XXIV Olimpíada Paulista de Matemática

11/11/2000—Prova da Fase Final

5ª e 6ª séries—Ensino Fundamental

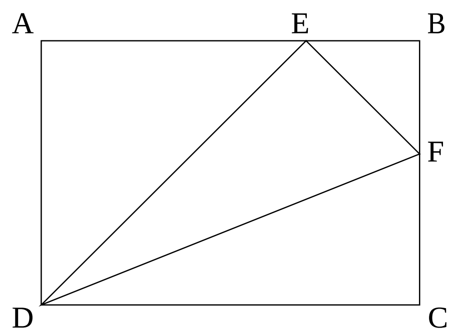
Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas** e apresentadas no *Bloco de Resoluções*, nos espaços indicados.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ **PROBLEMA 1**

Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo e DAE e EBF são triângulos isósceles.



(a) Determine a medida do ângulo $D\hat{E}F$.

(b) Para $m(F\hat{D}C) = 24°$, calcule $m(D\hat{F}E)$.

(c) Sendo $BF = y$ e $FC = x$, calcule o perímetro de $ABCD$.

▸ **PROBLEMA 2**

Antônio é um perito da polícia que analisa acidentes automobilísticos. Ele sempre inicia uma investigação tentando descobrir a velocidade com a qual o veículo trafegava momentos antes do acidente. Um dos métodos por ele utilizado consiste em medir, quando houver, o tamanho de marcas (vestígios) ininterruptas deixadas pelos pneus travados pelos freios e então utilizar a seguinte fórmula: $V = 3{,}6 \cdot \sqrt{19{,}6 \cdot \mu \cdot d}$ para obter uma aproximação da velocidade.

Nesta fórmula, V indica a velocidade, em km/h, com a qual o veículo trafegava no momento em que os freios foram acionados, travando as rodas até sua parada total, d corresponde ao tamanho, em metros, das marcas da freada e μ é o coeficiente de atrito (aspereza) da superfície. Veja alguns valores médios de coeficientes de atrito (μ):

Descrição da superfície	Seca	Molhada
Concreto novo (rugoso)	0,84	0,61
Concreto trafegado	0,69	0,56
Asfalto novo (rugoso)	0,79	0,62
Asfalto trafegado	0,66	0,53
Paralelepípedo novo (rugoso)	0,78	0,60
Paralelepípedo trafegado	0,68	0,48

(a) Em um teste para uma revista automotiva, um motorista conduz um veículo sobre uma superfície seca de concreto novo. Em certo momento, o motorista aciona os freios, bloqueando as rodas até a parada total do veículo, deixando uma marca de 17 m de comprimento. Qual é a velocidade aproximada com que o veículo trafegava no momento em que os freios foram acionados?

(b) Sob intensa chuva, um motorista conduz, a 144 km/h, um veículo por uma rodovia de asfalto já bastante trafegado. Num trecho de reta, após perceber a presença de uma árvore caída sobre a rodovia, impedindo a passagem de qualquer veículo, ele reage e aciona os freios, travando as rodas até a parada completa do veículo. Exatamente no momento em que as rodas são travadas, o veículo está a 130 m da árvore. Se o carro continuar sua trajetória em linha reta, com as rodas bloqueadas, o motorista irá colidir com a árvore?

▸ PROBLEMA 3

Após corrigir todas as provas de Matemática de seus alunos, o professor constatou a seguinte distribuição de notas:

Notas	$\leqslant 4$	$\leqslant 5$	$\leqslant 6$	$\leqslant 7$	$\leqslant 8$	$\leqslant 9$	$\leqslant 10$
Porcentagem	12%	28%	40%	54%	86%	98%	100%

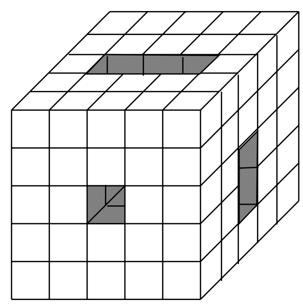
(a) Qual é a porcentagem de alunos que receberam nota estritamente maior que 7?

(b) Qual é a porcentagem de alunos que receberam nota estritamente maior que 9 porém menor que ou igual a 10?

(c) Este professor tem 12 turmas, com igual número de alunos por turma. Qual é a menor quantidade possível de alunos por turma?

▸ PROBLEMA 4

Um cubo de dimensões 5 cm × 5 cm × 5 cm é formado por *"cubinhos"* de 1 cm × 1 cm × 1 cm. São feitas três cavidades de dimensões 1 cm × 1 cm × 5 cm, 2 cm × 1 cm × 5 cm e 3 cm × 1 cm × 5 cm, retirando-se os *"cubinhos"*, como mostra a figura a seguir. Determine quantos *"cubinhos"* sobraram na figura após a formação das três cavidades.



▸ PROBLEMA 5

As companhias aéreas permitem aos passageiros despacharem suas bagagens nas seguintes condições: cada companhia estabelece um limite de peso que cada passageiro pode transportar sem custo adicional. Caso o peso total da bagagem exceda o limite estabelecido, o passageiro deverá então pagar uma taxa adicional para despachar suas bagagens. Esta taxa adicional é um valor proporcional à quantidade de quilogramas além do limite de peso estabelecido.

(a) A companhia *Alfa-Air* cobra R$23,00 por quilograma de bagagem acima do limite estabelecido de 25 kg. Carlos viaja com um total de 32,5 kg de bagagem. Quantos reais ele pagou de taxa adicional para poder transportar toda sua bagagem?

(b) Edmilson paga R$120,00 e Eduardo, R$40,00 de taxa adicional à companhia *Beta-Air* e juntos têm no total 52 kg de bagagem. Se Edmilson tivesse viajado sozinho com toda a bagagem, teria que pagar R$340,00. Qual é o peso máximo que se pode transportar de bagagem nessa companhia sem ter que pagar a taxa adicional?

Obs.: Seguindo a linguagem usual, neste enunciado utilizamos *peso* onde deveríamos ter utilizado *massa*.

XXIV Olimpíada Paulista de Matemática

11/11/2000—Prova da Fase Final

7ª e 8ª séries—Ensino Fundamental

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas** e apresentadas no *Bloco de Resoluções*, nos espaços indicados.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ **PROBLEMA 1**

A lanchonete *McBeta's* irá realizar uma promoção: se um cliente pedir o *Beta Lanche Contente* e esse não ficar pronto em no máximo 60 segundos, o cliente não paga. Cada *Beta Lanche Contente* vem com um sanduíche, batatas fritas e refrigerante. Assim, para preparar um *Beta Lanche Contente*, deve-se executar as seguintes tarefas:

A: Tostar cada pedaço de pão;

B: Fritar um hambúrguer;

C: Colocar alface e picles sobre o hambúrguer frito;

D: Montar o sanduíche;

E: Colocar o sanduíche em uma caixa de papel;

F: Fritar as batatas;

G: Colocar as batatas em um saquinho;

H: Colocar refrigerante no copo;

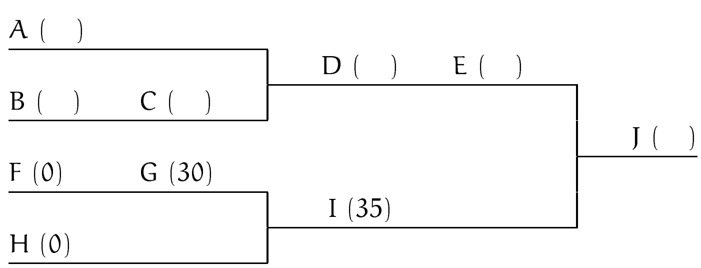
I: Colocar as batatas e o copo com o refrigerante na bandeja;

J: Colocar o sanduíche na bandeja.

O tempo que cada tarefa demora está na tabela a seguir:

Tarefa	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Tempo (s)	30	35	5	10	5	30	5	30	5	5

É claro que algumas tarefas podem ser feitas ao mesmo tempo. Para podemos calcular o menor tempo possível para prepararmos um *Beta Lanche Contente*, é útil construirmos um diagrama, como o mostrado a seguir:



A princípio, identificamos as tarefas que não dependem umas das outras e depois colocamos as tarefas subseqüentes. Colocamos então dentro dos parêntesis os tempos mínimos em que as tarefas devem ser iniciadas. As tarefas F e H podem começar quando o cronômetro marcar 0, porém a tarefa G só pode começar depois que a tarefa F terminar. Assim, G começa no mínimo quando o cronômetro marcar 30 segundos. A tarefa I só pode começar depois de concluídas as tarefas G e H. Assim, I só pode começar quando o cronômetro marcar 35 segundos.

(a) Copie na folha de respostas o diagrama e complete os tempos mínimos que faltam.

(b) É possível fazer um *Beta Lanche Contente* em no máximo 60 segundos?

▸ **PROBLEMA 2**

Após corrigir uma prova de Matemática dos alunos da turma β, o professor constatou a seguinte distribuição de notas:

Notas	$\leqslant 4$	$\leqslant 5$	$\leqslant 6$	$\leqslant 7$	$\leqslant 8$	$\leqslant 9$	$\leqslant 10$
Porcentagem	12%	28%	40%	54%	86%	98%	100%

(a) Qual é a porcentagem de alunos da turma β que receberam nota estritamente maior que 8?

(b) Qual é a porcentagem de alunos da turma β que receberam nota estritamente maior que 5 porém menor que ou igual a 8?

(c) Mostre que a média dos alunos da turma β está entre 5 e 7.

▸ **PROBLEMA 3**

As companhias aéreas permitem aos passageiros despacharem suas bagagens nas seguintes condições: cada companhia estabelece um limite de peso que cada passageiro pode transportar sem custo adicional. Caso o peso total da bagagem exceda o limite estabelecido, o passageiro deverá então pagar uma taxa adicional para despachar suas bagagens. Esta taxa adicional é um valor proporcional à quantidade de quilogramas além do limite de peso estabelecido.

(a) A companhia *Alfa-Air* cobra R$23,00 por quilograma de bagagem acima do limite estabelecido de 25 kg. Carlos viaja com um total de 32,5 kg de bagagem. Quantos reais ele pagou de taxa adicional para poder transportar toda sua bagagem?

(b) Edmilson paga R$120,00 e Eduardo, R$40,00 de taxa adicional à companhia *Beta-Air* e juntos têm no total 52 kg de bagagem. Se Edmilson tivesse viajado sozinho com toda a bagagem, teria que pagar R$340,00. Qual é o peso máximo que se pode transportar de bagagem nessa companhia sem ter que pagar a taxa adicional?

Obs.: Seguindo a linguagem usual, neste enunciado utilizamos *peso* onde deveríamos ter utilizado *massa*.

▸ **PROBLEMA 4**

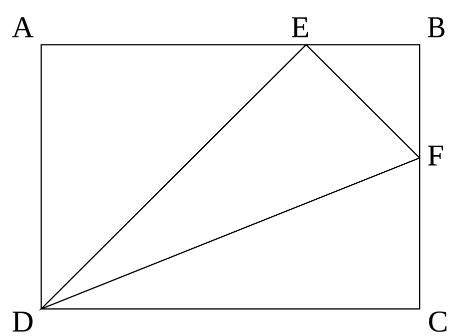
Definição: O *piso* de um número real x, representado por $\lfloor x \rfloor$, corresponde ao maior inteiro menor que ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 2{,}89 \rfloor = 2$, $\lfloor 0{,}357 \rfloor = 0$ e $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

(a) Resolva a inequação $2\lfloor x \rfloor^2 - 2\lfloor x \rfloor - 9 \leqslant 0$.

(b) Resolva a equação $2x^2 - 2\lfloor x \rfloor - 9 = 0$.

▸ **PROBLEMA 5**

Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo e DAE e EBF são triângulos isósceles.



(a) Sendo $m(F\hat{D}E) = 15^\circ$ e $CF = 1$, calcule

  (i) a medida de DF;

  (ii) a razão $\dfrac{EF}{FD}$, ou seja, $\operatorname{sen} 15^\circ$.

(b) Sendo $m(F\hat{D}E) = 22{,}5^\circ$, calcule $\operatorname{sen} 22{,}5^\circ$.

XXIV Olimpíada Paulista de Matemática

11/11/2000—Prova da Fase Final

1ª e 2ª séries—Ensino Médio

Folha de Perguntas

Instruções:

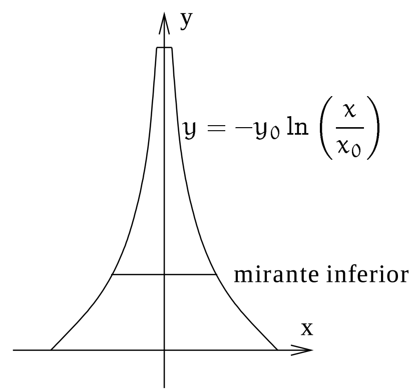
- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas** e apresentadas no *Bloco de Resoluções*, nos espaços indicados.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

O perfil da Torre Eiffel é aproximadamente igual à curva

$$y = -y_0 \ln\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

onde $2x$ é a largura da torre à altura y e x_0 e y_0 são constantes. A figura a seguir mostra o perfil da torre (observe que a equação acima representa somente a curva que está à direita; a curva da esquerda é a simétrica da da direita em relação ao eixo Oy).



Sabe-se que o mirante inferior, a 45 m de altura, tem 66 m de largura e que a Torre Eiffel, no solo, tem 120 m de largura (valores aproximados).

(a) Calcule x_0 e y_0.

(b) Supondo que o topo da torre tem 2,2 m de largura, calcule a altura da Torre Eiffel.

Obs.: você pode querer usar as aproximações $e^{-4} = \frac{11}{600}$ e $e^{-\frac{3}{5}} = \frac{11}{20}$.

▸ PROBLEMA 2

Sejam $A = \begin{pmatrix} 398 & -252 \\ 627 & -397 \end{pmatrix}$ e $T = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}$.

(a) A matriz $T^{-1}AT$ é diagonal. Calcule-a.

(b) Sejam X uma matriz 2×2 e I a matriz identidade 2×2. Observe:

$$\begin{aligned}
(T^{-1}XT)^2 &= T^{-1}XT \cdot T^{-1}XT = T^{-1}X \cdot I \cdot XT = T^{-1}X^2T \\
(T^{-1}XT)^3 &= T^{-1}XT \cdot (T^{-1}XT)^2 = T^{-1}XT \cdot T^{-1}X^2T = T^{-1}X \cdot I \cdot X^2T = T^{-1}X^3T \\
(T^{-1}XT)^4 &= T^{-1}XT \cdot (T^{-1}XT)^3 = T^{-1}XT \cdot T^{-1}X^3T = T^{-1}X \cdot I \cdot X^3T = T^{-1}X^4T \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Utilize este fato para encontrar uma matriz B tal que $B^3 = A$.

▸ **PROBLEMA 3**

Considere a seqüência $B_0, B_1, B_2, \ldots$ (*Números de Bernoulli*) que satisfaz

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1;\\
&B_2 = B_0 - 2B_1 + B_2;\\
&B_3 = -B_0 + 3B_1 - 3B_2 + B_3;\\
&B_4 = B_0 - 4B_1 + 6B_2 - 4B_3 + B_4;\\
&\text{e, em geral, } B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B_k \text{ para todo } n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

(a) Calcule B_1, B_2, B_3 e B_4.

Aproveitando a semelhança com o *Binômio de Newton*, utilizamos o símbolo "$(x+B)^n$" para representar a expressão $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, utilizando essa notação, a definição dos *Números de Bernoulli* seria $B_0 = 1$ e $B_n =$ "$(-1+B)^n$", para todo $n \geqslant 2$.

(b) Mostre que "$(x+B)^4$" $-$ "$((x-1)+B)^4$"$= 4x^3$.

(c) A partir do item anterior, obtenha uma fórmula para a soma dos m primeiros cubos, isto é, $1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3$.

Atenção:

- Sua resposta para o item (c) deve ser um polinômio de grau 4 na variável m.
- Neste exercício adotamos $0^0 = 1$.

▸ **PROBLEMA 4**

Considere seqüências de n bits, $n \in \mathbb{N}$, isto é, seqüências de n termos onde cada um dos termos é igual a zero ou um. Por exemplo, para $n = 3$, temos as seguintes seqüências: 000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111. Definimos *distância* entre duas seqüências como sendo o número de bits em que as seqüências diferem. Por exemplo, a distância entre 001 e 010 é 2 e a distância entre 100 e 110 é 1.

(a) Qual é o número de seqüências com 6 bits cuja distância a 000000 é menor que ou igual a 4?

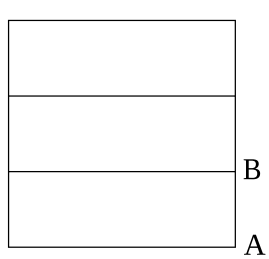
(b) Considere um conjunto de seqüências de n bits onde a distância entre quaisquer duas seqüências é maior do que ou igual a $2r+1$, $r \in \mathbb{R}$. Mostre que o número de elementos desse conjunto é menor que ou igual a $\dfrac{2^n}{\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}}$.

▸ **PROBLEMA 5**

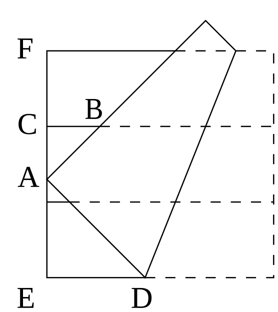
Um cubo de aresta a tem o dobro do volume de um cubo de aresta b.

(a) Determine a razão $\dfrac{a}{b}$.

(b) O desenho abaixo representa uma folha de papel quadrada, de lado 3 cm, dividida em três partes iguais por duas paralelas, como mostra a figura a seguir:



Podemos fazer uma dobra que leva o ponto A até o lado esquerdo e o ponto B até a paralela superior, obtendo a seguinte configuração:



(i) Mostre que os triângulos ABC e DAE são semelhantes.

(ii) Mostre que $\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{a}{b}$.