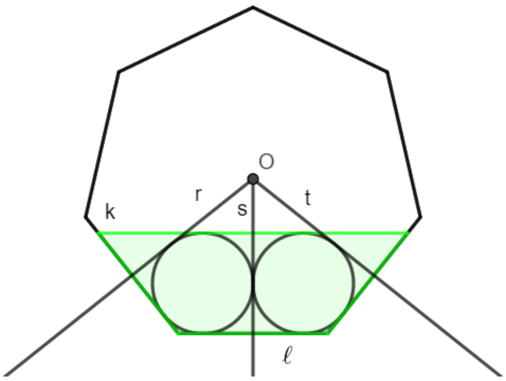
A resposta é bonita, e inspirou Diego Rattaggi, um matemático suíço, a generalizar o problema da seguinte maneira: Dado um polígono regular P de n lados, trace em seu interior duas circunferências de mesmo raio tangentes externamente entre si e a dois lados consecutivos de P, e em seguida a tangente comum paralela ao lado ℓ tangente às duas circunferências. Encontre a razão entre a área do trapézio T delimitado pela faixa que contém as duas circunferências e pelas retas que contêm os lados vizinhos ao lado ℓ e a área de P. A seguir exibimos o problema para $n = 3$, $n = 6$ e $n = 10$ (para o qual o trapézio T não está mais contido em P).



Nos itens a seguir você pode usar uma figura como referência, como o heptágono, mas suas respostas devem se referir a um polígono regular de n lados.

a) Dado o polígono regular P, de n lados, seja O o centro de P, e trace as três retas r, s e t tangentes às duas circunferências, em que s é a tangente interna comum. Mostre que essas três retas passam pelos pontos médios dos três lados que são tangentes a pelo menos uma das circunferências.

Nessa questão você pode querer utilizar que um ponto A no interior do ângulo $\angle XYZ$ está sobre a bissetriz interna desse ângulo se, e somente se, A é equidistante às retas YX e YZ.



b) As três retas r, s e t cortam o trapézio T em dois pentágonos congruentes e dois triângulos congruentes U e V. Seja k a reta que contém o lado do trapézio paralelo ao lado ℓ. Mostre que os triângulos U e V e os triângulos determinados pelos trios de retas $\{k, r, s\}$ e $\{k, s, t\}$ são congruentes.

c) Encontre, em função de n, a razão $\frac{\text{área}(T)}{\text{área}(P)}$.

A professora Catriona também tem um livro, *Geometry Puzzles in Felt Tip* (publicada sob seu nome de solteira, Catriona Shearer). Se você gostou desse problema, há muitos mais de onde esse veio.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

Uma "*matemágica*" bem conhecida é a seguinte:

• Tomamos a dízima periódica que aparece no desenvolvimento de $\frac{1}{7}$: $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$.

• Agora multiplicamos o número formado pela dízima por 1,2,3,4,5,6 e SURPRESA!!

$$2 \cdot 142857 = 285714$$
$$3 \cdot 142857 = 428571$$
$$4 \cdot 142857 = 571428$$
$$5 \cdot 142857 = 714285$$
$$6 \cdot 142857 = 857142$$

Todas as respostas são trechos da mesma dízima periódica

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$$

Bem legal!!

Nesta questão, vamos entender que magia é essa e ver que fenômenos semelhantes ocorrem para outras dízimas e resolver um problema bem interessante com as ideias estudadas.

Inicialmente, vamos olhar uma situação similar envolvendo números maiores e dízimas cujos períodos envolvem mais dígitos. Observe:

$$\frac{1}{53} = 0,\overline{0188679245283}$$
$$\frac{29}{53} = 0,\overline{5471698113207}$$
$$11 \cdot 188679245283 = 2075471698113$$
$$29 \cdot 188679245283 = 5471698113207$$
$$10^3 \cdot 11 - 29 = 10971 \text{ é múltiplo de } 53$$

Nós vamos aprender nos itens do problema como esses fatos se conectam.

No exemplo dado, podemos observar que 11 e 29, os números que aparecem na expressão que é divisível por 53, ao serem multiplicados pelo período da dízima de $\frac{1}{53}$, resultam em números formados pelos mesmos algarismos. A única diferença é que os algarismos de $11 \cdot 188679245283 = 2075471698113$ sofrem uma espécie de "deslocamento cíclico" de três casas para obtermos $29 \cdot 188679245283 = 5471698113207$. Veremos que isso é explicado pelo expoente 3 em 10^3. O 10 aparece pois estamos utilizando a base decimal. Hora de colocar a mão na massa para entender de verdade o que está acontecendo!

Sejam e, m, n, D inteiros positivos tais que $\text{mdc}(D, 10) = 1$, $D > m$, $D > n$ e $10^e \cdot m - n$ é múltiplo de D. Seja ainda $\frac{1}{D} = 0,\overline{d_1 d_2 \ldots d_p}$.

a) Mostre que existe um $\alpha < D$ inteiro positivo tal que $10^\alpha - 1$ é múltiplo de D. Mostre também que p, o número de dígitos da dízima de $\frac{1}{D}$, é igual ao menor valor possível para α.

b) Prove que os algarismos não nulos de $m \cdot d_1 d_2 \ldots d_p$ são os mesmos de $n \cdot d_1 d_2 \ldots d_p$ contando repetições. Ou seja, cada um dos dígitos $1,2,\ldots,9$ deve aparecer a mesma quantidade de vezes em ambos os números.

Dica: Nesse item, você pode achar útil considerar $\frac{n}{D} = 0,\overline{n_1 n_2 \ldots n_p}$ (por que podemos supor que o índice é p?).

c) Encontre um inteiro positivo c tal que $20c$ e $44c$ possuam os mesmos algarismos, incluindo zero, contando repetições.

PROBLEMA 6 – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

Um dos matemáticos cujas ideias têm sido mais aproveitadas na OPM é John Horton Conway (26/12/1937 – 11/04/2020). Ele foi uma das vítimas da Pandemia e esse problema é a nossa (muitíssimo) humilde homenagem a uma das mais brilhantes mentes de toda a história.

MUITO OBRIGADO CONWAY, POR TORNAR A MATEMÁTICA TÃO APAIXONANTE!!

John H. Conway procurando o original do trabalho de pesquisa que inspirou essa questão da OPM: *A Headache-Causing Problem* por Conway (J.H.), Paterson (M.S.) e Moscou (U.R.S.S.). Exatamente, ele colocou a cidade de Moscou – ainda como capital da antiga União Soviética – como coautora do artigo, pois escreveu o trabalho lá com Mike Paterson em 1977. Foto de Tanya Khovanova.

Vamos ao problema!

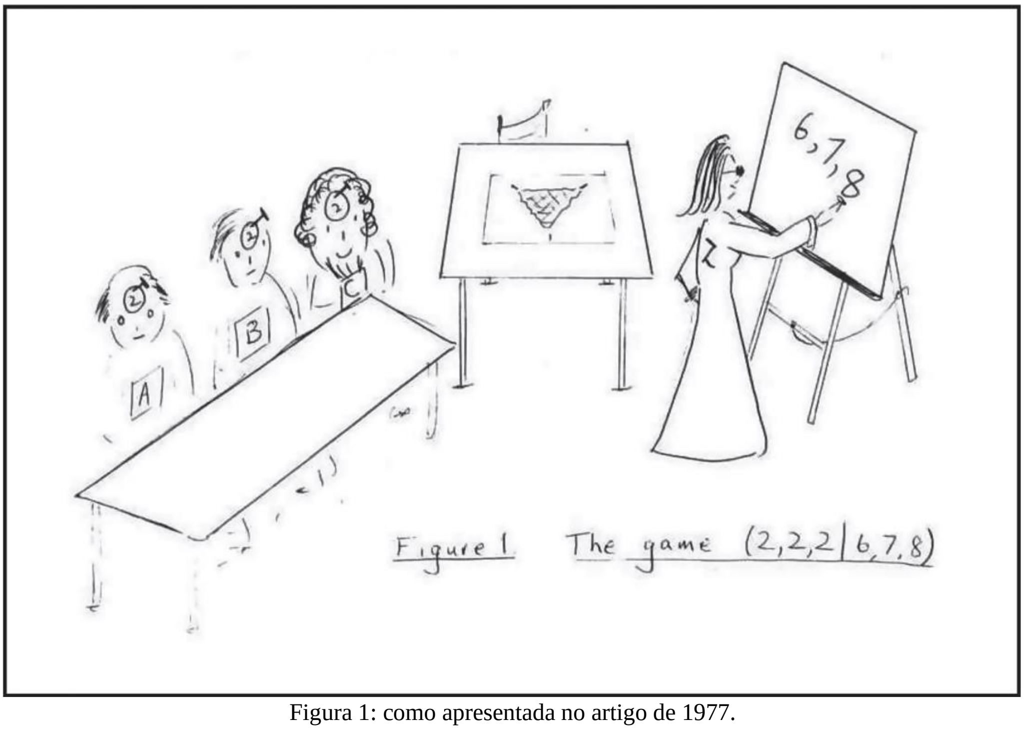


Figura 1: como apresentada no artigo de 1977.

Um total de N pessoas são colocadas sentadas em uma mesa de uma sala como na *Figura 1* (nela $N = 3$). Então a juíza, mostrada em pé na figura, faz o seguinte o pronunciamento:

Nós somos todos, como cada um de vocês sabem, infinitamente inteligentes e honrados. Para que possam resolver juntos um quebra-cabeça, foram presos a suas testas pequenos discos contendo numerais que representam números inteiros não negativos. A soma desses números é um dos valores que vocês estão vendo escritos na lousa.

Eu lamento pelo pequeno desconforto que a situação possa estar causando, mas, graças ao "Teorema de Conway-Peterson-Moscou", posso garantir que ele não irá durar tanto. Eu irei perguntar, alternadamente, para cada um de vocês – no nosso exemplo, primeiro para ***A****rnaldo; depois, se for necessário, para* ***B****ernaldo; então, se for necessário, para* ***C****ernaldo; voltando, se for necessário, para* ***A****rnaldo; e assim por diante – se você consegue descobrir o número que está na sua testa, o qual é o único que você não vê. Sua resposta deve ser apenas "Sim" ou "Não". A brincadeira termina quando ocorrer a primeira resposta "Sim". O quebra-cabeça estará, então, resolvido!*

O *Teorema de Conway-Peterson-Moscou* afirma que se a quantidade de números escritos na lousa é menor ou igual ao número N de pessoas sentadas (ou seja, com números nas testas), o quebra-cabeça será resolvido após um número finito de perguntas da juíza. Nos vários itens dessa questão iremos explorar os significados desse resultado.

Sejam a o número na testa da pessoa A; b o número na testa da pessoa B; c o número na testa da pessoa C e, por diante; e $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$ as somas colocadas na lousa. Denominaremos tal quebra-cabeça $(a, b, c, \ldots \mid s_1, s_2, s_3 \ldots)$. Por exemplo, o quebra-cabeça apresentado na Figura 1 é $(2,2,2|6,7,8)$. A *Figura 2* a seguir mostra um resumo do que ocorre com os quebra-cabeças da forma $(a, b, c|6,7,8)$. As ternas que aparecem são alguns dos possíveis valores para a, b e c. Os números que aparecem são os totais de perguntas para resolver o quebra-cabeça. No canto superior direito há uma representação das conexões do quebra-cabeça $(a, b, c|6,7,8)$ com $(a + 1, b, c|6,7,8)$, $(a, b + 1, c|6,7,8)$ e $(a, b, c + 1|6,7,8)$ na figura. Alguns números foram omitidos, pois você deve encontrá-los nos itens a e b a seguir.

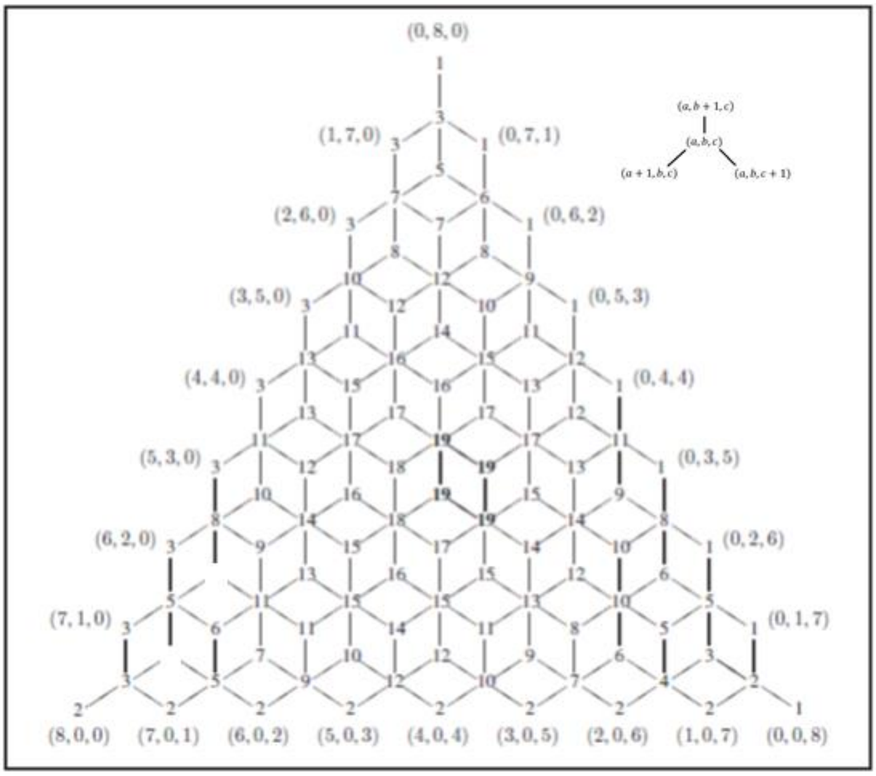


Figura 2

Por exemplo, são necessárias 3 perguntas para resolver $(1,7,0|6,7,8)$ e são necessárias 5 perguntas para resolver $(0,6,0|6,7,8)$. Estamos quase prontos para as perguntas, vamos entender melhor o que acontece em cada caso citado.

$(\mathbf{1}, \mathbf{7}, \mathbf{0}|\mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8})$

• **A**rnaldo vê os números $b = 7$ e $c = 0$. Ele imediatamente conclui que a soma não pode ser 6; mas para soma 7, temos $a = 0$; e, para soma 8, temos $a = 1$. Ele responde "Não".

• **B**ernaldo vê os números $a = 1$ e $c = 0$. Para soma 6, temos $b = 5$; para soma 7, temos $b = 6$; e, para soma 8, temos $b = 7$. Ele responde "Não".

• **C**ernaldo vê os números $a = 1$ e $b = 7$. Ele imediatamente conclui que a soma não pode ser 6 ou 7. Para soma 8, temos $b = 0$. Ele responde "Sim" e o jogo termina após 3 perguntas.

$(\mathbf{0}, \mathbf{6}, \mathbf{0}|\mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8})$

• **A**rnaldo vê os números $b = 6$ e $c = 0$. Para soma 6, temos $a = 0$; para soma 7, temos $a = 1$; e, para soma 8, temos $a = 2$. Ele responde "Não".

• **B**ernaldo vê os números $a = 0$ e $c = 0$. Para soma 6, temos $b = 6$; e para soma 7, temos $b = 7$; e para soma 8, espere! Algo muito interessante acontece agora: para soma 8, temos $b = 8$, porém $(0,8,0|6,7,8)$ é resolvida com apenas uma pergunta (verifique!) e, portanto, Bernaldo sabe que esse caso não é possível. Mesmo assim, ele ainda tem de responder "Não".

• **C**ernaldo vê os números $a = 0$ e $b = 6$. Para soma 6, temos $c = 0$; para soma 7, temos $c = 1$; e, para soma 8, temos $c = 2$. Ele responde "Não".

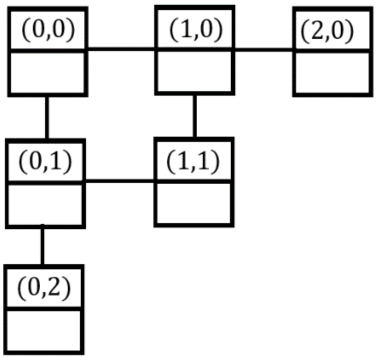
• **A**rnaldo vê os números $b = 6$ e $c = 0$. Sem novidades, mas, calma, de novo algo interessante acontece! O quebra-cabeça $(0,7,0|6,7,8)$ é resolvido com 3 perguntas (verifique!). Logo as possibilidades são apenas $a = 0$ ou $a = 2$. Mesmo assim, ele ainda tem de responder "Não".

• **B**ernaldo sabe (todos sabem, eles são infinitamente inteligentes, lembre-se) que $(0,7,0|6,7,8)$ é resolvido com 3 perguntas. Logo $b = 6$ e ele responde "Sim".

a) Determine o número de perguntas para resolver $(6,0,0|6,7,8)$. Você deve justificar a sua resposta utilizando o modelo acima. Você pode usar apenas A, B e C para os nomes das pessoas e pegar valores que aparecem na figura 2. Você não precisa demonstrar os valores dados.

b) Determine o número de perguntas para resolver $(5,1,0|6,7,8)$. Você deve justificar a sua resposta utilizando o modelo acima. Você pode usar apenas A, B e C para os nomes das pessoas e pegar valores que aparecem na figura 2. Você não precisa demonstrar os valores dados.

c) O diagrama a seguir representa o quebra-cabeça $(a, b|0,1,2)$. Para cada par (a, b) que seja possível resolver com um número finito de perguntas indique o número total de perguntas e para cada par (a, b) que seja impossível explique o porquê.



Observe que esse item não contradiz o Teorema de Conway-Peterson-Moscou, pois nesse caso o número de pessoas sentadas, $N = 2$, é menor do que o total de números escritos na lousa, 3.

d) Faça um diagrama completo do quebra-cabeça $(a, b|4,5)$ com o número de perguntas necessárias para cada (a, b).

e) Mostre que existe um quebra-cabeça tal que o número de perguntas para resolvê-lo é maior do que 2020. Não se esqueça de justificar a sua resposta, ou seja, além de apresentar o quebra-cabeça, você deve provar que o número de perguntas necessárias é maior do que 2020.

f) Prove o caso particular do Teorema de Conway-Peterson-Moscou para $N = 2$ e dois números na lousa: $(a, b|s_1, s_2)$. Ou seja, mostre que com duas pessoas e duas somas sempre é possível após um número finito de perguntas que uma pessoa descubra o seu número.

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Ao cortar uma rosquinha, podemos obter secções circulares ao cortarmos radialmente (figura 1) ou simetricamente (figura 2).

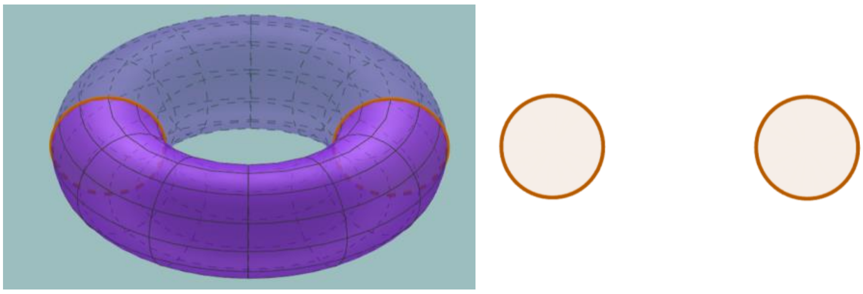


Figura 1

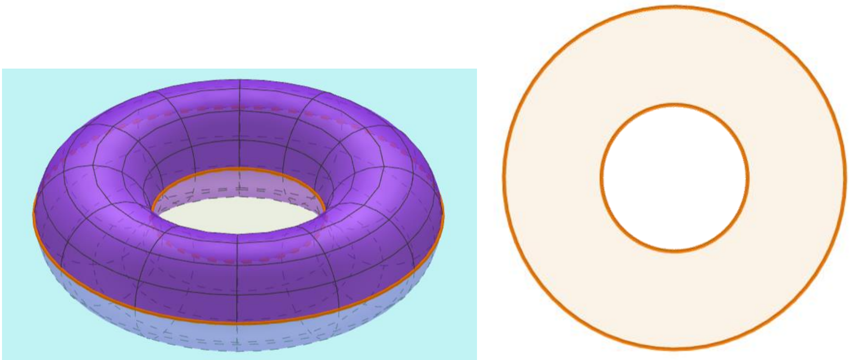


Figura 2

Você sabia que é possível cortar a rosquinha através de um corte "torto" e obter mais duas circunferências?

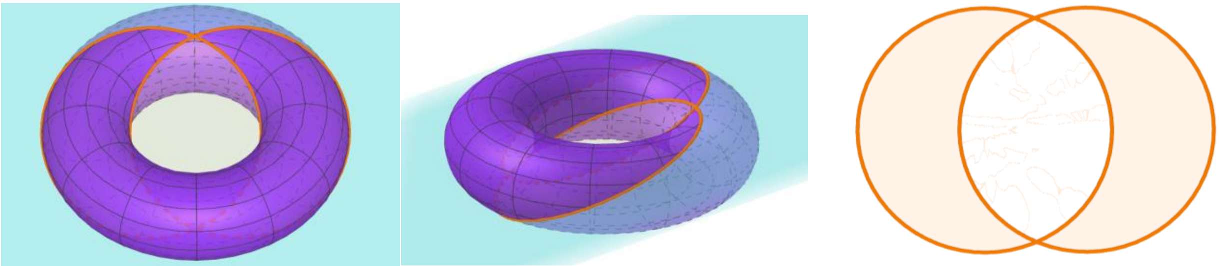
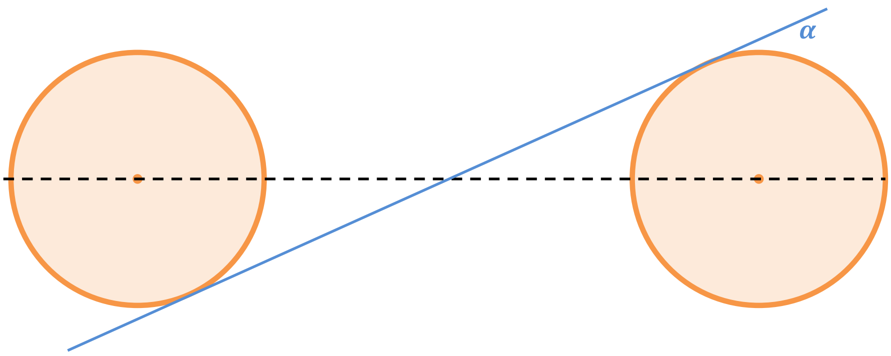


Figura 3

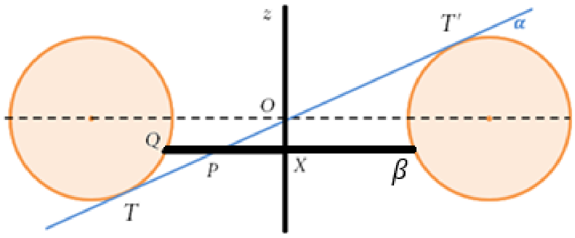
É isso que iremos mostrar nesse problema.

Vamos formalizar um pouco mais a ideia de "rosquinha" e "corte": a "rosquinha" tem um nome matemático, que é *toro*, e é obtido rotacionando um círculo em torno de um eixo e o "corte" é a interseção de um toro com um plano. Para ajudar na visualização, usaremos secções em vez de ilustrar o desenho todo como nas figuras anteriores.

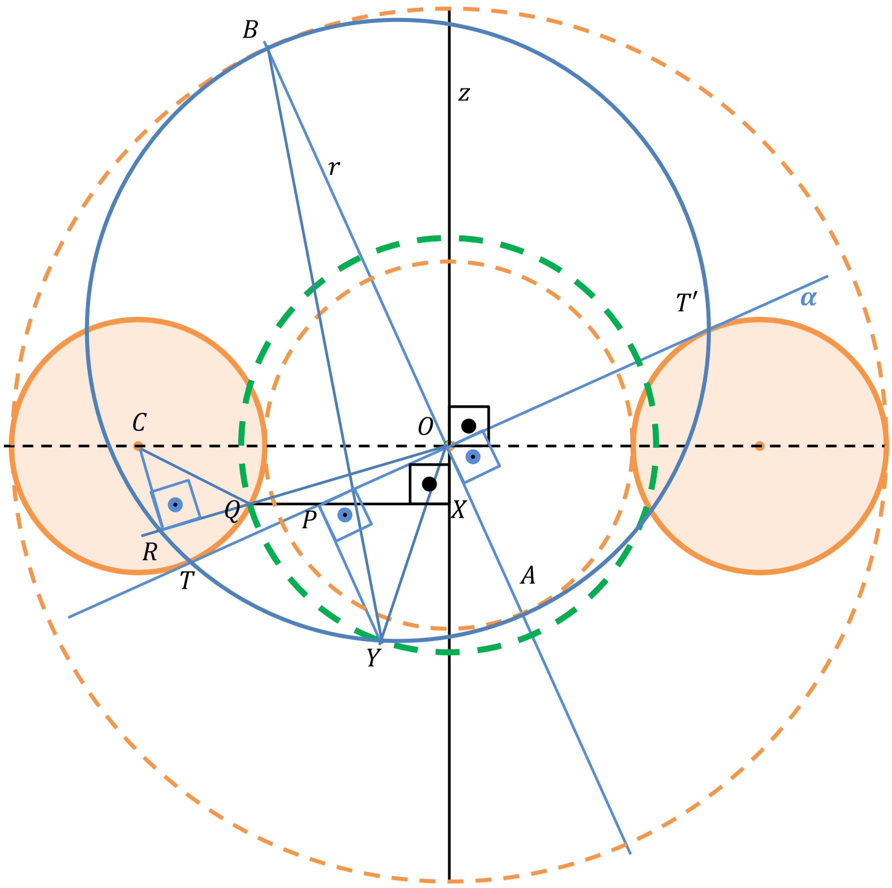
O plano da figura 3, que doravante denominaremos α, é obtido da seguinte forma: ao fazermos um corte radial, o plano determina nesse corte uma tangente comum interna às duas circunferências:



Considere o eixo z do toro, os pontos T e T' de tangência do plano α com as duas circunferências do toro e o centro O da figura que é o ponto de encontro de z e TT'. Seja P um ponto sobre o segmento TT'. Trace um plano β por P perpendicular ao eixo, obtendo o ponto Q sobre o toro numa das circunferências e X sobre o eixo z como na figura a seguir.



Na figura a seguir, temos o corte radial visto na figura anterior e sobrepomos o corte simétrico exibido na figura 2. No plano α, a reta r passa no ponto O e é perpendicular a TT'. Veja que r está no plano de corte simétrico e temos pontos de interseção A e B com as circunferências interna e externa do corte, como mostrado na figura a seguir. Há também outros dois pontos A' e B' de interseção de r com as circunferências, mas não vamos utilizá-los diretamente nesta demonstração.



O ponto Y está na circunferência de raio OQ e centro O e $PY \perp OP$. Há outro ponto Y' que satisfaz essas condições, mas não vamos usá-lo nessa demonstração. Por potência de ponto concluímos que A, B, T e T' estão sobre uma circunferência, já que $OT \cdot OT' = OT^2 = OA \cdot OB$. Esta circunferência está destacada na figura anterior.

a) Que figuras são formadas pela interseção do plano β com o toro? A partir disso, explique por que Y está na borda da secção de α no toro.

b) Sendo R o pé da perpendicular do centro C à reta OQ, mostre que $\frac{CT}{OX} = \frac{OC}{OP}$ e $\frac{OX}{CR} = \frac{OQ}{OC}$.

c) Mostre que os triângulos CQR e OYP são semelhantes e tomando $m(R\hat{C}Q) = x$ determine as medidas dos ângulos $m(A\hat{O}Y)$ e $m(B\hat{O}Y)$ em função de x.

d) Calcule AY^2 e BY^2 em função apenas de OA, OB, OY, CQ e RQ.

e) Sendo S o segundo ponto de interseção de OQ com a circunferência de centro C, prove que $OS = OY + \frac{(OB-OA)RQ}{CQ}$.

f) Mostre que $AY^2 + BY^2 = AB^2$ e conclua que Y está na circunferência que passa pelos pontos A, B, T e T'.

g) Conclua o problema, ou seja, mostre que a secção de α no toro é delimitada por duas circunferências simétricas em relação a TT'.