XXVI Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final — 9 de Novembro de 2002

Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸PROBLEMA 1

Uma pizzaria da cidade de São Paulo serve pizzas de forma quadrada, e faz sua propaganda afirmando que uma pizza quadrada, de lado igual ao diâmetro de uma pizza circular, oferece 27% mais pizza.

Considerando que uma pizza circular tem raio 18 cm:

(a) Calcule a área da pizza quadrada.

(b) Qual é a área da pizza circular?

(c) Verifique se a área da pizza quadrada é, realmente, pelo menos 27% maior que a área da pizza circular.

Você pode querer usar o seguinte fato: a área de um círculo de raio R *é dada por* $\pi \cdot R^2$, *onde* $\pi \cong \frac{22}{7}$.

▸PROBLEMA 2

Em 16 de junho de 1770, Jean Charles de Borda apresentou na Academia Francesa de Ciências o primeiro trabalho matemático sobre a *Teoria das Eleições*.

Pelo *Princípio de Borda*, cada eleitor deve colocar em seu voto todos os candidatos em ordem conforme a sua preferência. Apurados os votos, cada candidato recebe pontos de acordo com a sua posição em cada voto. O candidato com a maior pontuação é o vencedor.

Por exemplo, em uma eleição com 4 candidatos A, B, C e D, pede-se a cada eleitor que coloque os candidatos em ordem de preferência. Apurados os votos, apenas quatro ordens foram encontradas. Essas ordens, bem como a quantidade de votos de cada uma, encontram-se descritas a seguir.

ABCD - 4 votos (A o preferido)
CABD - 4 votos (C o preferido)
BACD - 5 votos (B o preferido)
DCAB - 6 votos (D o preferido)

De acordo com Borda, atribuindo 4 pontos para o primeiro colocado em cada uma das ordens, 3 para o segundo, 2 para o terceiro e 1 para o quarto, temos as seguintes pontuações:

$$A: 4 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 2 = 55$$
$$B: 4 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 4 + 6 \times 1 = 46$$
$$C: 4 \times 2 + 4 \times 4 + 5 \times 2 + 6 \times 3 = 52$$
$$D: 4 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 4 = 37$$

Logo A é o vencedor!

Considere agora uma eleição com 3 candidatos X, Y e Z, na qual os 7 eleitores, depois de apurados os votos, apresentaram as seguintes ordens de preferência. Essas ordens, bem como a quantidade de votos de cada uma, são:

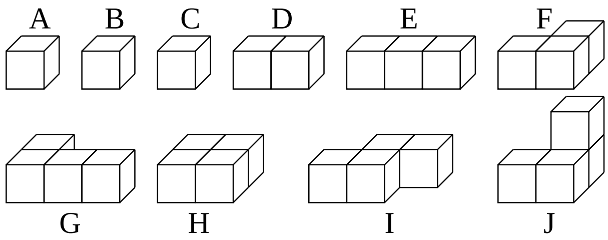
XYZ - 3 votos (X o preferido)
ZXY - 4 votos (Z o preferido)

(a) Baseado no *Princípio de Borda*, atribuindo-se 3 pontos para o primeiro colocado em cada uma das ordens, 2 para o segundo e 1 para o terceiro, quem será o vencedor dessa eleição?

(b) Encontre p, q e r inteiros positivos com $p > q > r$, tais que atribuindo-se p pontos para o primeiro colocado em cada uma das ordens, q para o segundo e r para o terceiro, o candidato Z seja o vencedor dessa eleição.

▸ PROBLEMA 3

As 10 peças A, B, C, ..., J, mostradas a seguir, foram obtidas a partir de cubos de madeira de lado 10 cm. Algumas foram montadas colando-se dois ou três ou quatro cubos de madeira.



(a) Mostre como é possível montar um cubo de lado 20 cm utilizando algumas dessas peças. Você pode escolher aquelas que quiser!

(b) Mostre como é possível montar um cubo de lado 30 cm utilizando todas essas peças.

▸ PROBLEMA 4

No jogo denominado “Chomp”, dois jogadores, Arnaldo e Bernaldo, dizem alternadamente divisores de um número N dado inicialmente. Os números ditos não podem ser múltiplos de nenhum dos números escolhidos anteriormente. Perde quem escolher o número 1.

Por exemplo, sendo $N = 432 = 2^4 \cdot 3^3$, um jogo possível é

Arnaldo escolhe 36;

Bernaldo escolhe 6 (Observe que ele não poderia escolher $72 = 2 \cdot 36$, $108 = 3 \cdot 36$, $144 = 4 \cdot 36$, $216 = 6 \cdot 36$, $432 = 12 \cdot 36$ e nem o próprio $36 = 1 \cdot 36$.);

Arnaldo escolhe 16; Bernaldo escolhe 4; Arnaldo escolhe 9; Bernaldo escolhe 3; Arnaldo escolhe 2; Bernaldo escolhe 1, perdendo. Arnaldo é o vencedor!

Uma maneira de visualizar o que está ocorrendo no jogo é desenhar uma barra de chocolate formada por quadradinhos numerados com os divisores de N. E, então, imaginar que os jogadores estão comendo os quadradinhos abaixo e à direita dos números que escolhem. O quadradinho 1 está envenenado! Para o nosso exemplo, teríamos:

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
27	54	108	216	432

(Mostramos no desenho os quadradinhos que Arnaldo comeria na sua primeira jogada, 36, 72, 108, 144, 216 e 432. Bernaldo, na sua primeira jogada, comeria os quadradinhos 6, 12, 18, 24, 48 e 54.)

Considere agora $N = 10000 = 2^4 \cdot 5^4$.

(a) Desenhe a barra de chocolate correspondente.

(b) Mostre que se Arnaldo começar escolhendo 10, ele consegue vencer o jogo, não importando quais números Bernaldo escolha.

(c) Mostre que se Arnaldo começar escolhendo qualquer número diferente de 10, Bernaldo consegue vencer o jogo.

▸ PROBLEMA 5

No encarte do álbum *Presence* do grupo musical *Led Zeppelin*, uma ilustração mostra parte de uma multiplicação, na qual os números multiplicados e o resultado não aparecem. Todavia, as parcelas que aparecem quando se multiplica cada dígito de um número pelo outro número são visíveis:

$$\begin{array}{r} ???? \\ \times\ ??? \\ \hline 33240 \\ 77240+ \\ 25080++ \\ \hline ??????? \end{array}$$

(a) Calcule $\text{mdc}(25080; 77240)$.

(b) Mostre que a conta acima está incorreta, ou seja, que as parcelas acima não podem ser o produto de dígitos por um mesmo número.

(c) Trocando um dígito de cada uma das duas primeiras parcelas (33240 e 77240), é possível conseguir parcelas que podem ser obtidas em uma multiplicação. Descubra os números que estavam sendo multiplicados.

XXVI Olimpíada Paulista de Matemática
Prova da Fase Final — 9 de Novembro de 2002
Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Uma pizzaria da cidade de São Paulo serve pizzas de forma quadrada, e faz sua propaganda afirmando que uma pizza quadrada, de lado igual ao diâmetro de uma pizza circular, oferece 27% mais pizza.

Considerando que uma pizza circular tem raio 18 cm:

(a) Verifique se a área da pizza quadrada é, realmente, pelo menos 27% maior que a área da pizza circular.

(b) A cobertura da pizza circular é um círculo cujo centro coincide com o centro da pizza (por exemplo, numa pizza de queijo, a cobertura corresponde à área coberta pelo queijo). Calcule a área da sua cobertura, sabendo que o raio da pizza é 2 cm maior que o raio da sua cobertura.

(c) A cobertura da pizza quadrada tem a forma de um quadrado com lados paralelos ao lado da pizza e centro coincidente com o centro da pizza. Qual deve ser a medida do lado da cobertura da pizza quadrada para que a sua área seja igual à área da cobertura da pizza circular?

▸ PROBLEMA 2

Considere a equação de duas variáveis

$$n^2 - nm - m^2 = 0$$

Encontraremos todas as suas raízes reais.

Se $m \neq 0$, dividindo a equação dada por m^2 obtemos

$$n^2 - nm - m^2 = 0 \iff \left(\frac{n}{m}\right)^2 - \left(\frac{n}{m}\right) - 1 = 0 \iff \frac{n}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{n}{m} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\iff n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}m \text{ ou } n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}m \ (*)$$

Observe que se $m = 0$ então $n = 0$, logo $(*)$ realmente apresenta todas as soluções.

Agora é a sua vez!

(a) Encontre as soluções reais da equação

$$n^2 - 4nm + m^2 = 0$$

(b) Encontre as soluções racionais da equação

$$n^4 - 6n^2m^2 + 8m^4 = 0$$

▸ PROBLEMA 3

Dois ladrões, Arnaldo e Bernaldo, roubaram N moedas de ouro idênticas. Resolveram fazer a partilha da seguinte maneira: uma moeda para Arnaldo, duas para Bernaldo, três para Arnaldo, quatro para Bernaldo, e assim por diante, sempre aumentando em 1 a quantidade de moedas distribuídas a cada passo. Quando isso não for possível, todas as moedas restantes são entregues ao ladrão da vez e a partilha termina.

(a) Para vários valores de N a partilha é tal que Arnaldo e Bernaldo recebem a mesma quantidade de moedas. Por exemplo, para $N = 18$, Arnaldo recebe uma moeda; Bernaldo: duas; Arnaldo: três; Bernaldo: quatro; Arnaldo: cinco e Bernaldo fica com as três que restam. Assim, cada ladrão fica com 9 moedas.

Determine o menor valor de N, $N > 2002$, para o qual ambos recebem o mesmo número de moedas.

(b) Para k ladrões, $k \geqslant 3$, a partilha é feita da seguinte forma: o primeiro ladrão recebe uma moeda; o segundo recebe duas; o terceiro recebe três; e assim por diante, até que o k-ésimo ladrão recebe k moedas. Em seguida, o primeiro ladrão recebe $k+1$ moedas; o segundo $k+2$ moedas; e assim por diante. Quando isso não for possível, todas as moedas restantes são entregues ao ladrão da vez e a partilha termina.

Mostre que para todo $k \geqslant 3$, ao final da partilha, é impossível que todos tenham a mesma quantidade de moedas, não importando N.

Você pode querer usar o seguinte fato: $1 + 2 + 3 + \cdots + m = \dfrac{m \cdot (m+1)}{2}$ *para todo* m *inteiro positivo.*

▸ PROBLEMA 4

Um círculo de cartolina foi recortado como mostra a figura 1. As peças obtidas foram utilizadas para montar o diagrama mostrado na figura 2. Peças correspondentes estão indicadas pelo mesmo número.

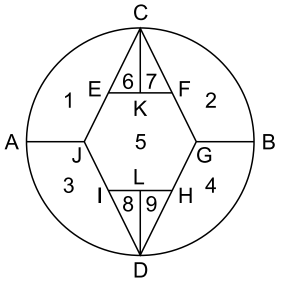


figura 1

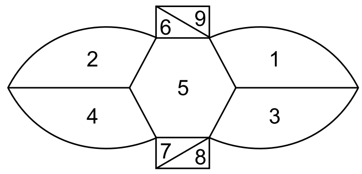


figura 2

Na figura 1, os segmentos congruentes AJ e GB estão contidos no diâmetro AB do círculo, e os segmentos congruentes CK e LD estão contidos no diâmetro CD, com AB perpendicular a CD.

Além disso, E pertence a CJ, F pertence a CG, I pertence a JD e H pertence a DG. Finalmente, EF e IH são paralelos a AB.

(a) O hexágono $EFGHIJ$ é eqüilátero, ou seja, seus lados são todos congruentes?

(b) Um hexágono é dito regular se, e somente se, é eqüilátero e eqüiângulo, ou seja, seus lados são todos congruentes e seus ângulos internos são todos congruentes. O hexágono $EFGHIJ$ é regular?

▸ PROBLEMA 5

No jogo denominado “Chomp”, dois jogadores, Arnaldo e Bernaldo, dizem alternadamente divisores de um número N dado inicialmente. Os números ditos não podem ser múltiplos de nenhum dos números escolhidos anteriormente. Perde quem escolher o número 1.

Por exemplo, sendo $N = 432 = 2^4 \cdot 3^3$, um jogo possível é

Arnaldo escolhe 36;

Bernaldo escolhe 6 (Observe que ele não poderia escolher $72 = 2 \cdot 36$, $108 = 3 \cdot 36$, $144 = 4 \cdot 36$, $216 = 6 \cdot 36$, $432 = 12 \cdot 36$ e nem o próprio $36 = 1 \cdot 36$.);

Arnaldo escolhe 16; Bernaldo escolhe 4; Arnaldo escolhe 9; Bernaldo escolhe 3; Arnaldo escolhe 2; Bernaldo escolhe 1, perdendo. Arnaldo é o vencedor!

Uma maneira de visualizar o que está ocorrendo no jogo é desenhar uma barra de chocolate formada por quadradinhos numerados com os divisores de N. E, então, imaginar que os jogadores estão comendo os quadradinhos abaixo e à direita dos números que escolhem. O quadradinho 1 está envenenado! Para o nosso exemplo, teríamos:

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
27	54	108	216	432

(Mostramos no desenho os quadradinhos que Arnaldo comeria na sua primeira jogada, 36, 72, 108, 144, 216 e 432. Bernaldo, na sua primeira jogada, comeria os quadradinhos 6, 12, 18, 24, 48 e 54.)

Considere agora $N = 7776 = 2^5 \cdot 3^5$.

(a) Desenhe a barra de chocolate correspondente.

(b) Determine qual deve ser o número que Arnaldo deve escolher na sua primeira jogada para que ele vença o jogo, não importando quais números Bernaldo escolha.

Você deve mostrar que esse número é único, ou seja, caso Arnaldo escolha qualquer outro número, ele não garante a vitória.

XXVI Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final — 9 de Novembro de 2002

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ **PROBLEMA 1**

Mostraremos neste problema uma modelagem matemática que permite prever a performance das equipes da NFL (Liga Profissional de Futebol Americano) ou da NBA (Liga Profissional de Basquete), temporada a temporada.

Para isto iremos supor que o desempenho de uma equipe ao longo de uma temporada (campeonato) depende essencialmente apenas de seu conjunto de jogadores.

Assim, para tornar o campeonato mais "interessante", no início de cada temporada, os melhores jogadores iniciantes vão para as equipes que tiveram pior desempenho no campeonato anterior (este processo, descrito aqui de maneira simplificada, é chamado "draft").

Seja $U(t)$ a porcentagem de vitórias de um time durante a temporada do ano t (não há empates). Com o draft, analisando os dados da NFL, observamos que a razão na qual U varia no presente é, aproximadamente, proporcional à diferença entre $0,5$ e o valor de U de 2 anos (temporadas) atrás.

É possível, então, demonstrar que

$$U(t) \cong 0,5 + U_a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}(t - t_0)\right)$$

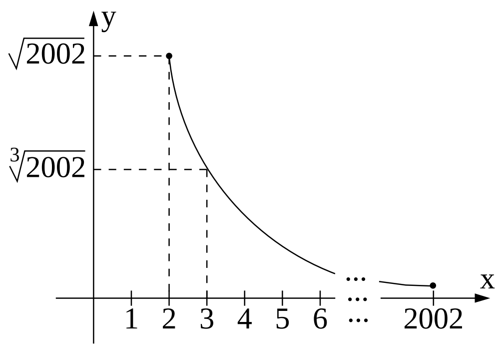
para certas constantes $U_a \in \mathbb{Q}$ e $t_0 \in \mathbb{N}$ que variam de equipe para equipe.

(a) Para o Buffalo Bills, time da NFL, temos $U_a = -0,375$ e $t_0 = 1983$. Sabendo que cada equipe da NFL joga 16 partidas por temporada, quantas vitórias eram previstas para o Bills em 2001? (Só como curiosidade: o Bills teve 3 vitórias em 2001.)

(b) Considere duas equipes quaisquer A e B da NFL. Mostre que o modelo prevê que, em um determinado ano, a equipe A terá pelo menos tantas vitórias quanto a equipe B.

▸ **PROBLEMA 2**

A figura a seguir mostra um esboço do gráfico de $f(x) = 2002^{\frac{1}{x}}$ para $2 \leqslant x \leqslant 2002$.



(a) Mostre que o número de pontos (m, n) abaixo do gráfico com ambas as coordenadas m, n inteiras positivas e $2 \leqslant m \leqslant 2002$ é

$$\lfloor\sqrt{2002}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{2002}\rfloor + \lfloor\sqrt[4]{2002}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt[2002]{2002}\rfloor.$$

(b) Prove que

$$\lfloor\sqrt{2002}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{2002}\rfloor + \lfloor\sqrt[4]{2002}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt[2002]{2002}\rfloor = \lfloor\log_2 2002\rfloor + \lfloor\log_3 2002\rfloor + \lfloor\log_4 2002\rfloor + \cdots + \lfloor\log_{2002} 2002\rfloor.$$

Observação: $\lfloor x\rfloor$ denota a parte inteira de x, isto é, o maior inteiro que é menor que ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$, $\lfloor 3\rfloor = 3$ e $\lfloor -1,1\rfloor = -2$.

▸ **PROBLEMA 3**

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 2z & x & y \\ 2y & 2z & x \end{bmatrix},$$

com x, y, z inteiros positivos.

(a) Sejam A e B matrizes de $\mathcal{M}$. Mostre que o produto $A \cdot B$ também pertence a $\mathcal{M}$.

(b) Encontre uma matriz A_0 pertencente a $\mathcal{M}$ tal que $\det A_0 = 1$.

(c) Mostre que existem infinitas matrizes A de $\mathcal{M}$ tais que $\det A = 1$, ou seja, mostre que a equação

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 1$$

tem infinitas soluções inteiras positivas.

▸ **PROBLEMA 4**

Uma pirâmide de base quadrada $ABCD$ e vértice V tem todas as arestas com medida 1 m. Um plano, passando pela aresta AB, corta as arestas VC e VD nos pontos P e Q, respectivamente, dividindo a pirâmide em dois sólidos S_1 e S_2.

(a) Dê o número de vértices, de faces e de arestas de S_1 e S_2.

(b) Calcule o volume da pirâmide $VABCD$.

(c) Calcule a razão $\dfrac{VP}{PC}$, sabendo que S_1 e S_2 têm o mesmo volume.

▸ **PROBLEMA 5**

Um interruptor de chave com duas entradas e duas saídas pode ficar em dois estados distintos, como mostra a figura 1.

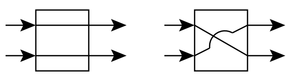


Figura 1

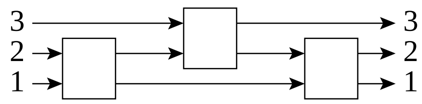


Figura 2

Exibimos acima, na figura 2, uma associação de interruptores, com três entradas e três saídas, que é "universal" no sentido de que modificando os estados dos interruptores é possível obter todas as possíveis ligações entre as três entradas e as três saídas, ou seja,

$$\boxed{\begin{array}{c} 1\to 1 \\ 2\to 2 \\ 3\to 3 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} 1\to 3 \\ 2\to 1 \\ 3\to 2 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} 1\to 2 \\ 2\to 3 \\ 3\to 1 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} 1\to 2 \\ 2\to 1 \\ 3\to 3 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} 1\to 3 \\ 2\to 2 \\ 3\to 1 \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} 1\to 1 \\ 2\to 3 \\ 3\to 2 \end{array}}$$

Note que o número total de estados diferentes desta associação é $2^3 = 8$, pois cada interruptor pode ficar em dois estados.

Dizemos, então, que uma associação com n entradas e n saídas é n-*universal* se é possível obter todas as possíveis ligações entre as n entradas e n saídas. Por exemplo, a associação da figura 2 é 3-universal.

(a) Seja $n \geqslant 3$.

(i) Mostre que $k \cdot (n-k) > \dfrac{n}{2}$ para $1 \leqslant k < n$.

(ii) Mostre que o número de interruptores em uma associação n-universal é maior do que $\dfrac{n(\log_2 n - 1)}{2}$.

(b) A figura 3 mostra uma associação com 8 entradas e 8 saídas, onde A e B são associações 4-universais. Prove que esta associação é 8-universal.

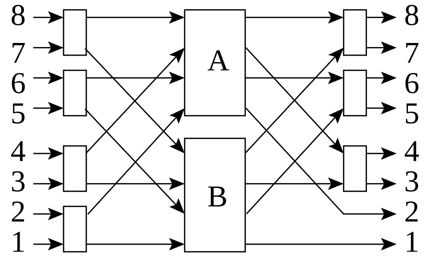


Figura 3