XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (29 de setembro de 2018)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Os metrôs de algumas cidades do mundo, como Berlim na Alemanha, não possuem catracas. Em princípio, qualquer um pode entrar em um trem quando quiser, pagando ou não.

O controle de pagamento é feito por amostragem por meio de um método chamado *prova de pagamento*: quando solicitado por um funcionário do metrô - os quais operam "disfarçados" (sem uniforme) dentro dos vagões - o usuário deve mostrar um bilhete válido para a viagem. Caso o usuário não possua o bilhete, ele tem de pagar uma multa.

Neste problema iremos estimar o percentual de usuários do metrô de Berlim que viajam sem pagar.

a) Ocorrem, em média, $1{,}515$ milhão de viagens por dia no metrô de Berlim. Se o metrô de Berlim fica aberto todos os 365 dias do ano, quantas viagens ocorrem em um ano?

b) O preço médio de um bilhete unitário é 3 euros e a multa por viajar sem bilhete válido é de 60 euros. Vamos supor que metade do valor da multa é para cobrir as passagens de todos que viajam sem pagar e a outra metade é uma sobretaxa para tornar a multa alta o suficiente para que a pessoa nunca mais faça isso (equivale a aproximadamente 300 reais, viagem cara, né?). Sabe-se ainda que sejam pegos anualmente por volta de 400 mil usuários sem bilhete. Estime o percentual de viagens feitas sem pagamento em um ano.

PROBLEMA 2

Uma maneira de medir desempenho é por meio de números! Por exemplo, o desempenho de um atacante de futebol pode ser medido pela quantidade de gols que ele marca, ou o desempenho de um estudante em alguma matéria pode ser medido pela nota em uma prova.
Todavia, nem sempre a pontuação em uma prova reflete a habilidade do aluno; pode ser que ela esteja fácil ou difícil demais ou que o estudante tenha mais ou menos “sorte”. Para isso, podemos levar em consideração a média de todos os estudantes que fizeram a prova.
Levando em conta tais aspectos, o Professor Truman L. Kelley, de Harvard, publicou em 1923 a sua equação, que estima habilidade da seguinte maneira:

$$\text{Habilidade} = r \cdot \text{Pontuação} + (1 - r) \cdot \text{Média}$$

O número r está entre 0 e 1 e reflete a consistência da avaliação quando comparada com suas edições anteriores; quanto maior o valor de r, mais consistente ela é.
Considere como exemplo as temporadas de 2012, 2013 e 2014 do futebol americano, a NFL. Uma das posições mais importantes desse esporte é a de *quarterback*; vamos nos focar nessa posição. Para cada *quarterback* existe uma medida de desempenho, o *rate*. Vamos usar desempenho para estimar habilidade: a consistência r entre as temporadas de 2012 e 2013 é $r = 0{,}43$, e a média é $85{,}9$.

a) Um dos melhores jogadores da história na posição é Peyton Manning. Estime a sua habilidade, utilizando que o rate dele em 2013 foi $115{,}1$.

b) A consistência r entre as temporadas de 2013 e 2014 é $r = 0{,}22$ e a média é $88{,}0$. O rate de Peyton Manning nesse ano foi $101{,}5$. Estime sua habilidade em 2014.

c) É possível que o rate de um atleta aumente de um ano para o próximo, mas a estimativa de sua habilidade diminua (de fato, isso ocorreu para Aaron Rodgers de 2013 para 2014). Apresente um possível valor de rate de 2013 e um possível valor de rate de 2014, cada um deles entre 85 e 115 (desempenho usual dos melhores quaterbacks), tais que isso aconteça.

PROBLEMA 3

a) Calcule a soma dos algarismos de $9 \cdot 37$, $9 \cdot 124$ e de $9 \cdot 12345678$.

b) Observe: $235 \cdot 9 = 235 \cdot (10 - 1) = 2350 - 235$, e armando a conta obtemos:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & \cancel{5}^{\,4} & {}^{1}0 \\ - & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

Considere agora o número $n = (abc)$, em que a, b e c são algarismos com $a < b < c$ (no nosso exemplo, $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$). Mostre que, para todos a, b, c com $1 \leq a < b < c \leq 9$, a soma dos algarismos de $9n$ é 9.

c) Seja $n = (xyzw)$ em que x, y, z e w são algarismos com $9 \geq x > y > z > w \geq 1$. Determine a soma dos algarismos de $9n$. *Não se esqueça que você deve justificar a sua resposta.*

PROBLEMA 4

Zé Roberto deixou seus dois filhos Umberto e Doisberto de castigo, porque eles ficaram estudando Matemática até muito tarde e se esqueceram de estudar para a prova de Português. Mas Zé é muito sensível e, para que seus filhos não fiquem chateados, ele decide fazer um jogo com os dois meninos. Ele combina os seguintes passos:

I. Primeiro Zé coloca sobre uma mesa 8 cartas numeradas de 1 a 8 em fila, em qualquer ordem, com os números virados para cima.
II. Em seguida, ele chama apenas Umberto. Ele pode trocar uma carta de posição com outra carta ou deixar tudo como está. Ou seja, ele faz uma troca ou nenhuma troca.
III. Depois que Umberto sai, Zé vira os números para baixo deixando as faces não numeradas para cima. Todas essas faces dessas cartas são iguais.
IV. Finalmente, Zé chama Doisberto e lhe diz um número de 1 a 8. Um chute de Doisberto é escolher uma carta e virar seu número para cima. Se Doisberto encontrar a carta com o número que Zé disse em 4 ou menos chutes então os filhos vencem o jogo e estão livres do castigo. Umberto não sabe qual número o pai dirá a Doisberto e também não pode dar dicas para seu irmão sobre a sequência de cartas na mesa.

Será que existe alguma estratégia para os irmãos vencerem? Nesse problema mostraremos que sim.

Precisamos de uma estrutura para representar as sequências. Usaremos um diagrama com 8 bolinhas numeradas de 1 a 8. Vamos conectar essas bolinhas com setinhas indicando que o número da bolinha no final da setinha está na posição cujo número está na bolinha no início da setinha. Por exemplo, se a primeira carta da sequência é 7, a segunda carta da sequência é 2 e a terceira carta da sequência é 1 então tem uma setinha da bolinha 1 para a bolinha 7, tem uma setinha da bolinha 2 para a bolinha 2 e uma setinha da bolinha 3 para a bolinha 1. Esse tipo de estrutura com bolinhas e conexões entre elas é conhecido como *grafo orientado*.

Veja o grafo da sequência de cartas (7,2,1,5,4,3,8,6).

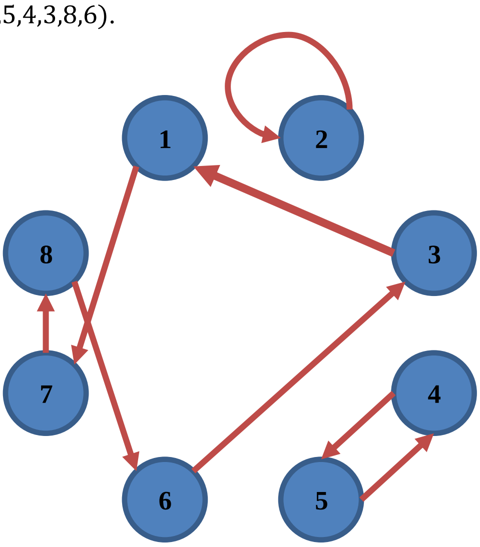


Figura 1

a) Monte o grafo da sequência de cartas (2,3,1,7,4,8,6,5).

Uma sequência de bolinhas que podemos percorrer usando as setinhas e voltar para a bolinha onde começamos é chamada de *ciclo*. O número de bolinhas no ciclo é chamado de tamanho do ciclo. Por exemplo, o grafo da figura 1 é composto por um ciclo de tamanho 1, um ciclo de tamanho 2 e um ciclo de tamanho 5. Sabe-se que esse tipo de grafo é sempre composto por ciclos.

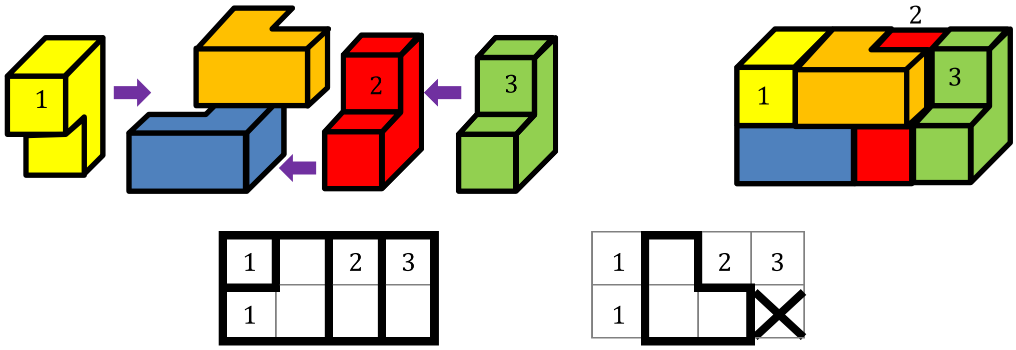
b) Qual é o tamanho do maior ciclo do grafo que você fez no item a?

c) Agora vamos voltar para o nosso problema inicial. Suponha que a sequência de cartas viradas para baixo em que Doisberto deve fazer seus chutes é (7,2,1,5,4,3,8,6) e que Zé pediu a carta 3. Doisberto decide usar a seguinte estratégia: vira a terceira carta da esquerda para a direita. Se ele não acertou, seu próximo chute é na posição do número da carta que ele virou; no nosso exemplo, como a terceira carta é 1, a próxima carta a ser virada é a primeira carta da esquerda para a direita. No caso o número na última carta virada é 7 e a próxima carta a ser virada é a sétima carta. Se Doisberto continuar fazendo seus chutes sempre no número da última carta que ele virou, quantos chutes ele usará para achar o 3?

d) Agora veremos como Umberto pode ajudar. Considere a sequência de cartas (7,2,1,5,4,3,8,6) cujo grafo está na figura 1. Mostre uma escolha das duas cartas que Umberto pode fazer tal que após trocar essas duas cartas o maior ciclo do grafo passe a ser 3. Se Doisberto usar a estratégia do item anterior (procurar uma carta na posição daquele número e no próximo chute tentar o número da última carta virada) no máximo quantos chutes precisará para achar a carta que Zé escolher?
Lembre-se: Umberto não sabe qual número o pai vai escolher. Logo, a troca de Umberto deve fazer com que a estratégia de Doisberto encontre ***qualquer*** *número com tal limite de chutes.*

e) Suponha que Zé decide usar um baralho normal de 52 cartas distintas ao invés de apenas 8 cartas. Monte uma estratégia para Umberto e Doisberto de modo que Doisberto consiga encontrar qualquer carta que Zé escolher em no máximo 26 chutes. *Não se esqueça que você deve justificar a sua resposta.*

PROBLEMA 5
Teresa tem várias peças no formato de L, obtidas unindo três cubos unitários. Ela gosta de montar sólidos que são quase blocos retangulares, mas com um pequeno detalhe: esses sólidos não têm um cubo em exatamente um dos cantos. Vamos chamar esses sólidos de *plocos*.
Nesse problema, vamos usar tabuleiros para indicar como montar plocos. Por exemplo, observe como indicamos a montagem de um ploco $2 \times 4 \times 2$:



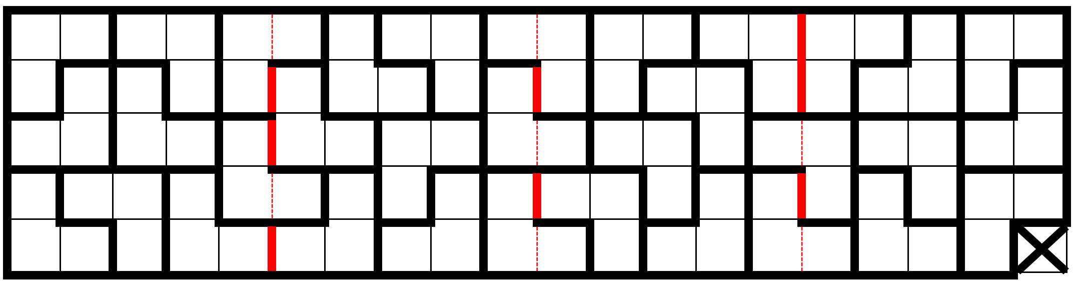
Andar 1 Andar 2

Nessa representação:

- as peças "deitadas" são representadas normalmente sem números;
- as peças com um cubo no andar e dois cubos no "andar de cima" são indicadas com dois números nos dois andares, correspondentes aos cubos do andar de cima. Observe o bloco 1 no exemplo.
- as peças com dois cubos no andar e um cubo no "andar de cima" são indicadas com um retângulo 1×2 ou 2×1, com o cubo no andar de cima indicado por um número dentro do retângulo. Observe os blocos 2 e 3 no exemplo.
- as peças que tem cubos no andar anterior são representadas por números que não estão dentro de regiões com linha mais grossa;
- peças com cubos em dois andares são representadas por números diferentes;
- o canto vazio é indicado com um $\times$ na casinha correspondente.

a) Mostre como montar um ploco $4 \times 5 \times 2$. Use a folha de respostas para fazer a representação como descrito acima.

b) A figura a seguir mostra como preencher um tabuleiro 5×20 com L's, deixando uma casinha no canto. Usando essa figura, mostre como montar um ploco $5 \times 5 \times 4$. Novamente, use a folha de respostas para fazer a representação.



c) Suponha que Teresa tem um desenho que mostra como cobrir um tabuleiro 200×800 com L's, deixando uma casinha no canto. Explique como ela poderia usar esse desenho para montar um ploco $200 \times 40 \times 20$.

R A S C U N H O

Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.

XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (29 de setembro de 2018)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Os metrôs de algumas cidades do mundo, como Berlim na Alemanha, não possuem catracas. Em princípio, qualquer um pode entrar em um trem quando quiser, pagando ou não.
O controle de pagamento é feito por amostragem por meio de um método chamado *prova de pagamento*: quando solicitado por um funcionário do metrô - os quais operam "disfarçados" (sem uniforme) dentro dos vagões - o usuário deve mostrar um bilhete válido para a viagem. Caso o usuário não possua o bilhete, ele tem de pagar uma multa.
Neste problema iremos estimar o percentual de usuários do metrô de Berlim que viajam sem pagar.

a) Ocorrem, em média, 1,515 milhão de viagens por dia no metrô de Berlim. Se o metrô de Berlim fica aberto todos os 365 dias do ano, quantas viagens ocorrem em um ano?

b) O preço médio de um bilhete unitário é 3 euros e a multa por viajar sem bilhete válido é de 60 euros. Vamos supor que metade do valor da multa é para cobrir as passagens de todos que viajam sem pagar e a outra metade é uma sobretaxa para tornar a multa alta o suficiente para que a pessoa nunca mais faça isso (equivale a aproximadamente 300 reais, viagem cara, né?). Sabe-se ainda que sejam pegos anualmente por volta de 400 mil usuários sem bilhete. Estime o percentual de viagens feitas sem pagamento em um ano.

PROBLEMA 2

Nesse problema vamos estudar o *jogo dos primos*: dado um número inicial, cada jogador passa para o outro jogador o número que recebeu subtraído de um número primo. Todos os números envolvidos devem ser positivos (lembre-se: zero não é positivo!). Chamaremos a pessoa que deve fazer a primeira subtração de primeiro jogador e o seu adversário de segundo jogador. O jogador que na sua vez não puder fazer uma jogada nessas condições perde.

Por exemplo, suponha que o número inicial seja 29. O jogo dos primos pode decorrer da seguinte maneira:

- O primeiro jogador subtrai 13 e deixa o número 16 para o segundo jogador.
- O segundo jogador subtrai 3 e obtém 13.
- O primeiro jogador subtrai 11 e obtém 2.
- É a vez do segundo jogador, mas ele não pode fazer sua jogada, pois é impossível subtrair um primo de 2 para obter um inteiro positivo (lembre-se que 1 não é primo). Nesse exemplo, o primeiro jogador foi o vencedor.

a) Suponha que o número inicial seja 20. Determine todos os números que o primeiro jogador pode deixar para o segundo na primeira jogada.

A principal pergunta nesse tipo de problema é: qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora? Ou seja, qual dos jogadores pode escolher suas jogadas de forma que assegure sua vitória, não importando como o outro jogador jogue? Isso depende do número inicial. Por exemplo, se o inteiro positivo inicial for 1 ou 2 então o primeiro jogador já perde sem poder fazer sua primeira jogada, mas se o número inicial for 3, 4 ou 5 então o primeiro jogador pode assegurar sua vitória subtraindo 2, 3 ou 3, respectivamente. Veja que se começar com 5 o primeiro jogador poderia subtrair 2 e deixar o 3 para o segundo jogador, mas essa jogada não vale a pena.

Para estudar qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora em cada situação, usaremos a ideia de *posições perdedoras e vencedoras*. Chamaremos o estado atual de um jogo de *posição do jogo*. No caso do jogo dos primos, a posição do jogo é o inteiro positivo que cada jogador acabou de receber. Uma posição é dita **perdedora** se o jogo acaba nessa posição ou se **qualquer forma** de jogar leva a uma posição vencedora. Uma posição é dita **vencedora** se **existe pelo menos uma forma** de jogar a partir dessa posição que deixa o adversário numa posição perdedora. Pode-se mostrar que quem recebe um número na posição vencedora tem estratégia vencedora, e que quem recebe um número na posição perdedora perde o jogo se o oponente usar a estratégia vencedora.
Na tabela a seguir temos na primeira linha as posições. Na segunda linha indicamos se a posição é perdedora indicada por P ou vencedora indicada por V. Na terceira linha indicamos para cada posição vencedora um primo que pode ser subtraído do número para levar a uma posição perdedora.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V ou P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	P	P
Primo			2	3	3	5	5	7	7		

b) Explique por que as posições 10 e 11 são perdedoras.

c) Sabendo que as únicas posições perdedoras menores que 26 são 1, 2, 10 e 11, prove que a posição 26 é perdedora.

d) Determine a próxima posição perdedora após o 26.

e) Prove que 100 é uma posição vencedora.

PROBLEMA 3
Muitos problemas da chamada *Teoria dos Números*, ramo da Matemática que estuda os números inteiros, surpreendem por serem muito simples de enunciar e, ao mesmo tempo, terem soluções extremamente difíceis. De fato, alguns deles estão abertos até hoje, isto é, ainda não se encontrou uma maneira de resolvê-los. Nesta questão, iremos estudar um problema com essas características: *quais inteiros podem ser escritos como soma de três cubos de inteiros?*

De imediato podemos obter $0 = 0^3 + 0^3 + 0^3; 1 = 1^3 + 0^3 + 0^3;\ 2 = 1^3 + 1^3 + 0^3; 3 = 1^3 + 1^3 + 1^3$. Muito fácil até agora. Então, depois de tentar bastante, percebemos que parece ser bem difícil obter expressões para 4 e para 5, se é que elas existem! Chegamos em $6 = 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3$ e tudo vai tranquilamente até chegarmos em $12 = (-11)^3 + 10^3 + 7^3$. Esse precisa de muita paciência e organização para obter! Achou difícil? Que tal

$$30 = 2220422932^3 + (-2218888517)^3 + (-283059965)^3$$

É claro que aqui contamos com o com auxílio de computadores!

De fato, o que se sabe atualmente sobre o problema é que não é possível representar números que deixam resto 4 ou 5 na divisão por 9 como soma de três cubos, ou seja: $4, 5, 13, 14, 22, 23, 31, 32$, por exemplo, não podem ser representados dessa maneira. E se acredita que todos os outros números possuam infinitas representações, mas, em especial, não se sabe até hoje se o número 33 é a soma de três cubos.

a) São conhecidas várias maneiras de representar alguns números como soma de três cubos, por exemplo, $29 = 3^3 + 1^3 + 1^3 = 4^3 + (-3)^3 + (-2)^3 = (-20)^3 + 13^3 + 18^3$. Escreva 34 de duas maneiras distintas como soma de três cubos.

b) Observe:

$$(3k)^3 = 27k^3 = 9(3k^3)$$
$$(3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$$

Isto é: ao elevarmos ao cubo um múltiplo de 3 (deixa resto 0 na divisão por 3) obtemos um múltiplo de 9 (deixa resto 0 na divisão por 9); ao elevarmos ao cubo um número que deixa resto 1 na divisão por 3 obtemos um número que deixa resto 1 na divisão por 9.
Qual é o resto na divisão por 9 de um número que deixa resto 2 na divisão por 3?
Dica: Você pode desejar utilizar nesse item a identidade: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

c) Utilizando o item b, mostre que todo número que deixa resto 4 na divisão por 9 não pode ser escrito como soma de três cubos de inteiros.

Vamos concluir esse problema demonstrando que o número 2 pode ser escrito de infinitas maneiras como soma de três cubos. Inicialmente, considere a soma de três cubos:

$$(a+1)^3 + (-a+1)^3 + (-b)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3 + 3a^2 - 3a + 1 - b^3 =$$
$$6a^2 - b^3 + 2$$

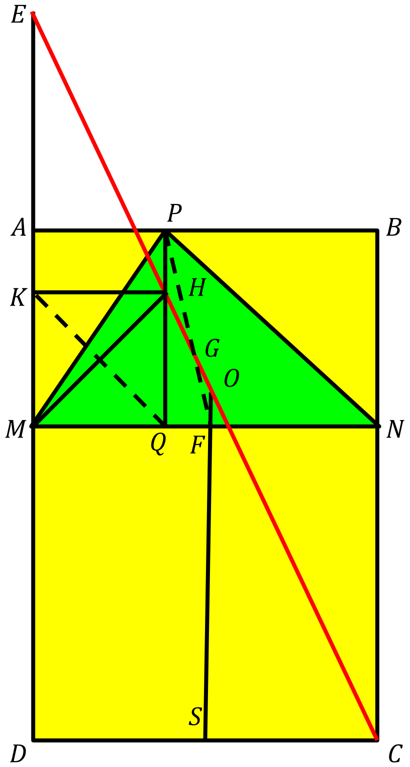
Basta, então, encontrarmos expressões para a e b de modo que

$$6a^2 - b^3 + 2 = 2 \Leftrightarrow 6a^2 = b^3 (*)$$

e teremos infinitas maneiras de representarmos 2 como soma de três cubos.
d) A partir da igualdade em $(*)$, obtenha expressões algébricas para a e b, provando que 2 pode ser escrito de infinitas maneiras como soma de três cubos.

PROBLEMA 4
A razão áurea, representada por φ, é uma constante real muito utilizada em obras de arte. Muitos artistas acreditam que essa razão torna as formas mais belas. Por exemplo, na obra Mona Lisa de Da Vinci se um retângulo for desenhado em torno do rosto da jovem, a altura desse retângulo dividida pela largura seria aproximadamente φ. Retângulos em que a razão entre os lados é φ são conhecidos como *retângulos dourados*.
Outra estrutura considerada muito bela pelos amantes da geometria é a Reta de Euler. Em todo triângulo, o ortocentro (encontro das alturas), o baricentro (encontro das medianas) e o circuncentro (encontro das mediatrizes) estão sobre uma mesma reta chamada *Reta de Euler* do triângulo.
Nesse problema uniremos essas duas estruturas para construir um novo resultado também muito belo.
Vamos definir φ como o número real positivo tal que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Seja $ABCD$ um retângulo dourado com $\frac{AD}{AB} = \varphi$. Considere os quadrados $CDMN$, $BNQP$ e $MQHK$ dentro dos três retângulos $ABCD$, $ABNM$ e $MQPA$, respectivamente. Tome ainda o ponto E de modo que A seja o ponto médio do segmento ME. Provaremos que EC é a Reta de Euler do triângulo MNP.



Retângulos dourados têm uma propriedade bacana: se cortarmos um quadrado de lado igual à sua menor dimensão, obtemos outro retângulo dourado. Por exemplo, veja que se cortarmos o quadrado $CDMN$ do retângulo dourado $ABCD$, obtemos o retângulo dourado $BNMA$, pois

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AB}{AD - AB} = \frac{1}{\frac{AD}{AB} - 1} = \frac{1}{\varphi - 1},$$

e

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(\varphi - 1) = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{\varphi - 1},$$

de modo que

$$\frac{AB}{AM} = \varphi.$$

Observe que, pelo mesmo raciocínio, os retângulos $MQPA$ e $AKHP$ também são retângulos dourados.

a) Prove que KQ é paralelo a PN. Observe que MH e KQ são perpendiculares, pois são diagonais de um quadrado. A partir desses resultados, explique por que H é o ortocentro do triângulo MNP.
Dica: basta provar que duas alturas desse triângulo passam no ponto H.

Usando os retângulos dourados podemos calcular razões

$$\frac{AD}{AM} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{AM} = \varphi \cdot \varphi = \varphi^2 \ e \ \frac{AK}{AM} = \frac{AK}{AP} \cdot \frac{AP}{AM} = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

b) Prove que $\frac{KH}{DC} = \frac{1}{\varphi^2}$.

Veja que

$$\frac{EK}{ED} = \frac{EA + AK}{EA + AD} = \frac{AM + AK}{AM + AD} = \frac{1 + \frac{AK}{AM}}{1 + \frac{AD}{AM}} = \frac{1 + \frac{1}{\varphi^2}}{1 + \varphi^2} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

c) Prove que $m(H\hat{E}K) = m(C\hat{E}D)$ e conclua que o ponto H está sobre a reta EC.

Sejam O e S os pontos médios dos lados EC e CD do triângulo CDE, respectivamente, e F a interseção de MN e OS. Para provar que O é o circuncentro do triângulo MNP basta mostrar que OF é perpendicular a MN e que $2 \cdot OF = PH$. A partir disso, é possível concluir que a reta EC é a Reta de Euler do triângulo MNP.

d) Prove que OF é perpendicular a MN e que $2 \cdot OF = PH$.

PROBLEMA 5
Atarefaldo tem muitas tarefas para fazer, e precisa se organizar para saber em que ordem ele deve fazer suas tarefas. Ele só se preocupa com a tarefa que se atrasar mais, e quer minimizar o atraso dessa tarefa. Chamemos esse atraso de *atraso máximo*.
Cada tarefa tem uma *duração*, que é o tempo que ela demora para ser feita, e um *prazo*, que é quando ela deve ser entregue. O atraso é igual ao tempo decorrido entre o prazo da tarefa e o momento em que a tarefa é concluída, se tal conclusão ocorre após o prazo; caso contrário, o atraso é zero. Não existem atrasos negativos.
Por exemplo, se Atarefaldo tem três tarefas A, B e C, com prazos marcados para daqui a 5, 7 e 11 dias, respectivamente, e durações 5, 6 e 2 dias, respectivamente, e faz as tarefas na ordem BAC, o seguinte ocorre:

- Atarefaldo termina a tarefa B após 6 dias, a entregando antes do seu prazo de 7 dias, ou seja, com atraso 0.
- Ele termina a tarefa A após $6+5=11$ dias, a entregando com um atraso de $11-5=6$ dias.
- Ele termina a tarefa C após $6+5+2=13$ dias, a entregando com um atraso de $13-11=2$ dias.

O atraso máximo é, então, o maior valor entre 0, 6 e 2, ou seja, 6.
Após essa experiência, Atarefaldo decidiu, então, entregar suas tarefas em ordem crescente de prazo. No exemplo anterior, ele entregaria suas tarefas na ordem ABC.

a) Calcule o atraso máximo que Atarefaldo obteria se fizesse as tarefas descritas anteriormente na ordem ABC.

Vamos agora demonstrar que esse método realmente minimiza o atraso máximo. Para isso, vamos supor que isso não seja o caso, e chegaremos a um absurdo.

b) Prove que se as tarefas de Atarefaldo não estão em ordem crescente de prazo, então existem duas tarefas consecutivas, X e Y, tais que X vem antes de Y e o prazo p de X vem depois do prazo q de Y.

c) Sejam d e f as durações de X e Y, respectivamente. Seja então O_1 essa ordem com X antes de Y e O_2 a ordem de tarefas obtidas a partir da anterior somente trocando a ordem das tarefas X e Y. Compare os atrasos de todas as tarefas das ordens O_1 e O_2, verifique que o atraso máximo não aumenta e conclua a demonstração.

XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (29 de setembro de 2018)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em Estatística e Probabilidades, podemos testar hipóteses. Por exemplo, podemos testar se uma moeda é honesta. Ou seja, ao lançarmos a moeda várias vezes, se aproximadamente em metade das vezes obtemos cara e, na outra metade, coroa. A abordagem mais óbvia é a correta: lançamos a moeda várias vezes e verificamos se isso acontece.

A *Estatística Bayesiana* consiste em usar o conhecimento anterior que temos sobre a moeda e acomodar a nova informação que obtemos após jogá-la algumas vezes.

Inicialmente, não sabemos muito sobre a moeda, de modo que a probabilidade de obter cara pode ser qualquer número entre 0 e 1, com iguais chances. Assim, se lançamos a moeda e obtemos k caras e c coroas, estimamos a probabilidade de obter cara sendo $\frac{k+1}{k+c+2}\,(*)$.

a) Se lançamos a moeda 10 vezes e obtivemos 7 caras, estime a probabilidade de obter cara com essa moeda.

b) Se a probabilidade estimada é $\frac{3}{5}$ em 203 lançamentos, quantas vezes obtivemos cara?

c) Suponha que a moeda já foi usada, equivalendo a 100 lançamentos com 60 caras e 40 coroas. Então, considerando a teoria bayesiana, a estimativa $(*)$ muda para $\frac{k+60}{k+c+100}$. Qual é a menor quantidade de lançamentos necessários para que as estimativas coincidam?

Nesse item você pode desejar utilizar que:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

PROBLEMA 2

Nesse problema vamos estudar o *jogo dos primos*: dado um número inicial, cada jogador passa para o outro jogador o número que recebeu subtraído de um número primo. Todos os números envolvidos devem ser positivos (lembre-se: zero não é positivo!). Chamaremos a pessoa que deve fazer a primeira subtração de primeiro jogador e o seu adversário de segundo jogador. O jogador que na sua vez não puder fazer uma jogada nessas condições perde.

Por exemplo, suponha que o número inicial seja 29. O jogo dos primos pode decorrer da seguinte maneira:

- O primeiro jogador subtrai 13 e deixa o número 16 para o segundo jogador.
- O segundo jogador subtrai 3 e obtém 13.
- O primeiro jogador subtrai 11 e obtém 2.
- É a vez do segundo jogador, mas ele não pode fazer sua jogada, pois é impossível subtrair um primo de 2 para obter um inteiro positivo (lembre-se que 1 não é primo). Nesse exemplo, o primeiro jogador foi o vencedor.

a) Suponha que o número inicial seja 20. Determine todos os números que o primeiro jogador pode deixar para o segundo na primeira jogada.

A principal pergunta nesse tipo de problema é: qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora? Ou seja, qual dos jogadores pode escolher suas jogadas de forma que assegure sua vitória, não importando como o outro jogador jogue? Isso depende do número inicial. Por exemplo, se o inteiro positivo inicial for 1 ou 2 então o primeiro jogador já perde sem poder fazer sua primeira jogada, mas se o número inicial for 3, 4 ou 5 então o primeiro jogador pode assegurar sua vitória subtraindo 2, 3 ou 3, respectivamente. Veja que se começar com 5 o primeiro jogador poderia subtrair 2 e deixar o 3 para o segundo jogador, mas essa jogada não vale a pena.

Para estudar qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora em cada situação, usaremos a ideia de *posições perdedoras e vencedoras*. Chamaremos o estado atual de um jogo de *posição do jogo*. No caso do jogo dos primos, a posição do jogo é o inteiro positivo que cada jogador acabou de receber. Uma posição é dita **perdedora** se o jogo acaba nessa posição ou se **qualquer forma** de jogar leva a uma posição vencedora. Uma posição é dita **vencedora** se **existe pelo menos uma forma** de jogar a partir dessa

posição que deixa o adversário numa posição perdedora. Pode-se mostrar que quem recebe um número na posição vencedora tem estratégia vencedora, e que quem recebe um número na posição perdedora perde o jogo se o oponente usar a estratégia vencedora.
Na tabela a seguir temos na primeira linha as posições. Na segunda linha indicamos se a posição é perdedora indicada por P ou vencedora indicada por V. Na terceira linha indicamos para cada posição vencedora um primo que pode ser subtraído do número para levar a uma posição perdedora.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V ou P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	P	P
Primo			2	3	3	5	5	7	7		

b) Explique por que as posições 10 e 11 são perdedoras.

c) Sabendo que as únicas posições perdedoras menores que 26 são 1, 2, 10 e 11, prove que a posição 26 é perdedora.

d) Determine a próxima posição perdedora após o 26.

e) Suponha que as k primeiras posições perdedoras são a_1, a_2, ..., a_{k-1} e a_k. Sendo a_{k+1} a próxima posição perdedora após a_k, prove que $a_{k+1} \leq (a_1 a_2 \ldots a_k)^2$ para $k \geq 3$.

PROBLEMA 3

A *construção de Cayley – Dickson* cria uma sequência de *Álgebras* (conjuntos numéricos cujas operações possuem certas propriedades) a partir do conjunto inicial dos Reais. Vamos descrevê-la a seguir:

- Dado um conjunto A, o próximo conjunto da sequência de Cayley – Dickson é $A^2 = A \times A$, o produto cartesiano de A por A.
- A adição é definida como segue: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- Dado o par (a, b), o *conjugado* de (a, b) é $(a, b)^* = (a^*, -b)$. Em que a^* é o conjugado de a em A. Vale a pena citar que o conjugado de um número real é ele mesmo.
- O produto é definido como segue: $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - d^* \cdot b, d \cdot a + b \cdot c^*)$. A ordem dos fatores aqui é importante, pois nem sempre a multiplicação será comutativa. Lembre-se que uma operação $\circ$ é dita comutativa quando $x \circ y = y \circ x$ para quaisquer x e y.
- O zero, formado por pares ordenados com todos os elementos iguais a 0, é o elemento neutro da adição. Em geral, escrevemos apenas 0 quando não houver dubiedade.

A partir dos Reais ($\mathbb{R}$) obtemos, com a construção de Cayley – Dickson, os Complexos ($\mathbb{C}$) e, então, os Quatérnions, os Octónions, os Sedénions, ... Em símbolos:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow Quatérnions \longrightarrow Octónions \longrightarrow Sedénions \longrightarrow \cdots$$

Nessa questão iremos estudar quando podemos usar as Matrizes e suas operações usuais para representar tais conjuntos numéricos.

Vamos identificar o par ordenado $(a, b) \in A^2$ com a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$. Assim, o complexo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fica identificado com a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Lembre-se que o conjugado de um real é ele mesmo, ou seja, $\alpha^* = \alpha$, para α real.
Já o quatérnion $((a, b), (c, d)) \in \mathbb{C}^2$ fica identificado com a matriz $\begin{bmatrix} (a, b) & (c, d) \\ -(c, d)^* & (a, b)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a, b) & (c, d) \\ -(c^*, -d) & (a^*, -b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a, b) & (c, d) \\ (-c, d) & (a, -b) \end{bmatrix}$, ou seja, fica identificado com a matriz $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$.

a) É fácil de verificar que a adição definida pela construção de Cayley – Dickson é coerente com a adição das matrizes que identificamos com os pares ordenados. Ou seja, a adição das matrizes que identificamos com os pares (a, b) e (c, d) é a matriz que identificamos com $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Mostre que a multiplicação de pares ordenados de reais (ou seja, a multiplicação de complexos) é coerente com a multiplicação das matrizes que identificamos com os pares ordenados de reais. Isto é, mostre que a matriz correspondente a (a, b) quando multiplicada pela matriz correspondente a (c, d) é igual a matriz correspondente a $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - d^* \cdot b, d \cdot a + b \cdot c^*)$.

b) Para todos esses conjuntos identificam-se as matrizes αI, em que I é a matriz identidade, com o número real α. Mostre que existem infinitos quatérnions que são raízes quadradas de -1, ou seja, existem infinitas representações matriciais X de quatérnions tais que $X^2 = -I$.
Você pode desejar utilizar nesse item que a representação dos quatérnions via Matrizes é coerente com as operações de adição e multiplicação.

c) As quatro unidades dos quatérnions são:

$$1 = \big((1,0), (0,0)\big);\ i = \big((0,1), (0,0)\big); j = \big((0,0), (1,0)\big); k = \big((0,0), (0,1)\big).$$

Escreva a representação matricial de cada uma das quatro unidades.

d) Pode-se mostrar que $i \cdot j = k$. Calcule $j \cdot i$ e conclua que a multiplicação de quatérnions não é comutativa.
Você pode desejar utilizar nesse item que a representação dos quatérnions via Matrizes é coerente com as operações de adição e multiplicação.

e) As oito unidades dos octónions são:

$$e_0 = (((1,0),(0,0)),((0,0),(0,0)));\ e_1 = (((0,1),(0,0)),((0,0),(0,0)));$$
$$e_2 = (((0,0),(1,0)),((0,0),(0,0)));\ e_3 = (((0,0),(0,1)),((0,0),(0,0)));$$
$$e_4 = (((0,0),(0,0)),((1,0),(0,0)));\ e_5 = (((0,0),(0,0)),((0,1),(0,0)));$$
$$e_6 = (((0,0),(0,0)),((0,0),(1,0)));\ e_7 = (((0,0),(0,0)),((0,0),(0,1))).$$

Recordando a definição de multiplicação:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c - d^*\cdot b, d\cdot a + b\cdot c^*)$$

e considerando que

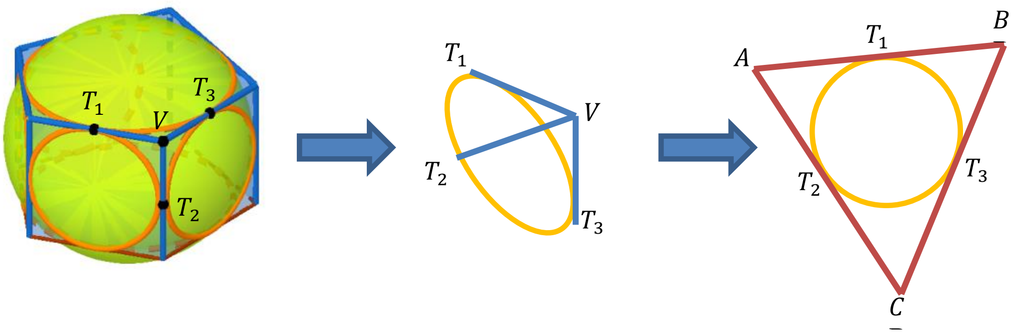
$$e_1 = (((0,1),(0,0)),((0,0),(0,0))) = (i,0)$$
$$e_2 = (((0,0),(1,0)),((0,0),(0,0))) = (j,0)$$
$$e_4 = (((0,0),(0,0)),((1,0),(0,0))) = (0,1)$$

vamos calcular o produto

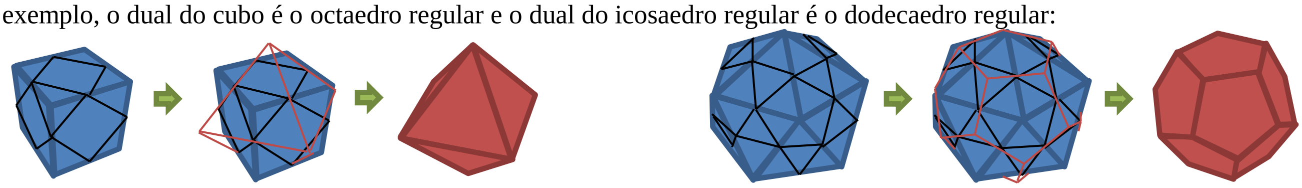
$$(e_1\cdot e_2)\cdot e_4 = ((i,0)\cdot(j,0))\cdot(0,1) = (i\cdot j,0)\cdot(0,1) = (k,0)\cdot(0,1) = (0,k)$$

Ou seja, $(e_1\cdot e_2)\cdot e_4 = e_7$.
Calcule $e_1\cdot(e_2\cdot e_4)$ e conclua que não é possível representar os octónions por meio de matrizes de forma que a operação de multiplicação seja coerente com tal representação.

PROBLEMA 4
Dado um sólido S delimitado por polígonos, podemos construir o seu dual D fazendo uma correspondência entre os vértices de S e as faces de D.
No caso em que existe uma esfera Γ que tangencia todas as arestas de S, a construção do dual D é a seguinte: para cada vértice V de S, sejam T_1, T_2, …, T_k os pontos de tangência de Γ nas arestas de S que têm V como uma de suas extremidades. A face de D correspondente a V está contida no plano $T_1T_2\ldots T_k$ (sim, todos esses pontos são coplanares!) e é delimitada pelas retas tangentes a Γ contidas nesse plano. Na figura a seguir, a face de D correspondente ao vértice V é o triângulo ABC.



Por exemplo, o dual do cubo é o octaedro regular e o dual do icosaedro regular é o dodecaedro regular:



a) Sendo V, Γ e $T_1, T_2, \ldots, T_k$ como definido anteriormente, explique por que $VT_1 = VT_2 = \cdots = VT_k$ e sendo O o centro de Γ, conclua que OV é perpendicular ao plano $T_1T_2\ldots T_k$.

b) Mostre que se o dual de S é D então o dual de D é S.

c) Suponha que o sólido S e seu dual D admitam esferas circunscritas Ω_S e Ω_D (esferas que passam por todos os vértices) e esferas inscritas ω_S e ω_D (esferas que tangencia todas as faces). Suponha também que os centros de todas as esferas Ω_S, Ω_D, ω_D, ω_S e Γ (que tangencia as arestas de S e D) coincidam.
Sejam R_S e R_D os raios de Ω_S e Ω_D, respectivamente, e r_S e r_D os raios de ω_S e ω_D, respectivamente. Seja também ρ o raio da esfera Γ. Prove que $R_S\cdot r_D = \rho^2$.
Sugestão: desenhe a secção que contém o centro comum O, um vértice V de S e um ponto de tangência T_1 de Γ em uma das arestas de S (e de D também!). Onde está a face de D correspondente a V nessa secção?

d) Chamaremos de sólidos duais semelhantes dois sólidos tais que um seja semelhante a um dual do outro. Prove que se dois sólidos duais semelhantes estão inscritos na mesma esfera, ou seja, que as esferas circunscritas deles coincidem, e admitem esferas inscritas, então essas esferas inscritas têm o mesmo raio.

PROBLEMA 5

Como podemos sortear um dentre n números de maneira justa – cada um deles com a mesma probabilidade – por meio do menor número possível de lançamentos de uma moeda? Observe que essa é a chave para a solução eficiente para um problema prático de extrema importância: como os computadores utilizam o sistema binário (0 ou 1/ Cara ou Coroa), tal questão é importante na implementação de geradores de números aleatórios.

Inicialmente, vamos (na verdade, você vai ;-)) mostrar que não há um limitante superior para o número de lançamentos necessários para um n fixado que não é uma potência de 2.

a) Suponha que n possua um fator primo ímpar em sua fatoração. Mostre que não há um esquema justo com um número máximo de lançamentos pré-fixado.

Vamos conhecer, agora, um esquema famoso, mas muito ineficiente: n pessoas – a cada uma atribuímos um número – jogam uma moeda e, se uma delas tira uma face diferente de todas as outras, ela é a escolhida. Caso contrário, é realizada outra rodada e assim por diante, até determinarmos o vencedor.

b) Calcule a probabilidade p de que seja necessária uma segunda rodada.

c) Seja $e[n]$ o valor esperado do número de lançamentos da moeda para determinar qual das n pessoas será a escolhida. Mostre que $e[n] = n + p \cdot e[n]$ e, então, encontre uma fórmula fechada para $e[n]$.

Aqui você pode desejar utilizar que o valor esperado é o somatório dos valores multiplicados pelas suas probabilidades – se um certo valor é impossível, sua probabilidade é zero. Na expressão abaixo $Pr(d = i)$ é a probabilidade de a quantidade d de lançamentos ser igual a i.

$$e[n] = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot Pr(d = i)$$

Apresentaremos agora um esquema que é justo e eficiente. Começamos com $m = \lceil \log_2 n \rceil$ lançamentos da moeda ($\lceil \alpha \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a α); atribuímos a n das possíveis 2^m sequências cada um dos n números. Se alguma dessas sequências ocorre, acabou. Caso contrário, obtivemos uma das $r_1 = 2^m - n$ sequências não atribuídas a número algum e começamos uma nova rodada de lançamentos. Lançamos a moeda mais $m_1 = \lceil \log_2 (n/r_1) \rceil$ vezes e atribuímos a n das possíveis $r_1 2^{m_1}$ sequências cada um dos n números. Se alguma dessas sequências ocorre, acabou. Caso contrário, o processo é repetido.

Observemos como funciona tal esquema para $n = 5$.

Começamos com $m = \lceil \log_2 5 \rceil = 3$ lançamentos. Digamos que tenhamos combinado previamente a seguinte atribuição: $000 \longrightarrow 1, 001 \longrightarrow 2, 010 \longrightarrow 3, 011 \longrightarrow 4, 100 \longrightarrow 5$. Se alguma dessas sequências foi obtida, acabou. Temos $r_1 = 2^3 - 5 = 3$ sequências que se obtidas fazem com que o processo tenha de ser repetido: $101, 110, 111$.

Caso contrário, realizamos mais $m_1 = \lceil \log_2 5/3 \rceil = 1$ lançamento. Digamos que tenhamos combinado previamente a seguinte atribuição: $1010 \longrightarrow 1, 1011 \longrightarrow 2, 1100 \longrightarrow 3, 1101 \longrightarrow 4, 1110 \longrightarrow 5$. Se alguma dessas sequências foi obtida, acabou. Temos $r_2 = 3 \cdot 2^1 - 5 = 1$ sequência que se obtida faz com que o processo tenha de ser repetido: 1111.

d) Calcule $e[5]$ para o esquema apresentado acima.

e) Mostre que para esse esquema $e[n]$ é um número racional para todo n inteiro positivo.

f) Demonstre que:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot Pr(d = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} Pr(d > i)$$

Conclua, então, que o esquema apresentado acima apresenta a menor esperança possível para o número de lançamentos necessários para sortear um dentre n números.