XXXVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (10 de novembro de 2012)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em 1912, o farmacêutico Wilbur Lincoln Scoville desenvolveu a *Escala de Scoville*, um teste usado para medir a ardência de uma pimenta ou de um molho de pimentas. Essa escala baseia-se na concentração de capsaicina, o componente químico que produz a sensação de "calor" quando nós, seres humanos, ingerimos uma pimenta ou um molho de pimentas (nos pássaros, a capsaicina age como analgésico ao invés de causar ardência).

No teste, uma solução do extrato de pimenta é diluída em água até que o "calor" não seja detectável por um grupo de provadores; o grau de diluição dá a sua medida na escala de Scoville.

A pimenta doce, que não contém nenhuma capsaicina, tem um índice de Scoville igual a zero. As pimentas muito quentes, como as *habaneros*, podem ter uma classificação de 300.000 (ou mais) unidades Scoville.

Veja mais alguns exemplos dessa escala.

Pimenta / Molho de Pimenta	*Unidades Scoville*
Capsaicina pura	16.000.000
Halloween 2005	13.500.000
Spray de pimenta usado pela polícia	5.300.000
Naga-Bih Jolokia	1.000.000
Spontaneous Combustion Power	Entre 400.000 e 500.000
Vicious Viper	250.000
You can't Handle this Hot Sauce	225.000
Mustard Gas	125.000
Da' Bomb Beyond Insanity	119.700
Widow – No Survivors	90.000
Pimenta Vermelha da Amazônia	Entre 75.000 e 80.000
Caiena	Entre 30.000 e 50.000
Hot Wax	Entre 5.000 e 10.000
Cholula	3.600
Tabasco	Entre 2.500 e 5.000
Anaheim	Entre 500 e 2.500
Pimenta da Toscana	Entre 100 e 500
Pimenta Doce	0

Fonte: http://www.chilliworld.com/factfile/scoville-scale-of-hot-sauces.asp

a) Ardêncio e Pimêncio adoram pimentas. Ardêncio adora Cholula e sabe que precisa tomar 1 xícara (40 ml) de leite para aliviar o ardor provocado por 1 colher desse molho.

Pimêncio, brincalhão, trocou alguns rótulos dos molhos. Sem saber, Ardêncio ingeriu 1 colher de *Widow – No Survivors* pensando ser Cholula. Que volume de leite ele precisará tomar para aliviar o ardor causado por esse molho?

b) Sabe-se que para a maioria das pessoas, o limite de ingestão de leite de uma só vez é 2 litros. Considerando esse fato, qual é a pimenta ou molho mais quente da tabela que Ardêncio pode ingerir e ter segurança de que vai poder aliviar o ardor tomando leite?

PROBLEMA 2

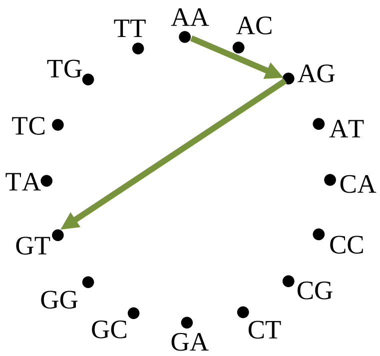
O DNA é feito de uma sequência de quatro *nucleobases* (A, C, T, G) como, por exemplo, TCATCTGTCACGTCGAT. Os padrões nas cadeias de DNA são usados para identificar criminosos, testes de paternidade, estudar doenças e criar curas para elas.

É fácil obter DNA de qualquer parte do corpo humano, como saliva ou cabelo. Sendo as cadeias de DNA longas, é difícil ler a sequência, e cientistas procuram constantemente técnicas para realizar essa tarefa.

Uma das técnicas é baseada na *placa sequenciadora de DNA*. Ela interage com a amostra de DNA e destaca as sequências de tamanho três que aparecem. Por exemplo, considere a placa a seguir, que exibe todas as 64 sequências de três letras, de AAA a TTT. As casas destacadas indicam que as três letras aparecem consecutivamente na amostra:

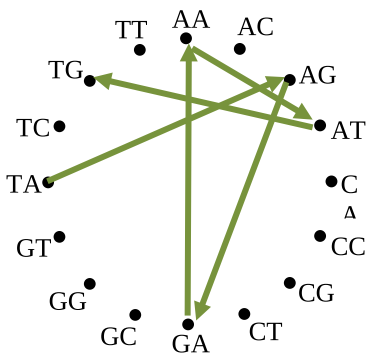
AAA	ACA	AGA	ATA	AAC	ACC	AGC	ATC
AAG	ACG	AGG	**ATG**	AAT	**ACT**	**AGT**	ATT
CAA	**CCA**	CGA	CTA	CAC	CCC	CGC	**CTC**
CAG	CCG	CGG	CTG	CAT	CCT	CGT	CTT
GAA	GCA	GGA	**GTA**	GAC	GCC	**GGC**	GTC
GAG	GCG	GGG	GTG	GAT	GCT	GGT	GTT
TAA	TCA	TGA	TTA	TAC	**TCC**	TGC	TTC
TAG	TCG	**TGG**	TTG	**TAT**	TCT	TGT	TTT

a) Para ajudar a descobrir a sequência, usamos um diagrama chamado *grafo*. Nele marcamos pontos, que representam as 16 sequências de duas letras, e ligamos XY a YZ com uma flecha quando XYZ aparece destacado na placa (X, Y, Z não precisam ser distintos). Por exemplo, como AAG e AGT estão destacadas, fazemos uma flecha ligando AA a AG e outra ligando AG a GT.



Agora é a sua vez! Complete o grafo (tem uma cópia na folha de respostas, complete lá!).

b) As flechas determinam um caminho formado por flechas consecutivas. Por exemplo, no grafo



as flechas formam o caminho TA-AG-GA-AA-AT-TG, e a sequência de DNA é TAGAATG.

Determine a sequência de DNA descrita na placa.

PROBLEMA 3

O matemágico Grande Ronaldini faz um de seus melhores truques: ele coloca na mesa uma pilha de moedas e chama quatro voluntários: Aino, Bino, Cino e Dino. Ele vira as costas para a pilha de moedas e diz: “Aino, por favor, pegue uma das moedas; Bino, pegue outra moeda, mas de valor diferente da de Aino; Cino, é a sua vez: pegue uma moeda, de valor diferente da de Aino e de Bino; Dino, espero que tenha prestado atenção, pois você tem que pegar uma moeda de valor diferente das moedas que seus amigos pegaram.”

Ainda sem ver o que está acontecendo, o Grande Ronaldini continua seu truque: “Dino, você foi o último a pegar a moeda, então você teve menos escolhas. Seja qual for o valor que você pegou, eu quero que você pegue agora o quádruplo desse valor; por exemplo, se você pegou 10 centavos, agora pegue mais 40 centavos. Se quiser pode usar sua moeda como troco. Aino, você foi primeiro, e deve ter sido ganancioso; pegue agora o mesmo valor que você tinha pegado antes. Bino, por favor pegue o dobro do que você tinha pegado antes; Cino, você escolheu mais tarde, então pegue o triplo do que você tinha pegado antes; se você tinha pegado 5 centavos, pegue agora mais 15 centavos.”

“Não deixem eu ver suas moedas”, Ronaldini diz enquanto se vira para a pilha das moedas que sobraram. Nesse momento, ele diz suas palavras mágicas e revela qual moeda cada um dos voluntários pegou no início do truque.

Ao contrário dos outros mágicos, o Grande Ronaldini releva seus truques: no início, ele coloca na mesa exatamente R$1,96: 6 moedas de R$0,01, 6 moedas de R$0,05, 6 moedas de R$0,10 e 4 moedas de R$0,25. No final, digamos que sobraram T centavos. Ronaldini faz os seguintes cálculos:

- Calcula o resto da divisão de T por 5. O resultado é 1, 2, 3 ou 4, e ele indica quem pegou a moeda de R$0,01: 1 corresponde a Dino, 2 a Cino, 3 a Bino e 4 a Aino.
- Calcula o resto r da divisão de T por 4, indicando quem pegou a moeda de R$0,10. Os restos 1, 2, 3 e 0 indicam Dino, Cino, Bino e Aino, respectivamente.
- Soma $3r$ (r foi calculado no passo anterior) ao quociente da divisão de T por 5. O resto da divisão dessa conta por 5 diz quem pegou a moeda de R$0,05: 1 corresponde a Dino, 2 a Cino, 3 a Bino e 4 a Aino.
- A pessoa que sobrou pegou a moeda de R$0,25.

Por exemplo, suponha que sobraram 77 centavos na pilha. Executemos os passos com $T = 77$:

- 77 dividido por 5 deixa resto 2, então Cino pegou a moeda de R$0,01.
- 77 dividido por 4 deixa resto $r = 1$, então Dino pegou a moeda de R$0,10.
- Temos $3r = 3$ e que o quociente da divisão de 77 por 5 é 15. O resto da divisão da soma, $3 + 15 = 18$, por 5, é 3, e Bino pegou a moeda de R$0,05.
- A pessoa que sobrou, Aino, pegou a moeda de R$0,25.

a) Suponha agora que sobraram 66 centavos na pilha. Usando o procedimento acima, diga quem pegou qual moeda.

b) Sejam u, c, d, v as quantidades de moedas de R$0,01, R$0,05, R$0,10 e R$0,25 que o Grande Ronaldini pede para os voluntários retirarem na segunda parte da mágica (de modo que u, c, d, v são os números 1,2,3,4 em alguma ordem). Determine, em termos de u, c, d, v, quantos centavos sobram na pilha.

c) Explique por que o primeiro passo do procedimento funciona, ou seja, mostre por que o resto da divisão de T por 5 indica, da maneira apresentada, quem pegou a moeda de R$0,01.

PROBLEMA 4

O *Sudoku* é um dos jogos de raciocínio mais populares atualmente. Ele consiste em completar um quadrado 9×9 de modo que cada linha, coluna e quadrado 3×3 contenha os algarismos de 1 a 9 exatamente uma vez.

Muitas questões de Matemática podem ser feitas envolvendo o Sudoku, mas a grande maioria das resoluções envolve o uso de computadores para estudar casos (que geralmente são muitos). Mas é possível criar questões menos trabalhosas com versões menores do Sudoku, como o *Shidoku*, que é jogado em quadrados 4×4 com os algarismos de 1 a 4 (*Shi* é "quatro" em japonês, por isso o nome *Shidoku*). As regras são semelhantes: em cada linha, coluna e quadrado 2×2 devem aparecer os números de 1 a 4 exatamente uma vez. Veja alguns Shidokus preenchidos:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Pode-se provar que só existem dois tipos de Shidokus essencialmente diferentes: os dois exemplos acima. Chamaremos o da esquerda de *Tipo I* e o da direita de *Tipo II*.

a) Preencha o Shidoku que está na folha de respostas.

Continuando nossa discussão: no item a, vimos um exemplo em que quatro dicas (números dados) são suficientes para preencher um Shidoku, de modo que haja só uma solução. Provaremos, a partir da figura a seguir, que se tivermos apenas três dicas haverá mais de uma solução.

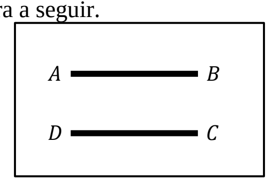
b) Quantas soluções tem o Shidoku com 12 dicas a seguir?

	2		4
	4		2
2	1	4	3
4	3	2	1

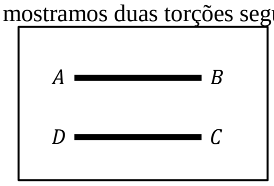
c) Explique por que Shidokus do Tipo I e do Tipo II com três dicas ou menos têm mais de uma solução.

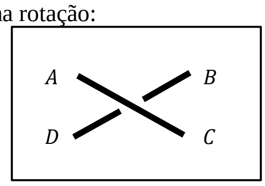
PROBLEMA 5

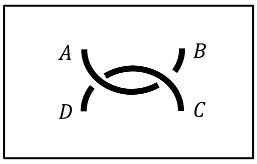
O matemático John H. Conway criou uma maneira de descrever laços em duas cordas usando os números racionais. Imagine quatro pinos em uma mesa, que são rotulados com as letras A, B, C e D, no sentido horário. Inicialmente prendemos as pontas de uma das cordas nos pinos A e B e as pontas da outra corda nos pinos C e D, como mostra a figura a seguir.

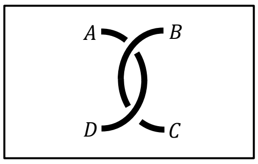


Uma *torção* consiste em trocar as pontas das cordas que estão em B e C, passando a corda com ponta que estava no começo em B sobre a corda com ponta que estava em C. Uma *rotação* consiste em girar as pontas em $90°$ no sentido horário, ou seja, $A \to B \to C \to D \to A$. A seguir, mostramos duas torções seguidas de uma rotação:









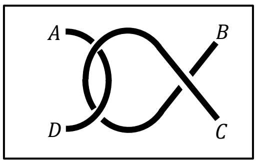
Conway associa a cada laço com duas cordas um número racional. A situação inicial corresponde ao 0. Cada torção soma 1 ao racional e cada rotação transforma o número no oposto de seu inverso (ou seja, $x \to -1/x$). As duas torções e a rotação acima nos levam aos racionais

$$0 \xrightarrow{T} 1 \xrightarrow{T} 2 \xrightarrow{R} -\frac{1}{2}$$

Algo muito bacana nessa associação é que ela permite mostrar como desatar o laço fazendo as mesmas operações. Por exemplo, desatamos o laço acima com uma torção, uma rotação e mais duas torções:

$$-\frac{1}{2} \xrightarrow{T} \frac{1}{2} \xrightarrow{R} -2 \xrightarrow{T} -1 \xrightarrow{T} 0.$$

a) Que número racional está associado ao laço a seguir?



b) Exiba uma sequência de torções e rotações que permitem construir o laço correspondente a $\frac{3}{4}$.

c) Como você desfaz o laço $\frac{3}{4}$ com torções e rotações? Mostre uma sequência de torções e rotações que faça isso.

d) Mostre que é possível desfazer qualquer laço feito com torções e rotações. Não se esqueça de justificar sua resposta.

XXXVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (10 de novembro de 2012)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

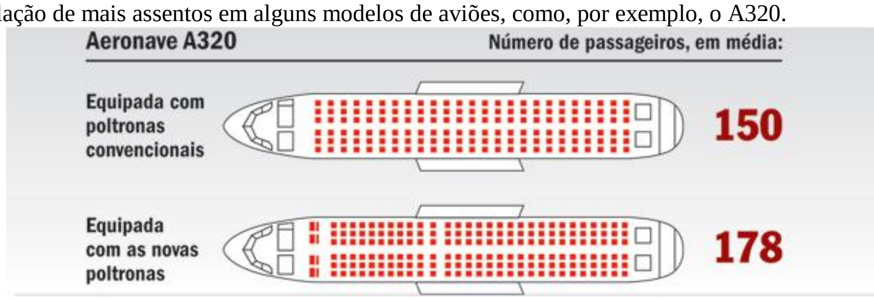
Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A mais nova medida para ampliar a quantidade de assentos nos aviões é substituir as poltronas convencionais por um modelo menor. As novas poltronas possibilitam instalação de mais assentos em alguns modelos de aviões, como, por exemplo, o A320.



Fonte: http://veja.abril.com.br/noticia/economia/titulo-falso-com-jeitinho-cabe-mais-um

a) Qual é o aumento percentual na capacidade de transporte de passageiros no A320?

b) A companhia Lufthansa já instalou poltronas adicionais em 168 aeronaves Airbus A320, elevando a capacidade de cada um desses aviões para 178 passageiros. Se ela não optasse pela instalação das novas poltronas, quantos aviões com 150 poltronas ela precisaria comprar para obter igual aumento no total de assentos?

c) A companhia Southwest, que tem uma frota de 508 Boeings 737, também está fazendo essa mudança. A companhia, que realiza uma média de 3200 voos por dia, calcula que, com a inclusão de uma nova fileira de poltronas em cada avião, possa lucrar anualmente 200 milhões de dólares a mais. Sabendo que cada fileira de um Boeing 737 tem seis assentos, calcule o lucro médio por passageiro em uma dessas novas poltronas.

PROBLEMA 2

Srinivasa Ramanujan (22 de dezembro de 1887 – 26 de abril de 1920) é um matemático muito famoso pela originalidade de sua obra. Autodidata, devemos a ele algumas das mais impressionantes descobertas da Rainha das Ciências.

Fórmulas como $\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$ impressionam por si só, mas trazem ainda conexões profundas com diversos ramos da Matemática.

Estudaremos nesse problema uma questão que ele propôs no *Journal of Indian Mathematical Society*.

a) Simplifique a expressão $\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$ em que n é inteiro positivo.

b) Simplifique a expressão

$$\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}}$$

em que n é um inteiro positivo.

c) Calcule o valor da expressão abaixo, em que aparecem 2011 raízes quadradas:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots+2010\sqrt{1+2011\sqrt{1+(2012)(2014)}}}}}}}$$

PROBLEMA 3

Um movimento bastante praticado em mágicas com cartas de baralho é o "vire duas e corte". Esse movimento consiste em virar, juntas, as duas cartas do topo da pilha (de modo que cartas viradas para cima fiquem viradas para baixo e vice-versa), colocá-las de volta ao topo, cortar o baralho em qualquer lugar e juntar os dois montes. Por exemplo, vamos executar esse movimento algumas vezes em uma pilha de 10 cartas, numeradas de 1 a 10. As cartas em vermelho estão viradas para cima; as cartas em azul estão viradas para baixo.

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 → 2,1,3,4,5,6,7,8,9,10 → 5,6,7,8,9,10,2,1,3,4
→ 6,5,7,8,9,10,2,1,3,4 → 1,3,4,6,5,7,8,9,10,2
→ 3,1,4,6,5,7,8,9,10,2 → 9,10,2,3,1,4,6,5,7,8

O que esse movimento tem de especial? Ele tem a seguinte propriedade: *para qualquer pilha com $2n$ cartas viradas inicialmente para baixo, a quantidade de cartas viradas para cima em posições pares é igual à quantidade de cartas viradas para cima em posições ímpares*. De fato, no nosso exemplo, temos, após cada um dos três movimentos ("vire duas e corte"), uma carta (a carta 2 na sétima posição, a carta 1 na oitava posição), duas cartas (cartas 1 e 5 em posições ímpares e cartas 2 e 6 nas posições pares) e duas cartas (cartas 2 e 6 nas posições ímpares e cartas 3 e 5 nas posições pares).

a) Explique por que a quantidade de cartas viradas para cima em posições pares continua igual à quantidade de cartas viradas para cima em posições ímpares após um corte. Considere nesse item que só fazemos um corte, ou seja, não viramos as duas cartas do topo.

b) Explique por que a quantidade de cartas viradas para cima em posições pares continua igual à quantidade de cartas viradas para cima em posições ímpares após virar as duas cartas do topo.

Continuando nossa análise, uma aplicação dessa propriedade é o truque *Baby Hummer*: tome quatro cartas, forme uma pilha com todas as cartas viradas para baixo e memorize a última carta (a que está embaixo na pilha). Agora, mexa as cartas de acordo com as seguintes instruções:

i. Coloque a carta do topo no fim da pilha.

ii. Vire a carta que está agora no topo.

iii. Vire duas cartas e corte. Faça isso quantas vezes quiser.

iv. Vire a carta que está no topo (se está virada para baixo, vire-a para cima; se estiver virada para cima, vire-a para baixo). Em seguida, coloque essa carta no fim da pilha.

v. Coloque a carta que está agora no topo no fim da pilha (não vire a carta!).

vi. Vire a carta que está agora no topo e deixe-a no topo.

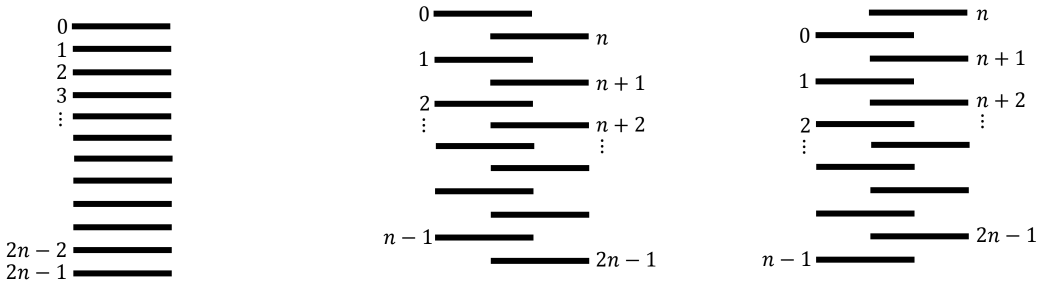
vii. Você se lembra da sua carta? Abra a pilha de cartas: três cartas estão viradas para um lado, e a sua carta está virada para o outro lado!

Com um pouco de treino, você nem precisa olhar para as cartas: o truque dá certo sempre!

c) Explique por que o Baby Hummer funciona.

PROBLEMA 4

Todo mágico que deseja fazer belos truques com cartas precisa dominar várias técnicas de embaralhar. Em especial, deve fazer com perfeição o *in-shuffle* e o *out-shuffle*.



Pilha original | Out-shuffle | In-shuffle

A técnica precisa ser completamente dominada para a realização de feitos impressionantes como, após 52 aplicações perfeitas de *in-shuffles*, voltar a ter o baralho em sua configuração original. (Estima-se que menos de cem pessoas no mundo consigam realizar tal façanha; uma delas é o grande matemático Persi Diaconis!)

Neste problema estudaremos os aspectos matemáticos de duas técnicas que usam aplicações sucessivas de *out-shuffles* e *in-shuffles*:

i) Levar a carta que está no topo para uma posição dada p.

ii) Levar a carta que está posição p para o topo.

Os cientistas da computação Sarnath Ramnath e Daniel Scully desenvolveram em 1996 um algoritmo que resolve o problema ii. Mostraremos como ele funciona para $p \neq 2n-1$. Se $p = 2n-1$, realizamos um *in-shuffle* e aplicamos o algoritmo para $p = 2n-2$.

Suponha que tenhamos um *deck* de $2n$ cartas. Numeramos as posições iniciais $0, 1, \dots, 2n-1$ (isto é, a carta do topo está na posição 0). Para determinar a sequência de *shuffles* que levará a carta na posição p para o topo, inicialmente, consideramos r que satisfaz $2^{r-1} < 2n \leq 2^r$.

Sendo t o maior inteiro menor ou igual a $\frac{2^r(p+1)}{2n}$, escreva t na base binária, $t = t_1 t_2 \dots t_r$. Considere ainda os últimos r dígitos da representação binária de $2nt$: $s_1 s_2 \dots s_r$. Formamos, então, a sequência binária $u = u_1 u_2 \dots u_r$, $u_i = t_i + s_i$, na qual as somas são feitas módulo 2 ($0+0 = 0, 1+0 = 1, 0+1 = 1, 1+1 = 0$). A sequência de shuffles desejada é obtida lendo u da esquerda para a direita e interpretando cada 0 como um *out-shuffle* e cada 1 com um *in-shuffle*. Para exemplificar, vamos aplicar o algoritmo de Ramnath e Scully para, em um baralho de 52 cartas, determinar uma sequência de *shuffles* que leve a carta situada inicialmente na posição $p = 37$ para o topo.

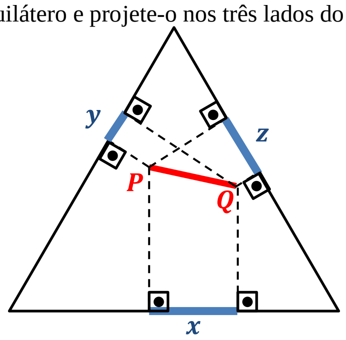
Nesse caso $r = 6$, pois $2^5 < 52 \leq 2^6$. Como $\frac{2^r(p+1)}{2n} = \frac{2^6 \cdot 38}{52} = 46 + \frac{10}{13}$, $t = 46$, cuja representação binária é 101110. Temos ainda que $2nt = 52 \times 46 = 2392$, cuja representação binária é 100101011000, ou seja, $s = 011000$. Logo $u = 110110$ e uma sequência que leva a carta que ocupa inicialmente a posição 37 para o topo é *in, in, out, in, in, out*. De fato, pode-se observar que a última embaralhada é supérflua: *in, in, out, in, in* são suficientes.

a) Apresente uma sequência de shuffles que leve a carta que ocupa a penúltima posição ($p = 50$) de um baralho de 52 cartas para o topo.

b) Como pode ser observado pelo algoritmo descrito acima, a representação da posição p na base binária é uma maneira adequada para observarmos os efeitos de *in-shuffles* e *out-shuffles* sobre a posição de uma carta. Prove que o seguinte algoritmo determina uma sucessão de shuffles que leva a carta do topo para a posição p, ou seja, resolve o problema i:

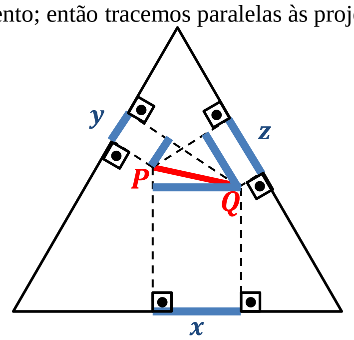
Escrevemos p na base binária. Basta, então, ler o número da esquerda para a direita – interpretando cada 0 como um *out-shuffle* e cada 1 com um *in-shuffle* – e temos uma sequência adequada.

PROBLEMA 5
Considere um segmento no interior de um triângulo equilátero e projete-o nos três lados do triângulo:



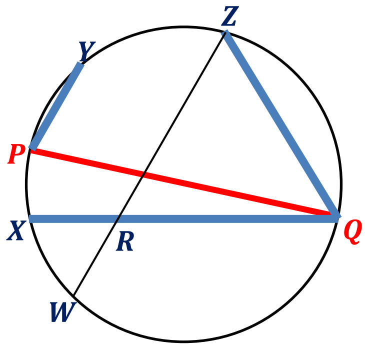
Mostraremos nesse problema que o comprimento da maior projeção é igual à soma das outras duas. Na nossa figura, $x = y + z$.

Vamos lá! Essas projeções estão muito longe do segmento; então tracemos paralelas às projeções:



a) Prove que as paralelas traçadas acima são cordas de uma circunferência com diâmetro PQ.

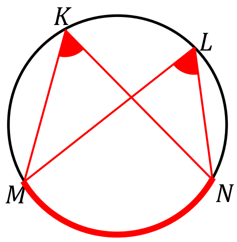
Continuando nossa análise, vamos ampliar a circunferência citada acima; além disso, traçamos ZW paralelo a PY:



b) Prove que o triângulo XRW é equilátero.
c) Calcule as medidas angulares dos arcos YX, ZY e PW. Não se esqueça de justificar seus cálculos.
d) Prove que $PY = XW$ e conclua o problema, ou seja, prove que $x = y + z$.

Você pode querer utilizar os seguintes fatos:

- *O conjunto de todos os pontos X tais que $A\hat{X}B$ é reto é uma circunferência de diâmetro AB, com exceção dos pontos A e B;*
- *Seja MN um arco de uma circunferência e K um ponto sobre o complementar desse arco. Então o ângulo $M\hat{K}N$ mede metade da medida angular do arco MN. Na figura a seguir, note que ambos os ângulos $M\hat{K}N$ e $M\hat{L}N$ têm como medida metade da medida angular do arco MN e são, portanto, congruentes.*



XXXVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (10 de novembro de 2012)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

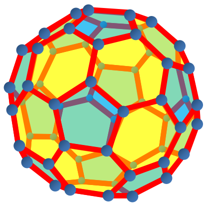
www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Na década de 80, os químicos sintetizaram os *fulerenos*, que são moléculas de carbono. Neles cada átomo de carbono está ligado a outros três. A figura a seguir representa um *Buckminsterfulereno*, que tem 60 átomos de carbono e rendeu um Prêmio Nobel para Robert Curl, Harold Kroto e Richard Smallem em 1996. Por simplicidade, não representamos as ligações duplas.



Em termos matemáticos, definimos *fulereno* como qualquer poliedro convexo apenas com faces hexagonais e pentagonais, sendo que cada vértice é extremidade de exatamente três arestas.
a) Sejam h e p as quantidades de faces hexagonais e pentagonais, respectivamente, de um fulereno. Calcule a quantidade de arestas e a quantidade de vértices do fulereno em função de h e p.
b) Mostre que todo fulereno tem exatamente 12 faces pentagonais.
Observação: Você pode querer utilizar a *fórmula de Euler*: sendo V, A e F as quantidades de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, $V - A + F = 2$.

PROBLEMA 2

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ variáveis reais, definimos o *polinômio simétrico* σ_k como a soma de todos os possíveis $\binom{n}{k}$ produtos de k entre as n variáveis. Por exemplo, $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ é a soma, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$ é a soma dos $\binom{n}{2}$ produtos de duas variáveis e $\sigma_n = x_1x_2 \dots x_n$ é o produto das n variáveis. Definimos ainda a soma das k-ésimas potências das n variáveis, $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$.
Existem várias fórmulas que relacionam s_k com os polinômios simétricos. Um exemplo são as *fórmulas de Newton*:

$$\begin{aligned}
&s_2 = \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2\\
&s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3\\
&s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 - 4\sigma_4\\
&\dots\\
&s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \cdots - (-1)^k k\sigma_k
\end{aligned}$$

Note que essas fórmulas nos dão s_k em função de $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$, ou seja, precisamos calcular todos os valores anteriores de s_i, $1 \le i < k$. Mas podemos obter s_k diretamente em função dos polinômios simétricos: por exemplo, para $k = 3$, podemos montar o sistema linear

$$\begin{cases} s_1 = \sigma_1 \\ \sigma_1 s_1 - s_2 = 2\sigma_2 \\ \sigma_2 s_1 - \sigma_1 s_2 + s_3 = 3\sigma_3 \end{cases}$$

e resolvê-lo.
a) Utilizando o sistema acima, encontre s_3 em função de σ_1, σ_2 e σ_3.
b) Utilizando as fórmulas de Newton (você não precisa demonstrá-las!), prove que

$$s_n = \det\begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)\sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & \sigma_1 & 1 \\ n\sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

Nesse problema, você pode querer utilizar a regra de Cramer: considere o sistema em x, y, z

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$$

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} m & b & c \\ n & e & f \\ p & h & i \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} a & m & c \\ d & n & f \\ g & p & i \end{bmatrix}, A_z = \begin{bmatrix} a & b & m \\ d & e & n \\ g & h & p \end{bmatrix}$$

Se $\det A \neq 0$, então a solução do sistema é dada por

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}, y = \frac{\det A_y}{\det A}, z = \frac{\det A_z}{\det A}.$$

A generalização desse resultado para n variáveis também é válida.

PROBLEMA 3
Uma *variável aleatória*, como o nome sugere, varia aleatoriamente. Associamos a cada valor de uma variável aleatória uma probabilidade, indicando com que frequência ele ocorre. Por exemplo, podemos usar uma variável aleatória X para representar o resultado do lançamento de uma moeda. Sendo X a quantidade de caras obtidas, temos $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$.

Podemos calcular o *valor esperado* e a *variância* de uma variável aleatória. Sendo S o espaço amostral, ou seja, o conjunto dos valores assumidos por X, o valor esperado $E(X)$ é a média, ponderada pelas probabilidades,
$$E(X)=\sum_{a\in S} a\cdot P(X=a)$$
Quando não há perigo de confusão, representamos $E(X)=\mu$. A variância de X, assim como o nome sugere, mede o quanto X varia em relação ao valor esperado:
$$VAR(X)=\sum_{a\in S}(a-\mu)^2\cdot P(X=a)$$
O valor esperado e a variância têm as seguintes propriedades: sendo X e Y variáveis aleatórias independentes (o valor de uma variável não influencia o valor da outra) e c constante,

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- $VAR(X+Y)=VAR(X)+VAR(Y)$
- $E(c\cdot X)=c\cdot E(X)$
- $VAR(c\cdot X)=c^2\cdot VAR(X)$

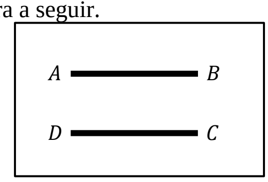
As variáveis aleatórias são úteis para obter algumas estimativas. Em particular, a *desigualdade de Chebyshev* diz que
$$P(|X-\mu|\geq t)\leq\frac{VAR(X)}{t^2}$$
Vamos achar, com o auxílio dessa desigualdade, uma estimativa para $\binom{2m}{m}$.

a) Seja $X=X_1+X_2+\cdots+X_{2m}$ a soma de $2m$ variáveis X_i independentes tais que X_i é igual a 0 com probabilidade $\frac{1}{2}$ e 1 com probabilidade $\frac{1}{2}$ (assim como a nossa moeda!). Calcule o valor esperado e a variância de X.

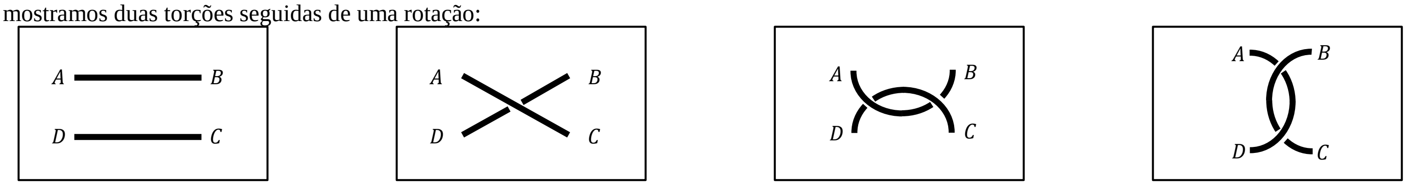
b) Mostre que $P\left(|X-m|<\sqrt{m}\right)\geq\frac{1}{2}$.

c) Calcule $P(X=m+k)$ e prove que $P\left(|X-m|<\sqrt{m}\right)\leq\left(2\sqrt{m}+1\right)\binom{2m}{m}2^{-2m}$. Conclua que $\binom{2m}{m}\geq\frac{2^{2m}}{4\sqrt{m}+2}$.

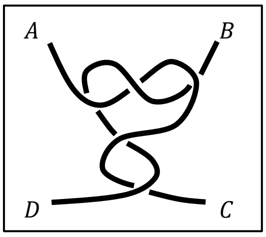
PROBLEMA 4
O matemático John H. Conway criou uma maneira de descrever laços em duas cordas usando os números racionais. Imagine quatro pinos em uma mesa, que são rotulados com as letras A, B, C e D, no sentido horário. Inicialmente prendemos as pontas de uma das cordas nos pinos A e B e as pontas da outra corda nos pinos C e D, como mostra a figura a seguir.



Uma *torção* consiste em trocar as pontas das cordas que estão em B e C, passando a corda com ponta que estava no começo em B sobre a corda com ponta que estava em C. Uma *rotação* consiste em girar as pontas em 90° no sentido horário, ou seja, $A\to B\to C\to D\to A$. A seguir, mostramos duas torções seguidas de uma rotação:



Conway associa a cada laço com duas cordas um número racional. A situação inicial corresponde ao 0. Cada torção soma 1 ao racional e cada rotação transforma o número no oposto de seu inverso (ou seja, $x\to -1/x$). As duas torções e a rotação acima nos levam aos racionais
$$0\overset{T}{\to}1\overset{T}{\to}2\overset{R}{\to}-\frac{1}{2}$$
Algo muito bacana nessa associação é que ela permite mostrar como desatar o laço fazendo as mesmas operações. Por exemplo, desatamos o laço acima com uma torção, uma rotação e mais duas torções:
$$-\frac{1}{2}\overset{T}{\to}\frac{1}{2}\overset{R}{\to}-2\overset{T}{\to}-1\overset{T}{\to}0.$$
a) Que número racional está associado ao laço a seguir?



b) Exiba uma sequência de torções e rotações que permitem construir o laço correspondente a $\frac{3}{7}$.

c) Como você desfaz o laço $\frac{3}{7}$ com torções e rotações? Mostre uma sequência de torções e rotações que faça isso.

d) Mostre que é possível representar qualquer número racional com laços.

PROBLEMA 5

Um mágico pergunta se alguém na plateia quer aprender a trapacear nas cartas. Após instantes de hesitação, alguns espectadores levantam a mão. Um deles é escolhido e o mágico diz que ele irá aprender um truque que permite vencer qualquer adversário no pôquer. O mágico continua:
-O segredo é aprender a dar boas cartas para seu adversário, mas dar cartas ainda melhores para você mesmo!
Após essas preliminares, o espectador, com o auxílio do mágico, separa algumas cartas de um baralho formando um segundo monte, junta novamente os dois montes em um único e, finalmente, dá as cartas. Para surpresa de todos, observa-se então que o adversário iria receber uma mão ótima: um straight (dez, valete, dama, rei e às – não todos do mesmo naipe); enquanto o espectador receberia uma das melhores mãos do jogo: um straight flush (dez, valete, dama, rei e às – todos de um mesmo naipe).
O mágico encerra o truque dizendo que o espectador deve se comprometer em não usar essa habilidade para ganhar dinheiro!

Por trás do truque descrito acima está um dos teoremas da Matemática mais utilizados em manipulação de cartas, o *Princípio de Gilbreath*, difundido durante as décadas de 50, 60 e 70 pelo matemático profissional e mágico praticante Norman Gilbreath.
Primeiramente, vamos definir uma *permutação de Gilbreath*: considere um baralho em que as cartas estão numeradas de 1 a n e que, inicialmente, encontram-se exatamente nessa ordem, ou seja, a i-ésima carta do baralho de cima para baixo é a carta i, como mostra a figura abaixo para $n = 10$.

1
2
3
4
⋮ ⋮
9
10

São retiradas as cartas de 1 a k e formamos um segundo monte com essas cartas, que agora aparecem na ordem inversa. Veja a seguir o caso em que $k = 4$.

	5
	6
4	7
3	8
2	9
1	10

Então formamos um único monte embaralhando os dois que temos.

5
4
6
7
3
2
8
9
10
1

Todas as permutações que podem ser obtidas dessa maneira, com um único corte e uma única embaralhada como descrito acima, são chamadas de *permutações de Gilbreath.* Por exemplo, considerando as figuras acima, (5,4,6,7,3,2,8,9,10,1) é uma permutação de Gilbreath de $\{1, 2, \dots, 10\}$.
a) Determine o número de permutações de Gilbreath de $\{1, 2, \dots, n\}$.
b) Demonstre o *Princípio de Gilbreath*:
Seja $\pi(i)$ o i-ésimo elemento de uma permutação. Para todo j e k, $1 \leq j, k \leq n$, com $jk \leq n$, os j termos consecutivos $\pi\big((k-1)j+1\big)$, $\pi\big((k-1)j+2\big), \dots,\ \pi(kj)$ de uma permutação de Gilbreath são distintos módulo j, isto é, deixam restos distintos na divisão por j. Por exemplo, na permutação (5,4,6,7,3,2,8,9,10,1) os restos na divisão por 3 são (2,1,0,1,0,2,2,0,1,1).