XXXV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (13 de agosto de 2011)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Considere os números 2, 3 e 6. Quando somamos todos os produtos de dois desses três números, obtemos um quadrado perfeito: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 36 = 6^2$.

Podemos acrescentar mais um número à sequência dada de modo que a soma de todos os produtos de dois dos agora quatro números continue sendo um quadrado perfeito: basta somar o dobro da raiz quadrada do quadrado perfeito que acabamos de obter à soma de todos os números anteriores. No nosso exemplo, o quarto termo é $2 + 3 + 6 + 2\sqrt{6^2} = 23$ e, de fato, $2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 23 + 3 \cdot 23 + 6 \cdot 23 = 289 = 17^2$. Com isso, obtemos a sequência 2, 3, 6, 23.

Sequências que, como essas, têm como soma dos produtos de seus elementos tomados dois a dois um quadrado perfeito, são chamadas *esnúrficas*.

a) Calcule o próximo número (quinto termo) da sequência esnúrfica descrita acima. Lembre-se de que ele é a soma dos anteriores mais o dobro da raiz quadrada da soma dos produtos de seus elementos tomados dois a dois.

b) Podemos também começar uma sequência esnúrfica com apenas dois números cujo produto seja um quadrado perfeito. Por exemplo, 2 e 8 cujo produto é $16 = 4^2$. Calcule o próximo número (terceiro termo) dessa sequência.

c) Calcule o quociente entre o quinto e o quarto termos da sequência esnúrfica iniciada com 2 e 8.

PROBLEMA 2

Os carros equipados com motor flex podem ser abastecidos com etanol, com gasolina ou com uma mistura dos dois. Neste problema vamos discutir qual é a opção economicamente mais vantajosa se o proprietário deseja abastecer somente com gasolina ou somente com etanol.

Sabe-se que o poder calorífico do motor a etanol é 70% do poder calorífico do motor a gasolina. Em outras palavras, o motor a etanol tem um rendimento 30% menor do que o motor a gasolina. Por exemplo, um carro flex que faz 10 km com um litro de gasolina faz 7 km com um litro de etanol.

Assim, a utilização do etanol como combustível é a opção mais econômica quando o seu preço é, no máximo, 70% do preço da gasolina.

Veja os preços médios desses combustíveis em 5 cidades brasileiras, no início deste mês. Como é usual, os preços são dados até milésimos de real.

Cidade	Preço do litro de Gasolina	Preço do litro de Etanol
Cruzeiro do Sul (Acre)	R$3,359	R$2,932
São Paulo (São Paulo)	R$2,665	R$1,810
Balneário Camboriú (Santa Catarina)	R$2,640	R$2,218
Catalão (Goiás)	R$2,892	R$1,880
Fortaleza (Ceará)	R$2,673	R$2,147

Fonte: http://www.anp.gov.br/preco

a) Suponha que um carro equipado com motor flex faça 9,1 km por litro de etanol. Nas condições do problema, quantos litros de gasolina são necessários para o carro percorrer um trajeto de 208 km?

b) Em quais cidades da tabela acima é mais vantajoso encher o tanque com etanol?

c) Henrique deseja ir de São Paulo até Balneário Camboriú com o seu carro flex. Para ir, ele encherá o tanque em São Paulo utilizando a opção mais econômica e, para voltar, encherá o tanque em Balneário Camboriú também com a opção mais econômica. Considerando que a distância entre as duas cidades é 619 km e que o carro de Henrique faz 15,6 km com um litro de gasolina, calcule quanto ele gastará com o combustível para a sua viagem de ida e volta.

PROBLEMA 3

a) Foram somados, utilizando o algoritmo usual da adição (aquele que você conhece: tem o "vai um" quando é necessário), dois números naturais de 4 algarismos obtendo-se o resultado 19981.

Sabendo-se que o "vai um" ocorreu três vezes nessa soma, determine quais são os dois números.

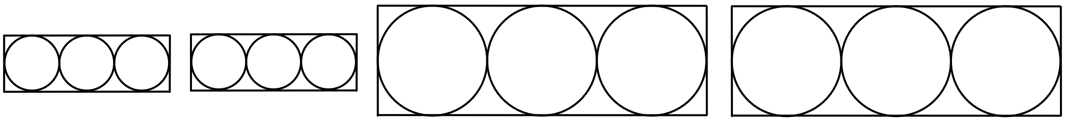
b) Considere agora dois números naturais de 12 algarismos cuja soma é 1999990999999.

É possível determinar quantas vezes ocorreu o "vai um" na conta, apenas a partir dessas informações? Caso seja possível, diga quantas vezes ocorreu o "vai um".

Esclarecimento: Contamos como "vai um" todas as operações intermediárias cujo resultado é maior ou igual a 10. Por exemplo, em 4971 + 5742 o "vai um" ocorre três vezes.

PROBLEMA 4

Os Esnurfes (conheça mais sobre esses gigantes seres amarelos na prova do Nível Gama) possuem um jogo, composto de 4 peças retangulares, duas grandes e duas pequenas, com três circunferências inscritas em cada uma.



O jogo consiste em montar um polígono com um determinado perímetro utilizando as 4 peças. Na montagem, as peças devem encostar, total ou parcialmente, os seus lados, de modo que a intersecção entre elas seja um segmento de reta. Além disso, não é permitido sobrepor peças e nem formar "buracos".

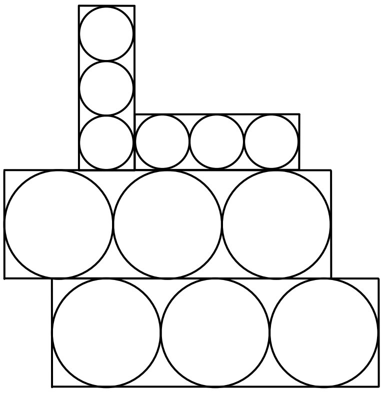


Figura 1

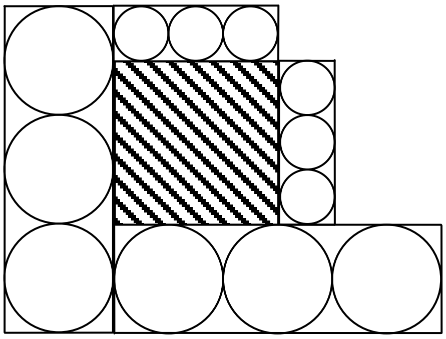
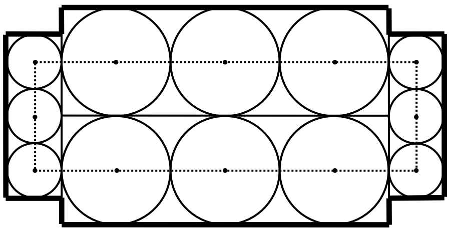


Figura 2

A figura 1 está de acordo com as regras. A figura 2 não obedece duas regras: possui um "buraco" (destacado na figura) e as duas peças pequenas se tocam em um único ponto.

a) As 4 peças foram colocadas formando um dodecágono (polígono de 12 lados, em destaque) cujos lados são paralelos a algum lado do retângulo que contém os centros de todas as circunferências.

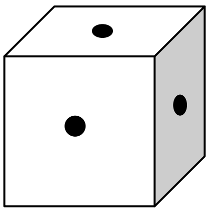


O raio das circunferências maiores é dobro do raio das menores. Sabendo que o perímetro (soma de todos os lados) do retângulo que contém os centros das circunferências é 36 cm, determine os raios das circunferências e o perímetro do dodecágono.

b) Forme um octógono (polígono de 8 lados) com perímetro 72 cm. Você deve desenhar as 4 peças e indicar as medidas de cada um dos oito lados do polígono.

Ah, não é necessário desenhar as circunferências dentro dos retângulos.

PROBLEMA 5



Temos um cubo de aresta 4 cm, com 3 faces marcadas com ●.

a) Vamos cobrir essas 3 faces marcadas com cubos de aresta 2 cm para formar um cubo de aresta 6 cm. Quantos cubos de aresta 2 cm são necessários?

b) Agora, vamos obter um cubo de aresta 7 cm a partir do cubo de aresta 6 cm que acabamos de formar. Para isso, cobriremos as três faces formadas apenas por cubos de aresta 2 cm com cubos de aresta 1 cm. Quantos cubos de aresta 1 cm são necessários?

c) Nos itens anteriores, cobrimos com cubos de aresta 2 cm e 1 cm as faces marcadas do cubo de aresta 4 cm para obter o cubo de aresta 7 cm.

Vamos agora acrescentar apenas cubos de arestas 3 cm e 1 cm (não utilizaremos cubos de aresta 2 cm) ao cubo original para obter um cubo de aresta 7 cm. Qual é o maior número de cubos de aresta 3 cm que podemos utilizar? Não se esqueça de que você deve justificar a sua resposta.

XXXV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (13 de agosto de 2011)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Os carros equipados com motor flex podem ser abastecidos com etanol, com gasolina ou com uma mistura dos dois. Neste problema vamos discutir qual é a opção economicamente mais vantajosa se o proprietário deseja abastecer somente com um dos combustíveis.

Sabe-se que o poder calorífico do motor a etanol é 70% do poder calorífico do motor a gasolina. Ou seja, o motor a etanol tem rendimento 30% menor do que o motor a gasolina. Por exemplo, um carro flex que faz 10 km por litro de gasolina faz 7 km por litro de etanol.

Assim, a utilização do etanol como combustível é a opção mais econômica quando o seu preço é, no máximo, 70% do preço da gasolina.

Veja os preços médios dos combustíveis em 5 cidades brasileiras, no início do mês. Como usual, os preços são dados até milésimos de real.

Cidade	Preço do litro de Gasolina	Preço do litro de Etanol
Cruzeiro do Sul (Acre)	R$3,359	R$2,932
São Paulo (São Paulo)	R$2,665	R$1,810
Balneário Camboriú (Santa Catarina)	R$2,640	R$2,218
Catalão (Goiás)	R$2,892	R$1,880
Fortaleza (Ceará)	R$2,673	R$2,147

Fonte: http://www.anp.gov.br/preco

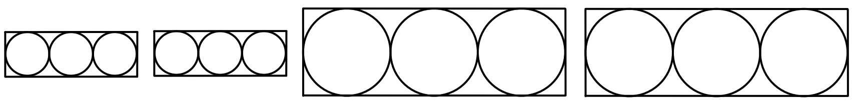
a) Suponha que um carro equipado com motor flex faça 9,1 km por litro de etanol. Nas condições do problema, quantos litros de gasolina são necessários para o carro percorrer um trajeto de 208 km?

b) Em quais cidades da tabela acima é mais vantajoso encher o tanque com etanol?

c) Henrique deseja ir de São Paulo até Balneário Camboriú com o seu carro flex. Para ir, ele encherá o tanque em São Paulo utilizando a opção mais econômica e, para voltar, encherá o tanque em Balneário Camboriú também com a opção mais econômica. Considerando que a distância entre as duas cidades é 619 km e que o carro de Henrique faz 15,6 km com um litro de gasolina, calcule quanto ele gastará com o combustível para a sua viagem de ida e volta.

PROBLEMA 2

Os Esnurfes (conheça mais sobre esses gigantes seres amarelos na prova do Nível Gama) possuem um jogo, composto de 4 peças retangulares, duas grandes e duas pequenas, com três circunferências inscritas em cada uma.



O jogo consiste em montar um polígono com um determinado perímetro utilizando as 4 peças. Na montagem, as peças devem encostar, total ou parcialmente, os seus lados, de modo que a intersecção entre elas seja um segmento de reta. Além disso, não é permitido sobrepor peças e nem formar "buracos".

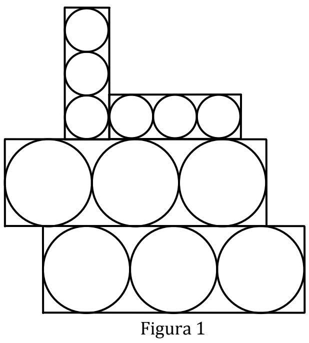


Figura 1

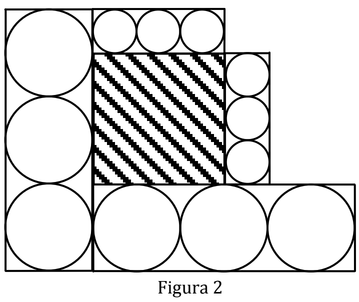
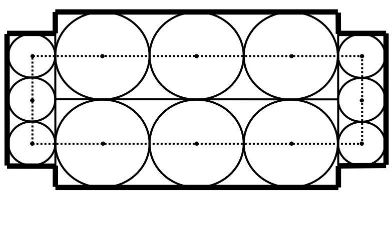


Figura 2

A figura 1 está de acordo com as regras. A figura 2 não obedece duas regras: possui um "buraco" (destacado na figura) e as duas peças pequenas se tocam em um único ponto.

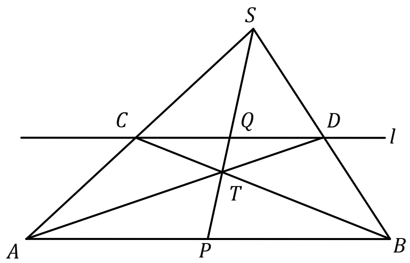
a) As 4 peças foram colocadas formando um dodecágono (polígono de 12 lados, em destaque) cujos lados são paralelos a algum lado do retângulo que contém os centros de todas as circunferências.



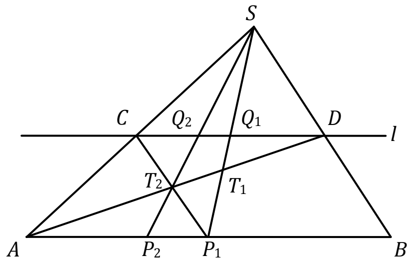
O raio das circunferências maiores é dobro do raio das menores. Sabendo que o perímetro (soma de todos os lados) do retângulo que contém os centros das circunferências é 36 cm, determine os raios das circunferências e o perímetro do dodecágono.
b) Forme um dodecágono com perímetro 56 cm. Você deve desenhar as 4 peças e indicar as medidas de cada um dos doze lados do polígono.
Ah, não é necessário desenhar as circunferências dentro dos retângulos.

PROBLEMA 3
a) Foram somados, utilizando o algoritmo usual da adição (aquele que você conhece: tem o "vai um" quando é necessário), dois números naturais de 4 algarismos obtendo-se o resultado 19981.
Sabendo-se que o "vai um" ocorreu três vezes nessa soma, determine quais são os dois números.
b) Considere agora dois números naturais de 12 algarismos cuja soma é 1999990999999.
É possível determinar quantas vezes ocorreu o "vai um" na conta, apenas a partir dessas informações? Caso seja possível, diga quantas vezes ocorreu o "vai um".
Esclarecimento: Contamos como "vai um" todas as operações intermediárias cujo resultado é maior ou igual a 10. Por exemplo, em 4971 + 5742 o "vai um" ocorre três vezes.

PROBLEMA 4
O estudo das construções com régua e compasso foi fundamental para o desenvolvimento da Matemática. O fato de certas construções serem impossíveis – como a quadratura do círculo: construir o lado de um quadrado com a mesma área de um círculo dado – trouxe um entendimento mais profundo da Rainha das Ciências.
Outro ponto que surpreende bastante no estudo dessas construções é que, sob certas condições, podemos fazê-las apenas com uma régua (que não possua as marcações usuais de medida)!
Por exemplo, dados um segmento $\overline{AB}$ e uma reta l com $\overline{AB} \parallel l$, a construção mostrada é uma maneira de obter um ponto P tal que $AP = \frac{1}{2}AB$ apenas com uma régua.



Porém a nossa questão é sobre uma construção mais impressionante. Vamos mostrar que na figura a seguir, em que P_1 é o ponto médio de $\overline{AB}$, P_2 é tal que $AP_2 = \frac{1}{3}AB$. Assim, é possível dividir em três partes iguais um segmento desenhado sobre uma linha de uma folha pautada apenas com uma régua.



a) Mostre que $\Delta CQ_2T_2 \sim \Delta P_1P_2T_2$. Nesse item, você pode querer utilizar o fato de que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os seus ângulos correspondentes são iguais.
b) A partir da semelhança obtida acima e da semelhança entre ΔCT_2D e ΔP_1T_2A (essa você não precisa demonstrar), prove que:

$$\frac{P_1P_2}{CQ_2} = \frac{AP_1}{CD} \qquad (*)$$

Nesse item, você pode querer utilizar o fato de que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os seus lados correspondentes são proporcionais.
c) De $\Delta SAP_2 \sim \Delta SCQ_2$ e $\Delta SAB \sim \Delta SCD$ (você não precisa demonstrar tais semelhanças), segue que:

$$\frac{AP_2}{CQ_2} = \frac{AB}{CD} \qquad (**)$$

A partir de $(*)$ e $(**)$, conclua a demonstração. Ou seja, mostre que:

$$AP_2 = \frac{1}{3}AB$$

PROBLEMA 5
Considere os números 2, 3 e 6. Quando somamos todos os produtos de dois desses três números, obtemos um quadrado perfeito: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 36 = 6^2$.
Podemos acrescentar mais um número à sequência dada de modo que a soma de todos os produtos de dois dos agora quatro números continue sendo um quadrado perfeito: basta somar o dobro da raiz quadrada do quadrado perfeito que acabamos de obter à soma de todos os números anteriores. No nosso exemplo, o quarto termo é $2 + 3 + 6 + 2\sqrt{6^2} = 23$ e, de fato, $2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 23 + 3 \cdot 23 + 6 \cdot 23 = 289 = 17^2$. Com isso, obtemos a sequência 2, 3, 6, 23.
Sequências que, como essas, têm como soma dos produtos de seus elementos tomados dois a dois um quadrado perfeito, são chamadas *esnúrficas*.
a) Calcule o próximo número (quinto termo) da sequência esnúrfica descrita acima. Lembre-se de que ele é a soma dos anteriores mais o dobro da raiz quadrada da soma dos produtos de seus elementos tomados dois a dois.
b) Podemos também começar uma sequência esnúrfica com apenas dois números cujo produto seja um quadrado perfeito. Por exemplo, 1 e t^2, com t inteiro positivo. Mostre que próximo número (terceiro termo) dessa sequência é um quadrado perfeito.
c) Seja S a soma dos números de uma sequência esnúrfica de três termos e seja P o produto de seus elementos tomados dois a dois. Isto é, sendo a sequência formada pelos números a, b e c, então $S = a + b + c$ e $P = ab + ac + bc$. Escreva em termos de S e P:

c.1) o próximo número (quarto termo) d da sequência esnúrfica

c.2) a soma dos produtos de seus quatro elementos tomados dois a dois: $ab + ac + bc + ad + bd + cd$.

d) Calcule o quociente entre o quinto e o quarto termos da sequência esnúrfica iniciada com 1 e t^2.

XXXV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (13 de agosto de 2011)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

a) Resolva a inequação, $U = R$:

$$\frac{2x+4}{4-x} > 0$$

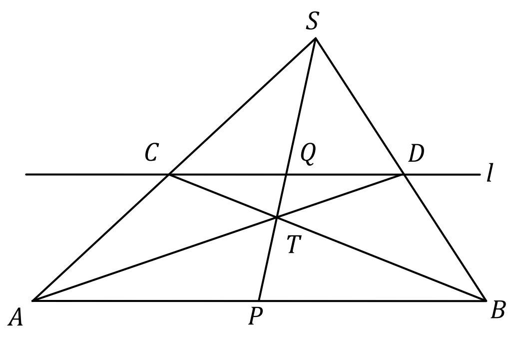
b) Encontre as soluções inteiras da equação $2^x(4-x) = 2x+4$.
Nesse item você pode querer utilizar que a função exponencial $f(x) = 2^x$, $f\colon R \to R$, assume apenas valores positivos.

PROBLEMA 2

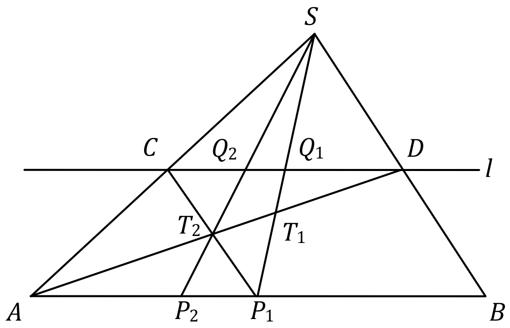
a) Foram somados, utilizando o algoritmo usual da adição (aquele que você conhece: tem o “vai um” quando é necessário), dois números naturais de 4 algarismos obtendo-se o resultado 19981.
Sabendo-se que o “vai um” ocorreu três vezes nessa soma, determine quais são os dois números.
b) Considere agora dois números naturais de 12 algarismos cuja soma é 1999990999999.
É possível determinar quantas vezes ocorreu o “vai um” na conta, apenas a partir dessas informações? Caso seja possível, diga quantas vezes ocorreu o “vai um”.
Esclarecimento: Contamos como “vai um” todas as operações intermediárias cujo resultado é maior ou igual a 10. Por exemplo, em 4971 + 5742 o “vai um” ocorre três vezes.

PROBLEMA 3

O estudo das construções com régua e compasso foi fundamental para o desenvolvimento da Matemática. O fato de certas construções serem impossíveis – como a quadratura do círculo: construir o lado de um quadrado com a mesma área de um círculo dado – trouxe um entendimento mais profundo da Rainha das Ciências.
Outro ponto que surpreende bastante no estudo dessas construções é que, sob certas condições, podemos fazê-las apenas com uma régua (que não possua as marcações usuais de medida)!
Por exemplo, dados um segmento $\overline{AB}$ e uma reta l com $\overline{AB} \parallel l$, a construção mostrada é uma maneira de obter um ponto P tal que $AP = \frac{1}{2}AB$ apenas com uma régua.



Porém a nossa questão é sobre uma construção mais impressionante. Vamos mostrar que na figura a seguir, em que P_1 é o ponto médio de $\overline{AB}$, P_2 é tal que $AP_2 = \frac{1}{3}AB$. Assim, é possível dividir em três partes iguais um segmento desenhado sobre uma linha de uma folha pautada apenas com uma régua.



a) Mostre que $\Delta CQ_2T_2 \sim \Delta P_1P_2T_2$. Nesse item, você pode querer utilizar o fato de que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os seus ângulos correspondentes são iguais.
b) A partir da semelhança obtida acima e da semelhança entre ΔCT_2D e ΔP_1T_2A (essa você não precisa demonstrar), prove que:

$$\frac{P_1P_2}{CQ_2} = \frac{AP_1}{CD} \qquad (*)$$

Nesse item, você pode querer utilizar o fato de que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os seus lados correspondentes são proporcionais.
c) De $\Delta SAP_2 \sim \Delta SCQ_2$ e $\Delta SAB \sim \Delta SCD$ (você não precisa demonstrar tais semelhanças), segue que:

$$\frac{AP_2}{CQ_2} = \frac{AB}{CD} \qquad (**)$$

A partir de $(*)$ e $(**)$, conclua a demonstração. Ou seja, mostre que:

$$AP_2 = \frac{1}{3}AB$$

PROBLEMA 4

O país dos Esnurfes tem 11 cidades (observe que não são os seres azuis que atualmente estrelam uma aventura nos cinemas e vivem em uma única vila). Esses enormes seres amarelos (viu, não são eles, os “azulzinhos”) preocupam-se bastante com os transportes de modo que cada par de cidades distintas é servido por uma linha de ônibus.
A capital do país é uma bela cidade chamada carinhosamente pelos habitantes de “La Esnurfete” e o seu centro industrial é a não tão querida e nem tão bela cidade de Garganela. Eles valorizam tanto os transportes que é um passatempo usual ir de La Esnurfete até Garganela andando exatamente 4 vezes de ônibus, sendo que, no meio do passeio, o esnurfe pode até passar por La Esnurfete e Garganela. (Estranho? Esses esnurfes são loucos!)
Nesta questão determinaremos de quantas maneiras podemos nos divertir “esnurficamente”.
a) De quantas maneiras podemos partir da capital e andar 4 vezes de ônibus, não importando a cidade em que terminamos o nosso passeio?
b) Seja α_n o número de maneiras de ir da capital até Garganela tomando ônibus n vezes. Prove que $\alpha_{k+1} + \alpha_k = 10^k$.
Recomendação: não tente calcular separadamente as expressões para α_{k+1} e α_k. Essa é a parte mais difícil, que será feita no próximo item.
c) Resolva o problema, isto é, calcule α_4.

PROBLEMA 5

Os polinômios mônicos de Chebyshev $f_n(x)$, n inteiro positivo, são definidos pela equação $f_n(2 \cdot \cos\alpha) = 2 \cdot \cos(n\alpha)$
Por exemplo, $f_1(x) = x$ e, como $2 \cdot \cos 2x = (2\cos x)^2 - 2$, $f_2(x) = x^2 - 2$.
Eles têm a propriedade de, considerando o intervalo $[-2; 2]$, serem os polinômios com o menor desvio de zero. Ou seja, sendo a sua imagem o intervalo $[m; M]$, eles possuem o menor valor possível para o maior dentre os valores de $|m|$ e $|M|$.
É possível demonstrar que, sendo $T_n(x) = \frac{f_n(2x)}{2}$, $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ e, para $|x| > 1$, $T_n(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$.
a) Utilizando a definição, determine o polinômio $f_3(x)$.
Nesse item você pode querer utilizar que $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$.
b) Prove que $f_{n+1}(x) = x \cdot f_n(x) - f_{n-1}(x)$. Essa igualdade garante que as funções f_n são, de fato, polinômios.
Nesse item você pode querer utilizar que $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.
c) Calcule o termo independente e o coeficiente de x no desenvolvimento de $T_{11}(x)$. Mostre, então, que $\cos\frac{16}{33}\pi \cong \frac{1}{22}$.
Nesse item você pode querer utilizar que, para valores próximos de zero, podemos determinar uma ótima aproximação para o valor numérico de um polinômio apenas a partir de seu termo independente e de seu termo em x.