XXXVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (11 de agosto de 2012)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A partir de agosto de 2012, o algarismo 9 foi acrescentado ao início dos números de telefones celulares com DDD 11, que passam a ter nove dígitos. Essa medida tem por finalidade, no futuro, elevar para 90 milhões o limite da quantidade de linhas de celulares.
Sendo assim, é necessário atualizar os contatos salvos na agenda do celular, acrescentando o algarismo 9 no início dos números de celulares DDD 11. Mas, apesar de simples, a operação pode ser cansativa. Segundo uma empresa especializada, alterar manualmente 200 contatos leva 8 horas.

a) Considerando a estimativa dessa empresa, quantos segundos em média uma pessoa leva para alterar 1 contato?

b) Há 42 milhões de linhas de celulares com DDD 11. Considerando novamente a estimativa da empresa, determine quantas pessoas seriam necessárias para realizar a alteração desses números manualmente no prazo de 30 dias, cada uma trabalhando 8 horas por dia.

PROBLEMA 2

Na tabela a seguir, destacamos os elementos do conjunto $\{5, 7, 11, 19, 23\}$, todos números primos, um em cada linha (fileira horizontal) e um em cada coluna (fileira vertical):

1	2	3	4	**5**
6	**7**	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25

a) Escreva um conjunto de 11 números primos de modo que na tabela a seguir exatamente um pertença a cada linha e exatamente um pertença a cada coluna. Lembre-se de que 1 não é primo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

b) Escreva todos os conjuntos de 7 números primos de modo que na tabela a seguir cada conjunto tenha exatamente um elemento pertencente a cada linha e exatamente um elemento pertencente a cada coluna.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

PROBLEMA 3

Considere algumas informações sobre as medalhas distribuídas aos vencedores das competições em Londres 2012:

- A "medalha de ouro" é feita de uma liga de três metais: ouro (são somente 6 gramas), prata (92,5% da massa) e cobre (6% da massa). O cobre colabora na coloração da medalha.
- O custo da medalha, considerando apenas os metais, é R$1.273,00. Caso ela fosse de ouro maciço, o seu custo seria R$41.032,00.
- Serão distribuídas 301 medalhas de ouro.

a) Qual é a massa de prata e qual é a massa de cobre em uma "medalha de ouro"?

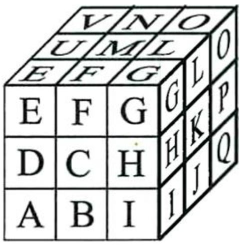
b) Suponha que fossem retirados os 6 gramas de ouro da "medalha de ouro" e ela fosse feita somente de prata e cobre (afinal, ela continuaria dourada e nenhum atleta iria perceber essa diferença de peso...). Qual seria a economia, considerando apenas o custo com os metais, para produzir as 301 medalhas?

PROBLEMA 4

Arnaldo tem 27 cubinhos unitários. Em cada uma das seis faces do primeiro cubinho ele escreve a letra A, em cada face do segundo cubinho ele escreve a letra B e, assim sucessivamente, até o vigésimo-sexto cubinho no qual ele escreve a letra Z. Nenhuma letra é escrita no vigésimo-sétimo cubinho.

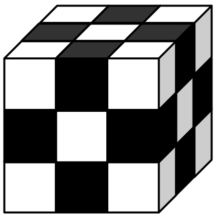
Feito isso, ele arruma os cubinhos para obter um cubo de aresta 3, com o cubinho que ficou sem letras no centro. Ele deseja dispor os 26 cubinhos tal que se possa percorrer pela superfície as 26 letras em ordem alfabética, indo de um cubinho para o seu vizinho. Dizemos que dois cubinhos são vizinhos quando possuem uma face em comum.

Ele já conseguiu montar um cubo no qual é possível percorrer de A até Q em ordem alfabética, mas nunca conseguiu um de A até Z.



Nesse problema mostraremos que, infelizmente, Arnaldo nunca conseguirá montar o cubo desejado.

a) Considere um cubo de aresta 3 formado por 27 cubinhos unitários. Cada cubinho teve suas faces pintadas de branco ou preto, de modo que cubos vizinhos são de cores diferentes.

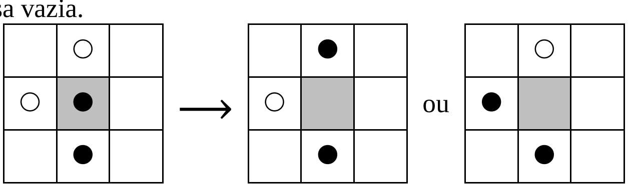


Quantos cubos foram pintados de preto? Não se esqueça de considerar o cubo central.

b) A partir do resultado do item a, mostre que Arnaldo nunca conseguirá montar o cubo da maneira que deseja.

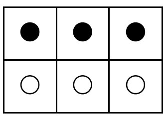
PROBLEMA 5

O jogo *Clobber* (em tradução livre, "esmagar") foi inventado em 2001 pelos matemáticos Michael Albert, J. P. Grossman e Richard Nowakowski. Ele é para duas pessoas e utiliza um tabuleiro com peças brancas e pretas. Um jogador move as peças pretas e outro jogador move as peças brancas. Eles jogam alternadamente e cada movimento consiste em tomar uma de suas peças e "esmagar" uma das peças do adversário que esteja em uma casa vizinha na vertical ou na horizontal (movimentos na diagonal não são permitidos). A peça "esmagada" do adversário é retirada. Por exemplo, a peça preta na casa destacada tem duas opções de movimento: para cima ou para a esquerda. Note que não é permitido mover uma peça para uma casa vazia.



As pretas começam o jogo e o primeiro jogador que não conseguir esmagar uma peça de seu adversário na sua vez perde o jogo.

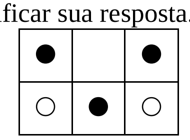
a) Considere o tabuleiro 2×3, ou seja, com duas linhas e três colunas.



Vamos analisar como o jogo pode se desenrolar nesse tabuleiro. Para tal análise, responda as duas perguntas a seguir.

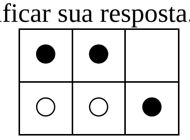
i) Se o primeiro jogador fizer a jogada mostrada a seguir, quem irá vencer? Admita que cada jogador, a partir de agora, escolhe a melhor jogada possível.

Não se esqueça de justificar sua resposta.

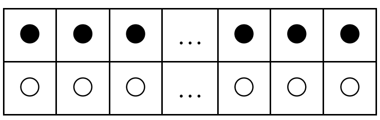


ii) E se o primeiro jogador fizer a jogada mostrada a seguir, quem irá vencer? Admita que cada jogador, a partir de agora, escolhe a melhor jogada possível.

Não se esqueça de justificar sua resposta.



b) Originaldo e Copialdo resolveram jogar Clobber em um tabuleiro 2×2012, com as 2012 peças pretas na fileira de cima e as 2012 peças brancas na fileira de baixo. Originaldo começa o jogo e Copialdo resolve "copiar" os movimentos de Originaldo, ou seja, ele faz o mesmo movimento no lado oposto do tabuleiro (por exemplo, se o movimento inicial de Originaldo é mover a 10ª peça preta da esquerda para a direita para baixo, Copialdo move a 10ª peça branca da direita para a esquerda para cima).



Quem ganha o jogo?

Novamente, não se esqueça de justificar sua resposta!

XXXVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (11 de agosto de 2012)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Considere algumas informações sobre as medalhas distribuídas aos vencedores das competições em Londres 2012:

- A "medalha de ouro" é feita de uma liga de três metais: ouro (são somente 6 gramas), prata (92,5% da massa) e cobre (6% da massa). O cobre colabora na coloração da medalha.

- O custo da medalha, considerando apenas os metais, é R$1.273,00. Caso ela fosse de ouro maciço, o seu custo seria R$41.032,00.

- Serão distribuídas 301 medalhas de ouro.

a) Qual é a massa de prata e qual é a massa de cobre em uma "medalha de ouro"?

b) Suponha que fossem retirados os 6 gramas de ouro da "medalha de ouro" e ela fosse feita somente de prata e cobre (afinal, ela continuaria dourada e nenhum atleta iria perceber essa diferença de peso...). Qual seria a economia, considerando apenas o custo com os metais, para produzir as 301 medalhas?

PROBLEMA 2

Um número inteiro n é chamado *paladino* se a quantidade de divisores positivos de n for igual à quantidade de algarismos de n.

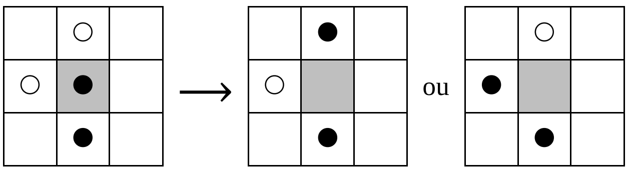
a) Determine todos os números paladinos de três algarismos.

b) Determine um número paladino com quatro algarismos menor do que 1300.

Nessa questão, talvez você deseje utilizar o seguinte fato: sendo $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *a fatoração em primos do natural* n, $n \geq 2$, *o seu número de divisores positivos é dado por* $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

PROBLEMA 3

O jogo *Clobber* (em tradução livre, "esmagar") foi inventado em 2001 pelos matemáticos Michael Albert, J. P. Grossman e Richard Nowakowski. Ele é para duas pessoas e utiliza um tabuleiro com peças brancas e pretas. Um jogador move as peças pretas e outro jogador move as peças brancas. Eles jogam alternadamente e cada movimento consiste em tomar uma de suas peças e "esmagar" uma das peças do adversário que esteja em uma casa vizinha na vertical ou na horizontal (movimentos na diagonal não são permitidos). A peça "esmagada" do adversário é retirada. Por exemplo, a peça preta na casa destacada tem duas opções de movimento: para cima ou para a esquerda. Note que não é permitido mover uma peça para uma casa vazia.



As pretas começam o jogo e o primeiro jogador que não conseguir esmagar uma peça de seu adversário na sua vez perde o jogo.

a) Considere o tabuleiro 2×3, ou seja, com duas linhas e três colunas.

●	●	●
○	○	○

Vamos analisar como o jogo pode se desenrolar nesse tabuleiro. Para tal análise, responda as duas perguntas a seguir.

i) Se o primeiro jogador fizer a jogada mostrada a seguir, quem irá vencer? Admita que cada jogador, a partir de agora, escolhe a melhor jogada possível.

Não se esqueça de justificar sua resposta.

●		●
○	●	○

ii) E se o primeiro jogador fizer a jogada mostrada a seguir, quem irá vencer? Admita que cada jogador, a partir de agora, escolhe a melhor jogada possível.

Não se esqueça de justificar sua resposta.

●	●	
○	○	●

b) Originaldo e Copialdo resolveram jogar Clobber em um tabuleiro 2×2012, com as 2012 peças pretas na fileira de cima e as 2012 peças brancas na fileira de baixo. Originaldo começa o jogo e Copialdo resolve "copiar" os movimentos de Originaldo, ou seja, ele faz o mesmo movimento no lado oposto do tabuleiro (por exemplo, se o movimento inicial de Originaldo é mover a 10ª peça preta da esquerda para a direita para baixo, Copialdo move a 10ª peça branca da direita para a esquerda para cima).

●	●	●	…	●	●	●
○	○	○	…	○	○	○

Quem ganha o jogo?

Novamente, não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 4

a) Fatore $(2x-1)(2y-1)-2xy+1$.
b) Sejam x e y números reais maiores ou iguais a 1. Prove que $(2x-1)(2y-1) \geq 2xy-1$.
c) Sejam a, b, c e d números reais maiores ou iguais a 1. Prove que $(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq 2abcd-1$.

PROBLEMA 5

Um teorema bastante interessante da Geometria é o *teorema de Morley*, descoberto por Frank Morley em 1899. O teorema diz que as retas que trissectam os ângulos internos (dividem em três partes iguais) determinam um triângulo equilátero, como destacado na figura 1:

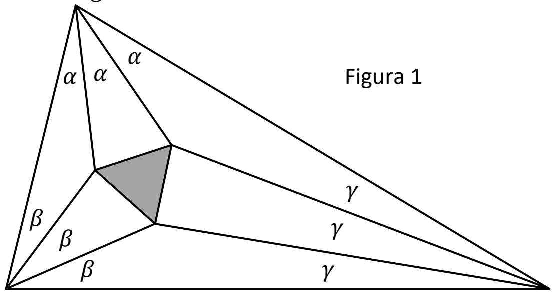


Figura 1

Nesse problema, veremos uma das demonstrações mais engenhosas para esse teorema, dada pelo matemático John H. Conway. A principal ideia é fazer o problema de "dentro para fora". Isto é, começamos com um triângulo equilátero e depois mostramos que conseguimos montar qualquer triângulo a partir dele.

Primeiro, sejam 3α, 3β e 3γ os ângulos internos de um triângulo acutângulo. Para facilitar a notação, dado um ângulo θ, denotaremos $\theta^{+} = \theta + 60°$ e $\theta^{++} = \theta + 120°$.

Agora, comece com o triângulo equilátero.

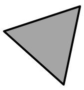


Figura 2

Em seguida, encaixe nele três triângulos com ângulos $\alpha, \beta^{+}, \gamma^{+}$; $\alpha^{+}, \beta, \gamma^{+}$ e $\alpha^{+}, \beta^{+}, \gamma$. Note que eles estão determinados, pois um lado é igual ao lado do triângulo equilátero e os três ângulos são dados.

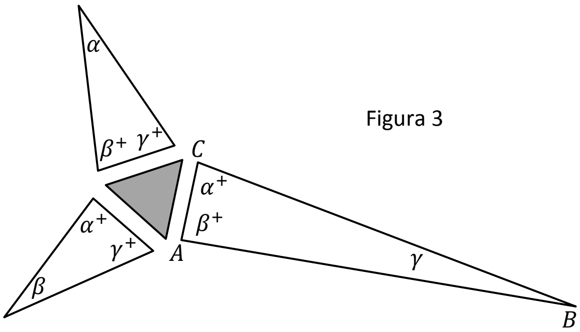


Figura 3

Agora, considere outros três triângulos, com ângulos $\alpha, \beta, \gamma^{++}$; $\alpha, \beta^{++}, \gamma$ e $\alpha^{++}, \beta, \gamma$.

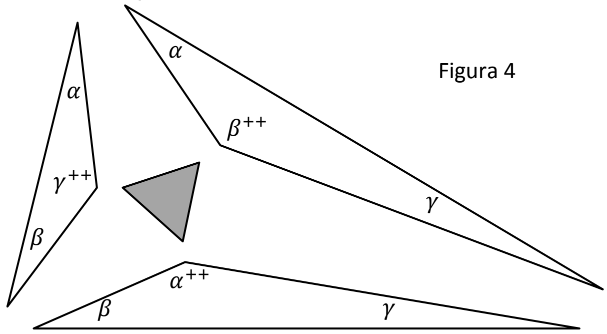


Figura 4

Ainda falta determinar os lados dos três triângulos acima, já que só temos seus ângulos. Para isso, construa triângulos isósceles de ângulos de base α^{+}, β^{+} e γ^{+}, como na figura 5. Os lados congruentes dos triângulos isósceles são iguais ao lado do triângulo equilátero.

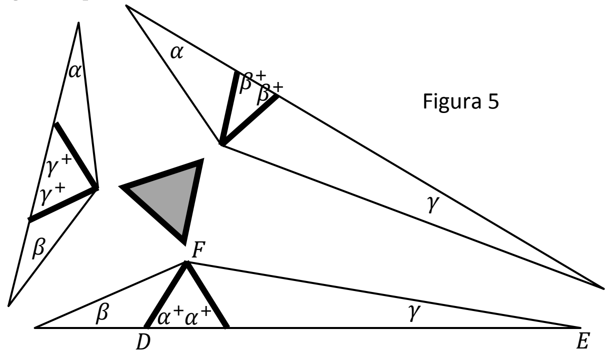


Figura 5

Para completar a demonstração, temos que provar que os sete triângulos que construímos se encaixam perfeitamente. Para isso, faltam dois fatos. É hora de você entrar em ação!

a) Mostre que a soma dos ângulos dos triângulos em torno dos vértices do triângulo equilátero é $360°$.

b) Para mostrar que os lados se encaixam e que podemos montar o triângulo da figura 1, basta verificar que o lado AB indicado na figura 3 é igual ao lado EF indicado na figura 5. Os outros casos são análogos.

Complete a demonstração provando que, de fato, os triângulos ΔABC e ΔFED são congruentes.

XXXVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (11 de agosto de 2012)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Um número inteiro n é chamado *paladino* se a quantidade de divisores positivos de n for igual à quantidade de algarismos de n.

a) Determine todos os números paladinos de três algarismos.

b) Determine um número paladino com seis algarismos menor do que 110000.

Nessa questão, talvez você deseje utilizar o seguinte fato: sendo $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, a fatoração em primos do natural n, $n \geq 2$, o seu número de divisores positivos é dado por $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

PROBLEMA 2

Pode-se demonstrar (veja o problema 5) que $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, em que F_n é o n-ésimo número de Fibonacci. Assim, $F_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, em que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Para os itens a seguir, adote, além da aproximação acima, $\log_{10} 2 \approx 0{,}30103000$ e $\log_{10} \varphi \approx 0{,}20898764$.

a) Determine o número de casas decimais de F_{1000}.

b) Qual é o primeiro algarismo da esquerda para a direita de F_{1000}? Atenção: não estamos pedindo o algarismo das unidades!

PROBLEMA 3

A torre no jogo de xadrez pode mover-se a cada jogada um número qualquer de casas na horizontal ou na vertical.

Nesse problema, vamos estabelecer um método para determinar o número de maneiras de mover a torre da casa $(1;1)$ até a casa $(m;n)$, m e n inteiros positivos, supondo que todos os movimentos são para cima ou para a direita. Denotaremos tal valor $T(m;n)$.

A seguir apresentamos como atribuímos coordenadas às casas de um tabuleiro (figura 1) e o trajeto $(1;1) \to (1;3) \to (1;4) \to (4;4) \to (7;4) \to (7;8) \to (8;8)$ de uma torre (figura 2).

....	....	....	....	....
$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	....
$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	....
$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	....
$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	....

Figura 1

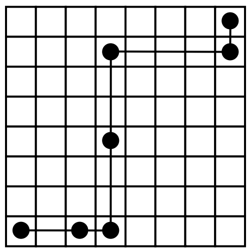


Figura 2

a) Calcule $T(4;1)$. Atenção: a resposta não é 1!

b) Calcule $T(1;n)$, n inteiro positivo.

c) Demonstre que, para $m \geq 2$ e $n \geq 2$:

$$T(m;n) = T(1;n) + T(2;n) + \cdots + T(m-1;n) + T(m;1) + T(m;2) + \cdots + T(m;n-1)$$

d) Determine $T(5;5)$. Você pode utilizar a tabela abaixo como referência.

$T(5;1) =$	$T(5;2) =$	$T(5;3) =$	$T(5;4) =$	$T(5;5) =$ ....
$T(4;1) =$	$T(4;2) =$	$T(4;3) =$	$T(4;4) =$	$T(4;5) =$ ....
$T(3;1) =$	$T(3;2) =$	$T(3;3) =$	$T(3;4) =$	$T(3;5) =$ ....
$T(2;1) =$	$T(2;2) =$	$T(2;3) =$	$T(2;4) =$	$T(2;5) =$ ....
$T(1;1) = 1$	$T(1;2) =$	$T(1;3) =$	$T(1;4) =$	$T(1;5) =$ ....

PROBLEMA 4

Um teorema bastante interessante da Geometria é o *teorema de Morley*, descoberto por Frank Morley em 1899. O teorema diz que as retas que trissectam os ângulos internos (dividem em três partes iguais) determinam um triângulo equilátero, como destacado na figura 1:

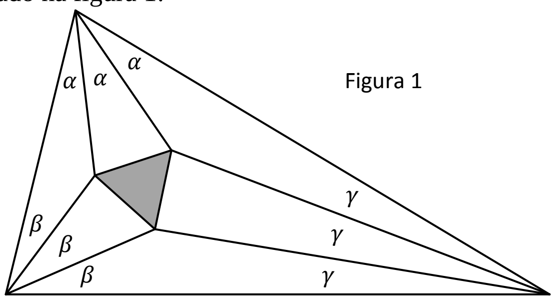


Figura 1

Nesse problema, veremos uma das demonstrações mais engenhosas para esse teorema, dada pelo matemático John H. Conway. A principal ideia é fazer o problema de "dentro para fora". Isto é, começamos com um triângulo equilátero e depois mostramos que conseguimos montar qualquer triângulo a partir dele.

Primeiro, sejam 3α, 3β e 3γ os ângulos internos de um triângulo acutângulo. Para facilitar a notação, dado um ângulo θ, denotaremos $\theta^+ = \theta + 60°$ e $\theta^{++} = \theta + 120°$.

Agora, comece com o triângulo equilátero.

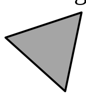


Figura 2

Em seguida, encaixe nele três triângulos com ângulos $\alpha, \beta^+, \gamma^+$; $\alpha^+, \beta, \gamma^+$ e $\alpha^+, \beta^+, \gamma$. Note que eles estão determinados, pois um lado é igual ao lado do triângulo equilátero e os três ângulos são dados.

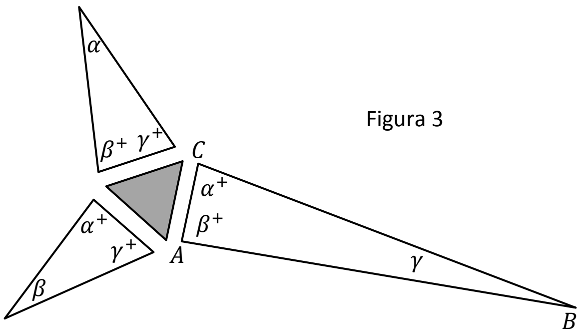


Figura 3

Agora, considere outros três triângulos, com ângulos $\alpha, \beta, \gamma^{++}$; $\alpha, \beta^{++}, \gamma$ e $\alpha^{++}, \beta, \gamma$.

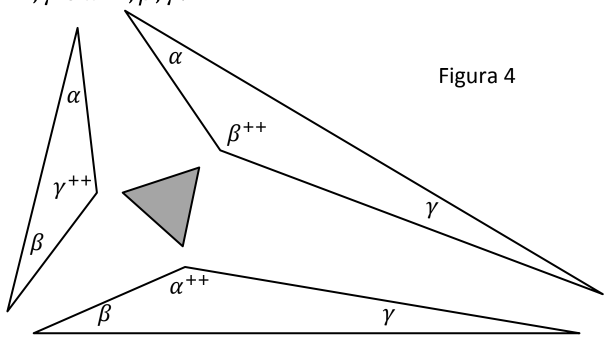


Figura 4

Ainda falta determinar os lados dos três triângulos acima, já que só temos seus ângulos. Para isso, construa triângulos isósceles de ângulos de base α^+, β^+ e γ^+, como na figura 5. Os lados congruentes dos triângulos isósceles são iguais ao lado do triângulo equilátero.

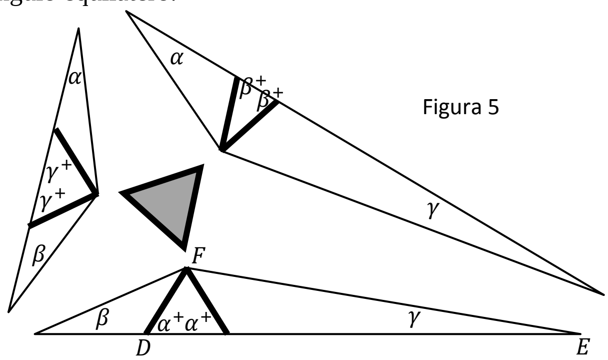


Figura 5

Para completar a demonstração, temos que provar que os sete triângulos que construímos se encaixam perfeitamente. Para isso, faltam dois fatos. É hora de você entrar em ação!

a) Mostre que a soma dos ângulos dos triângulos em torno dos vértices do triângulo equilátero é $360°$.

b) Para mostrar que os lados se encaixam e que podemos montar o triângulo da figura 1, basta verificar que o lado AB indicado na figura 3 é igual ao lado EF indicado na figura 5. Os outros casos são análogos.

Complete a demonstração provando que, de fato, os triângulos ΔABC e ΔFED são congruentes.

PROBLEMA 5

Seja $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ a sequência de Fibonacci, definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 0$. Seja $(A_n)_{n=0}^{\infty}$, tal que $A_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

a) Verifique que $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$. Então conclua que $A_n = F_n$ para todo n natural.

b) Prove que $F_{2k+1}^2 = F_{2k+2}F_{2k} + 1$, $k \geq 0$.

c) Considere a função *arco-tangente de* x, $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \operatorname{tg} y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$.

Demonstre que, para todo $k \geq 1$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2k+1}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2k}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2k+2}}$.

Neste item você pode desejar utilizar a fórmula da tangente da diferença, $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$.

d) Calcule $\operatorname{arctg}\frac{1}{F_1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{F_3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{F_5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2k+1}}$.