XXVIII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Primeira Fase (14 de Agosto de 2004)

Nível α ($5^{\underline{a}}$ e $6^{\underline{a}}$ séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

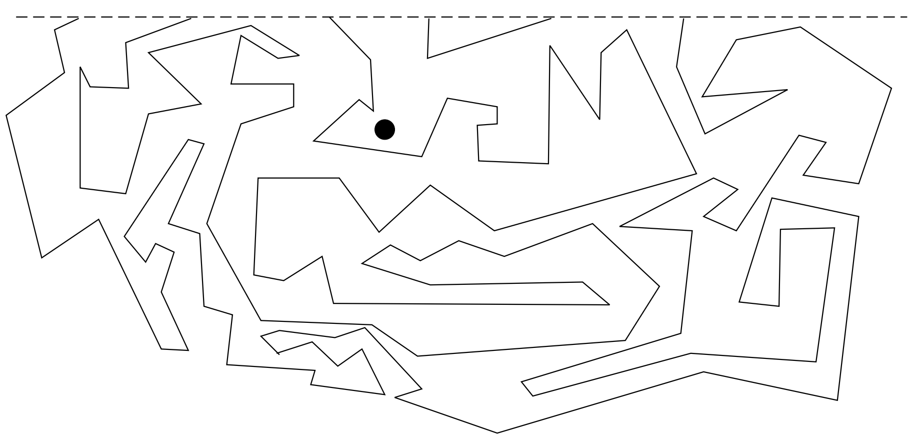
Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Nas *Folhas de Respostas*, coloque todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas apenas nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

A seguir, temos a parte de baixo de uma figura.



A figura delimita uma região. O círculo preto está dentro ou fora dessa região?

Lembre-se: você deve justificar sua resposta!

▸ PROBLEMA 2

Arnaldo e Bernaldo brincavam com o seu robô, o Roboaldo. Ele anda num campo plano, sempre para a frente e em linhas retas. Arnaldo e Bernaldo programaram Roboaldo para executar as seguintes instruções:

(1)	A partir de um ponto P, percorra 40 m;
(2)	Vire 90° para a direita e percorra 15 m;
(3)	Vire 90° para a esquerda e percorra 25 m;
(4)	Vire 90° para a esquerda e percorra 8 m;
(5)	Vire 90° para a direita e percorra 2 m;
(6)	Vire 90° para a direita e percorra 30 m;
(7)	Vire 90° para a direita e percorra 67 m;
(8)	Dirija-se ao ponto P.

(a) Faça uma figura que represente o trajeto percorrido pelo robô.

(b) Quantos metros o robô percorre ao executar a instrução (8)?

▸ PROBLEMA 3

Quando você recebe mensagens via Internet, você consegue ler a mensagem correta porque existem mecanismos que corrigem eventuais erros de transmissão.

Infelizmente, na Esmeralândia não existem tais mecanismos. Arnaldo sabia que Bernaldo passava férias na Esmeralândia. Assim, resolveu enviar a mesma mensagem cinco vezes, via Internet. Veja como Bernaldo recebeu as mensagens:

```
Vstoe em Sbo Xcuno e vos prrbicxpar du elimpíhsa de Gatemotica.
Estou ym weuco nercoyo, mas sea nue possd resokven anguns pafalpmas e aprendei noosas cqm a pdovs.
Depnis mando nptogljs.  Echau.
```

```
Nstdu vd Cão Pluto k qoe pjesabcler da ylemmíkdf de Oatqbátick.
Esjbg us pquco oervtwo, wai sei que polsh eesolvrg algues peobmemas e xprender covoag com a pgova.
Deaois mnnov nothcsas.  Tcmau.
```

```
Entde eb São Padlo e qou pamticvfar dn olicpívdw de Matelátwca.
Eseou um peuco nerroso, mog sei qum qosso rvnomvvr vwguns irlblemos h mpmender coisas com a pwola.
Depmis mando votíyias.  Tcuau.
```

```
Ebgob ey São Gauox e jou pavuicipar da olxmdíxqm de Eatnmáuina.
Istrm um pouco nerqosu, bas eei qde pissc resolter aiguwr proxxemas e aprender caisaw cam w prork.
Kupris waodn nhtícias.  Jchyc.
```

```
Tstfu df São Laxlo e vou paroicilav da olsmpíacy de Mapemgdpoa.
Eitou um pluoo nerwono, was sei que pfsso rbvolver alguns prublamas e aptehder tjvsas cem a prova.
Dhvovs mando norícils.  Kchau.
```

Bernaldo, com as cinco mensagens, conseguiu descobrir o que Arnaldo queria dizer. Agora é sua vez! Descubra a mensagem de Arnaldo.

Observação: Arnaldo conhece bem o nosso idioma e não comete erros de digitação.

▸ PROBLEMA 4

Num folheto de propaganda, uma montadora explica que um veículo equipado com a tecnologia *flex fuel*, bicombustível, pode usar álcool, gasolina, ou uma mistura de álcool e gasolina em qualquer proporção. Testes realizados com cinco proporções apresentaram os seguintes desempenhos:

Proporção de combustível		**Consumo**
Álcool	*Gasolina*	**(km por litro)**
—	100%	14
40%	60%	13,2
50%	50%	11,8
70%	30%	10
100%	—	8

Considere que o preço do litro de álcool é R$1,00 e o preço do litro de gasolina é R$2,00.

Numa viagem de 400 km com esse veículo:

(a) Quantos reais seriam gastos se o veículo fosse abastecido somente com álcool?

(b) Qual das cinco proporções apresentadas possibilita o menor gasto com combustível?

▸ PROBLEMA 5

Você conhece o critério de divisibilidade por 11? Veja só:

- O número 93918 é divisível por 11 pois $8 - 1 + 9 - 3 + 9 = 22$ e 22 é divisível por 11;
- O número 4851 é divisível por 11 pois $1 - 5 + 8 - 4 = 0$ e 0 é divisível por 11;
- Por outro lado, o número 63502 não é divisível por 11 pois $2 - 0 + 5 - 3 + 6 = 10$ e 10 não é divisível por 11.

(a) Qual é o menor número natural de cinco algarismos que é divisível por 11?

(b) Qual é o menor número natural de cinco algarismos distintos que é divisível por 11?

XXVIII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Primeira Fase (14 de Agosto de 2004)

Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Nas *Folhas de Respostas*, coloque todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas apenas nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Arnaldo e Bernaldo brincavam com o seu robô, o Roboaldo. Ele anda num campo plano, sempre para a frente e em linhas retas. Arnaldo e Bernaldo programaram Roboaldo para executar as seguintes instruções:

(1)	A partir de um ponto P, percorra 40 m;
(2)	Vire 90° para a direita e percorra 15 m;
(3)	Vire 90° para a esquerda e percorra 25 m;
(4)	Vire 90° para a esquerda e percorra 8 m;
(5)	Vire 90° para a direita e percorra 2 m;
(6)	Vire 90° para a direita e percorra 30 m;
(7)	Vire 90° para a direita e percorra 67 m;
(8)	Dirija-se ao ponto P.

(a) Faça uma figura que represente o trajeto percorrido pelo robô.

(b) Quantos metros o robô percorre ao executar a instrução (8)?

▸ PROBLEMA 2

Num folheto de propaganda, uma montadora explica que um veículo equipado com a tecnologia *flex fuel*, bicombustível, pode usar álcool, gasolina, ou uma mistura de álcool e gasolina em qualquer proporção. Testes realizados com cinco proporções apresentaram os seguintes desempenhos:

Proporção de combustível		**Consumo**
Álcool	*Gasolina*	**(km por litro)**
—	100%	14
40%	60%	13,2
50%	50%	11,8
70%	30%	10
100%	—	8

Considere que o preço do litro de álcool é R\$1,00 e o preço do litro de gasolina é R\$2,00.

Numa viagem de 400 km com esse veículo:

(a) Quantos reais seriam gastos se o veículo fosse abastecido somente com álcool?

(b) Qual das cinco proporções apresentadas possibilita o menor gasto com combustível?

PROBLEMA 3

Neste exercício, estudaremos o *critério de divisibilidade por* 19:

> Seja n um número natural e $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)$ sua representação decimal, isto é, a_k, a_{k-1}, ..., a_1 e a_0 são os algarismos de n. Então
>
> $$n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0) \quad \text{é divisível por } 19$$
>
> se, e somente se,
>
> $$2a_0 + (a_k a_{k-1} \dots a_1) \quad \text{é divisível por } 19.$$
>
> Ou seja, n é divisível por 19 se, e somente se, a soma do dobro do algarismo das unidades de n com o número obtido tirando o algarismo das unidades de n é divisível por 19.

Por exemplo, considere $n = 1406$. Este número é divisível por 19 se, e somente se, $2 \cdot 6 + 140 = 152$ é divisível por 19. Já 152 é divisível por 19 se, e somente se, $2 \cdot 2 + 15 = 19$ é divisível por 19, o que é verdade. Assim, 1406 é divisível por 19.

(a) O número 14082004 é divisível por 19? Lembre-se: você deve justificar sua resposta!

(b) Mostre que $8\underbrace{444\dots444}_{2004 \text{ quatros}}55$ é divisível por 19.

PROBLEMA 4

(a) Simplifique a expressão $(3n)^2 + (4n-1)^2 - (5n-1)^2$.

(b) Simplificando a expressão $B = (3n+2)^2 + (4n)^2 - (5n+1)^2$, mostre que se n é inteiro, então B é um número ímpar.

(c) Observe:

$$1 = 1^2 + 1^2 - 1^2$$
$$2 = 3^2 + 3^2 - 4^2$$
$$3 = 4^2 + 6^2 - 7^2$$

Encontre inteiros positivos a, b, c, com $a \leqslant b \leqslant c$, tais que $5 = a^2 + b^2 - c^2$.

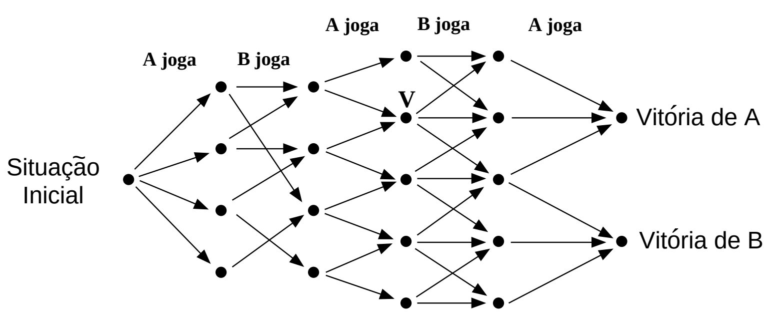
(d) Seja k um inteiro positivo. Prove que existem inteiros positivos a, b, c, com $a \leqslant b \leqslant c$, tais que $k = a^2 + b^2 - c^2$.

PROBLEMA 5

Muitos jogos, entre eles, xadrez, damas e jogo-da-velha, podem ter suas partidas representadas por um diagrama de árvore. Cada ponto num diagrama de árvore corresponde a uma situação no jogo. Ligamos uma flecha de um ponto P para outro ponto Q quando, a partir da situação representada por P, podemos chegar à situação representada por Q através de uma jogada.

Por exemplo, no jogo-da-velha, um ponto é uma disposição de $\times$'s e $\circ$'s no tabuleiro. Representa-se também por um ponto a situação inicial, na qual o tabuleiro está vazio. Uma flecha corresponde a colocar um $\times$ ou $\circ$.

Um jogo que acaba de ser criado, o *Betadrez*, cujos jogadores são A e B, foi estudado e chegou-se ao seguinte diagrama de árvore, que representa todas as possíveis partidas. O jogador A faz a primeira jogada; em seguida, joga B; depois joga A e assim por diante.



(a) Mostre que se o jogo chegar à situação representada pelo ponto V, então A vence.

(b) Prove que A tem uma estratégia vencedora, ou seja, que A consegue sempre uma seqüência de jogadas que o leva à vitória, não importando as jogadas de B.

XXVIII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Primeira Fase (14 de Agosto de 2004)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Nas *Folhas de Respostas*, coloque todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas apenas nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Neste exercício, estudaremos o *critério de divisibilidade por* 19:

> Seja n um número natural e $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)$ sua representação decimal, isto é, a_k, a_{k-1}, …, a_1 e a_0 são os algarismos de n. Então
>
> $$n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0) \quad \text{é divisível por 19}$$
>
> se, e somente se,
>
> $$2a_0 + (a_k a_{k-1} \dots a_1) \quad \text{é divisível por 19.}$$
>
> Ou seja, n é divisível por 19 se, e somente se, a soma do dobro do algarismo das unidades de n com o número obtido tirando o algarismo das unidades de n é divisível por 19.

Por exemplo, considere $n = 1406$. Este número é divisível por 19 se, e somente se, $2 \cdot 6 + 140 = 152$ é divisível por 19. Já 152 é divisível por 19 se, e somente se, $2 \cdot 2 + 15 = 19$ é divisível por 19, o que é verdade. Assim, 1406 é divisível por 19.

(a) O número 14082004 é divisível por 19? Lembre-se: você deve justificar sua resposta!

(b) Mostre que $8\underbrace{444\dots444}_{2004 \text{ quatros}}55$ é divisível por 19.

▸ PROBLEMA 2

No Ensino Fundamental e no Ensino Médio estudamos a *Geometria Euclidiana*, porém existem outros "tipos" de geometrias que também têm grande importância para a Matemática e para as outras ciências.

Uma delas é a *Geometria Hiperbólica*, na qual, além das funções trigonométricas usuais, são estudadas as *funções hiperbólicas*. Definiremos algumas delas a seguir:

- O *seno hiperbólico de* x é definido por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- O *co-seno hiperbólico de* x é definido por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

As funções hiperbólicas têm uma série de propriedades análogas às propriedades das funções trigonométricas homônimas.

(a) Utilizando as definições dadas, prove que $2\operatorname{senh}(x)\cosh(x) = \operatorname{senh}(2x)$.

(b) Sabendo-se que o co-seno hiperbólico da medida hiperbólica de um lado de um triângulo hiperbólico (sim, tudo isso existe!!) é $\sqrt{2}$, determine a medida hiperbólica desse lado. As medidas hiperbólicas são sempre positivas.

▸ PROBLEMA 3

(a) Sabendo que o número e é aproximadamente 2,72, mostre que $e^6 < 6!$.

(b) Seja n natural, $n \geqslant 6$. Demonstre que $e^n < n!$.

Observação: $n!$ *é o produto dos números naturais de* 1 *até* n*, ou seja,* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

▶ **PROBLEMA 4**

Para n, k inteiros, seja $\left\{ {n \atop k} \right\}$ o número de maneiras de particionar um conjunto de n elementos em k subconjuntos disjuntos não vazios. Chamamos $\left\{ {n \atop k} \right\}$ de *número de Stirling de segunda espécie*.

Por exemplo, $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$ é o total de partições de $\{1; 2; 3; 4\}$ em 2 subconjuntos não vazios, a saber:

$$\{\{1\}; \{2;3;4\}\}, \quad \{\{1;2\}; \{3;4\}\}, \quad \{\{1;3\}; \{2;4\}\}, \quad \{\{1;4\}; \{2;3\}\},$$
$$\{\{1;2;3\}; \{4\}\}, \quad \{\{1;2;4\}; \{3\}\}, \quad \{\{1;3;4\}; \{2\}\}$$

(a) Calcule $\left\{ {5 \atop 4} \right\}$.

(b) Demonstre que, para $n \geqslant k \geqslant 1$,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

▶ **PROBLEMA 5**

(a) Se $\operatorname{tg} \theta = m$, sendo $-90° < \theta < 90°$, quanto vale $\cos \theta$?

(b) Sejam $x = \operatorname{tg} \alpha$ e $y = \operatorname{tg} \beta$. Escreva a expressão $\dfrac{1 + xy}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{y^2+1}}$ em função de α e β, simplificando-a.

(c) Dados quatro números reais, prove que existem dois dentre esses números, x e y, tais que $\dfrac{1 + xy}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{y^2+1}} > \dfrac{1}{2}$.

Observação: Você pode querer utilizar alguma das fórmulas a seguir.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$
$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$