Contando o Infinito: os Números Cardinais

Sérgio Tadao Martins

4 de junho de 2005

"No one will expel us from the paradise that Cantor has created for us"
David Hilbert

1 Introdução

Quantos elementos há no conjunto $\{1, \ldots, n\}$? Ora, é claro que são n. Mas e o conjunto dos naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, quantos elementos ele tem? Uma resposta possível é que ele tem infinitos elementos, assim como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, e todos os conjuntos infinitos. Porém, essa resposta não irá nos satisfazer. Nosso objetivo nesse texto é tentar definir de forma precisa o que queremos dizer quando afirmamos que um conjunto tem mais elementos que outro, ou o que significa afirmar que dois conjuntos tem o mesmo número de elementos. Como essas questões são triviais quando os conjuntos em estudo são finitos, toda a diversão nos será proporcionada pelos conjuntos infinitos.

2 Funções bijetoras e conjuntos equipotentes

Nosso primeiro objetivo é definir o que significa dizer que dois conjuntos A e B tem o mesmo número de elementos. Para tanto, vamos fazer uma breve recordação sobre funções: dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é *injetora* se dois elementos distintos quaisquer de A tem imagens distintas, isto é, se $x_1, x_2 \in A$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dizemos ainda que f é *sobrejetora* se $Im(f) = B$, isto é, se todo elemento de B é imagem de algum elemento de A. Finalmente, f é *bijetora* se for injetora e sobrejetora. Note que uma função bijetora nos permite dispor os elementos de A e B em pares, de modo que cada elemento de A ocorra uma única vez como o primeiro elemento de um par e cada elemento de B uma única vez como o segundo elemento de um par. É nesse sentido que dizemos que A e B tem o mesmo número de elementos.

Definição 1 Dizemos que dois conjuntos A e B são *equipotentes* se existir uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$. Denotamos esse fato por $A \cong_C B$.

Se existir uma função injetora (mas não necessariamente bijetora) $f : A \longrightarrow B$, então cada elemento de A corresponde a um elemento de B, e eventualmente alguns elementos de B ficam "sobrando". Intuitivamente, isso nos diz que o conjunto A tem no máximo tantos elementos quanto B, mas não quer dizer necessariamente que A tenha menos elementos que B. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

é injetora e não é bijetora, mas é claro que $\mathbb{Z} \cong_C \mathbb{Z}$. Quando existir $f : A \longrightarrow B$ injetora, escreveremos $A \leq_C B$. Finalmente, escreveremos $A <_C B$ quando existir uma função injetora de A em B, mas não uma bijetora.

3 Relações de equivalência e ordem

Lembramos que uma relação R numa coleção $\mathcal{T}$ nada mais é do que um subcoleção de

$$\mathcal{T} \times \mathcal{T} = \{(x, y) : x, y \in \mathcal{T}\}.$$

A interpretação de uma relação R é que $(x, y) \in R$ se x e y estão relacionados de acordo com a especificação dada por R. Por exemplo, se $\mathcal{S}$ é a coleção dos conjuntos, a relação $\cong_C$ dada por

$$\cong_C = \{(A, B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} : A \cong_C B\}$$

relaciona dois conjuntos A e B se eles forem equipotentes. Da mesma forma, $\leq_C$ e $<_C$ também são relações em $\mathcal{S}$. Dada uma relação R, se $(x, y) \in R$, escrevemos xRy.

Definição 2 Uma relação $\sim$ numa coleção $\mathcal{T}$ é chamada de relação de *equivalência* se possuir as seguintes propriedades para quaisquer $A, B, C \in \mathcal{T}$:

(i) $A \sim A$;

(ii) Se $A \sim B$, então $B \sim A$;

(iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

As propriedades (i), (ii) e (iii) são chamadas de *reflexiva, simétrica* e *transitiva*, respectivamente.

Podemos verificar facilmente que $\cong_C$ é uma relação de equivalência: ela é reflexiva pois a função identidade $i(x) = x$ é bijetora em A. Ela é simétrica porque, se $f : A \longrightarrow B$ é bijetora, então $f^{-1} : B \longrightarrow A$ também é bijetora. Finalmente, $\cong_C$ é transitiva, pois se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são bijetoras, então $g \circ f : A \longrightarrow C$ é bijetora. Os leitores mais incrédulos podem verificar esses fatos rigorosamente se desejarem.

A partir de uma relação de equivalência, podemos definir também aquilo que chamamos de relação de *ordem*:

Definição 3 Dada uma relação de equivalência $\sim$ numa coleção $\mathcal{T}$, uma relação $\leq$ em $\mathcal{T}$ é chamada de relação de *ordem* se possuir as seguintes propriedades:

(i) É reflexiva;

(ii) É transitiva;

(iii) Se $A \leq B$ e $B \leq A$, então $A \sim B$.

A propriedade (iii) é chamada de *anti-simétrica*.

Dada a nossa relação de equivalência $\cong_C$, a relação $\leq_C$ é claramente reflexiva e transitiva (novamente, os céticos lendo isso aqui podem verificar todos esses fatos que o autor preguiçoso se recusa a escrever). O teorema a seguir afirma que $\leq_C$ também é anti-simétrica, e portanto é uma relação de ordem.

Teorema 1 (Cantor-Bernstein) Se $A \leq_C B$ e $B \leq_C A$, então $A \cong_C B$.

Demonstração: Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ injetoras. Considere os seguintes conjuntos: $A_0 = A$, $A_1 = g(B)$ e $A_2 = (g \circ f)(A)$. Temos $A_0 \supset A_1 \supset A_2$. Definimos, se $n \geq 1$, $A_{n+2} = (g \circ f)(A_n)$. Então, para cada número natural n, temos $A_n \supset A_{n+1}$.

Seja $E_n = A_n - A_{n+1}$, para todo natural n. Temos que, se $m \neq n$, então $E_m \cap E_n = \emptyset$. Ainda, para todo natural n,

$$(g \circ f)(E_n) = (g \circ f)(A_n - A_{n+1}) = A_{n+2} - A_{n+3} = E_{n+2}.$$

Seja $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, e defina a função $h : A \longrightarrow A$ por:

$$h(x) = \begin{cases} g(f(x)) & \text{, se } x \in E_{2n}, n \in \mathbb{N} \\ x & \text{, se } x \in D \text{ ou } x \in E_{2n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Temos que h leva cada E_{2n} em E_{2n+2}, de modo que $h|_{E_{2n}} : E_{2n} \longrightarrow E_{2n+2}$ é bijetora, assim como $h|_D : D \longrightarrow D$ e $h|_{E_{2n+1}} : E_{2n+1} \longrightarrow E_{2n+1}$. Como

$$A = D \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right),$$

temos que h é uma bijeção entre A e A_1. Logo, $A \cong_C A_1$. Como g é uma bijeção entre B e A_1, temos $B \cong_C A_1$ e, portanto, $A \cong_C B$. ∎

4 Números cardinais

Finalmente, chegamos aos números cardinais. Para cada conjunto A, desejamos associar um símbolo, chamado *número cardinal* de A, de modo que, se A e B são equipotentes, então os números cardinais de A e B coincidem. Denotaremos o número cardinal de A por $|A|$. O número cardinal do conjunto A nos diz então "quantos elementos A tem". Como $\leq_C$ é uma relação de ordem nos conjuntos, esta relação induz uma relação de ordem nos números cardinais, ou seja, se $A \leq_C B$, então dizemos que $|A| \leq |B|$. É trivial verificar que $\leq$ é uma relação de ordem na coleção dos números cardinais. Se $A <_C B$, então escrevemos $|A| < |B|$.

Vamos então atribuir números cardinais conjuntos que nos são mais familiares. Defina

$$\begin{aligned} S_0 &= \emptyset \\ S_n &= \{0, 1, \ldots, n-1\}, \text{ se } n \geq 1 \end{aligned}$$

Atribuímos a S_n o cardinal n (que se identifica com o número natural n). Para podermos fazer essa atribuição a S_n, é necessário mostrar que, se m e n são naturais distintos, então $S_m \ncong_C S_n$. Mas esse resultado segue da proposição abaixo.

Proposição 1 Se X é um conjunto finito, então não existe uma função bijetora cujo domínio seja X e cujo contra-domínio seja um subconjunto próprio de X. (Por definição, dizemos que um conjunto X é finito se existir n natural tal que $X \cong_C S_n$.)

Demonstração: Suponha que X seja finito. Se $X = \emptyset$, X não contém subconjuntos próprios e portanto não há o que mostrar. Seja então $n \geq 1$ o menor natural tal que $X \cong_C S_n$ e exista um $Y \subsetneqq X$ tal que $X \cong_C Y$. Temos $n > 1$, pois o único subconjunto próprio de $S_1 = \{0\}$ é o conjunto vazio. Se h é uma bijeção entre X e S_n, seja $h(Y) = S \subsetneqq S_n$. A nossa hipótese então diz que existe uma bijeção $f : S_n \longrightarrow S$. Dividimos a demonstração em dois casos:

- $n-1 \notin S$: Nesse caso, defina a função injetora $g : S \longrightarrow S_n$, dada por: $g(f(n-1)) = n-1$ e, se $x \neq f(n-1)$, $g(f(x)) = f(x)$. Então a função $g \circ f$, restrita a S_{n-1}, é uma bijeção entre S_{n-1} e um subconjunto próprio de S_{n-1} contido em $S - \{f(n-1)\}$.

- $n-1 \in S$: Não podemos ter $f(n-1) = n-1$, senão a restrição de f a S_{n-1} levaria a uma contradição como no caso anterior. Seja então $g : S \longrightarrow S_n$ injetora definida assim: escolha $y \in S_n - S$ e seja $g(n-1) = y$. Seja $g(f(n-1)) = n-1$, e se $x \in S$ e $x \neq f(n-1)$, seja $g(x) = x$. Novamente, $g \circ f$ restrita a S_{n-1} nos dá uma bijeção entre S_{n-1} num de seus subconjuntos próprios.

Em qualquer caso, a minimalidade de n é contrariada. Logo, não existe bijeção entre um conjunto finito e um de seus subconjuntos próprios. ■

Para conjuntos infinitos, criamos símbolos para representar seus números cardinais. Nesse texto, definimos $|\mathbb{N}| = \mathfrak{a}$, $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, e também que o conjunto das funções reais de variável real tem número cardinal $\mathfrak{f}$. Às vezes, no lugar de dizer que o conjunto M tem número cardinal m, dizemos que M tem cardinalidade m. É tudo a mesma coisa para dizer que $|M| = m$.

Se X é um conjunto infinito, existe $a_0 \in X$. E, se tivermos escolhido $a_0, \ldots, a_{n-1} \in X$, existe $a_n \in X - \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. Prosseguindo dessa forma, formamos o conjunto

$$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \subset X,$$

e a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ dada por $f(n) = a_n$ é injetora, logo $\mathfrak{a} \leq |X|$. Nesse sentido podemos dizer que "não existe um infinito tão pequeno quanto o dos naturais". É claro que ainda não sabemos se existe algum infinito maior que o dos naturais. De qualquer forma, se $|X| = \mathfrak{a}$, dizemos que X é *enumerável.*

Proposição 2 Os seguintes conjuntos são enumeráveis:

(i) a união de um conjunto finito com um enumerável;

(ii) a união de dois conjuntos enumeráveis;

(iii) a união de uma quantidade enumerável de conjuntos enumeráveis;

(iv) o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis;

(v) $\mathbb{Z}$;

(vi) $\mathbb{Q}$.

Demonstração: Os itens (i) e (ii) ficam como exercício.

Para ver (iii), sejam $A_1, A_2, \ldots$ enumeráveis, com $A_i = \{a_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ para todo i natural. Defina

$$\begin{aligned} f : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &\longrightarrow \mathbb{N} \\ a_{i,j} &\longmapsto 2^{i-1}(2j-1) \end{aligned}$$

Basta ver que f é injetora. Para isso, note que cada natural n se escreve de modo único como uma potência de 2 (possivelmente 2^0) por um número ímpar.

Para mostrar (iv), se $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ são dois conjuntos enumeráveis e $C = \{(a_i, b_j) : i, j \in \mathbb{N}^*\}$, a função $f : C \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f((a_i, b_j)) = 2^{i-1}(2j-1)$ é injetora, como no item (iii).

Para mostrar (v), note que $\mathbb{Z}$ pode ser enumerado na seqüência

$$0, 1, -1, 2, -2, \ldots$$

Isto é, a função $f(0) = 0$, $f(n) = 2n$ se $n > 0$ e $f(n) = -2n + 1$ se $n < 0$ é uma bijeção entre os inteiros e os naturais.

Finalmente, para demonstrar (vi), existe uma bijeção entre $\mathbb{Q}$ e um subconjunto $\mathbb{Q}'$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $f(p/q) = (p, q)$, se p/q é irredutível e $q > 0$. Portanto, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = \mathfrak{a} \Rightarrow |\mathbb{Q}| = \mathfrak{a}$. ■

Ora bolas, será que tudo quanto é conjunto infinito tem a mesma cardinalidade dos naturais? Se for assim não tem graça, e podemos esquecer toda essa discussão e dizer simplesmente que um conjunto é finito ou infinito. Felizmente não é esse o caso: o próximo teorema diz que existem infinitos arbitrariamente grandes.

Teorema 2 Dado um conjunto X, seja $\wp(X)$ o conjunto das partes de X, isto é,

$$\wp(X) = \{Y : Y \subset X\}.$$

Então, $|X| < |\wp(X)|$.

Demonstração: É claro que $|X| \leq |\wp(X)|$, pois a função $a \mapsto \{a\}$ é injetora. Seja X um conjunto e $f : X \longrightarrow \wp(X)$ injetora. Considere o conjunto $S = \{a \in X : a \notin f(a)\}$. Suponha que exista um $y \in X$ tal que $S = f(y)$. Se $y \in S$, então $y \in f(y)$. Mas pela definição de S, $y \notin S$. Então devemos ter $y \notin S = f(y)$. Novamente pela definição de S, devemos ter $y \in S$. Temos uma contradição em ambos os casos. Portanto, nenhuma função injetora de X em $\wp(X)$ pode ser bijetora. Logo, $|X| < |\wp(X)|$. ■

5 Operações com números cardinais

Sejam M e N dois conjuntos disjuntos, isto é, $M \cap N = \emptyset$. Se $|M| = m$ e $|N| = n$, definimos:

$$m + n = |M \cup N|.$$

Se M e N não forem disjuntos, podemos construir os conjuntos $M' = \{(m, 0) : m \in M\}$ e $N' = \{(n, 1) : n \in N\}$, os quais são disjuntos e têm cardinalidade m e n, respectivamente. Portanto, sempre podemos definir $m + n$.

Exercício 1 Se $|M| = m = |M'|$ e $|N| = n = |N'|$, mostre que $|M \cup N| = |M' \cup N'|$. Portanto, a soma $m + n$ não depende dos conjuntos M e N escolhidos para defini-la.

Definimos também o produto de números cardinais: se $|M| = m$ e $|N| = n$, então

$$m \cdot n = |M \times N|$$

Exercício 2 Mostre que o produto $m \cdot n$ também independe dos conjuntos M e N escolhidos para defini-lo (desde que, é claro, $|M| = m$ e $|N| = n$).

Finalmente, definimos

$$m^n = |\{f : f \text{ é função com domínio } N \text{ e contra-domínio } M\}|$$

Exercício 3 Adivinhe o enunciado e resolva-o. Dica: o enunciado envolve m^n e independência.

Observe que as definições de soma e produto coincidem com a operação de números naturais quando os conjuntos M e N são finitos. E, se $n \neq 0$, então m^n também coincide. Note ainda que, para qualquer conjunto X, $|\wp(X)| = 2^{|X|}$. De fato, seja $Y \subset X$. Então existe uma função $f_Y : X \longrightarrow \{0, 1\}$ com $f_Y(x) = 0$ se $x \notin Y$ e $f_Y(x) = 1$ se $x \in Y$. Se $Y, Z \subset X$ e $Y \neq Z$, então $f_Y \neq f_Z$. A recíproca também vale, e cada função $g : X \longrightarrow \{0, 1\}$ determina um subconjunto $Y = \{x \in X : g(x) = 1\} \subset X$. Portanto, a função

$$\begin{aligned} h : \wp(X) &\longrightarrow \{f : X \longrightarrow \{0, 1\}\} \\ Y &\longmapsto f_Y \end{aligned}$$

é uma bijeção, e temos $|\wp(X)| = 2^{|X|}$. Por essa razão, o conjunto das partes de X também costuma ser denotado por 2^X.

Como conseqüência da Proposição 2, podemos escrever, para todo natural n,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot 2 = \mathfrak{a} \cdot n = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}$$

É com o objetivo de descobrirmos relações entre $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{f}$ que apresentamos o nosso último teorema:

Teorema 3 Para quaisquer números cardinais m, n, p, vale

$$(m^n)^p = m^{n \cdot p}.$$

Demonstração: Sejam M, N e P conjuntos com cardinalidade m, n e p, respectivamente. Seja M^N a conjunto de todas as funções de domínio N e contra-domínio M. Então

$$\begin{aligned} (m^n)^p &= |\{f : P \longrightarrow M^N\}| \\ &= |\{f : P \longrightarrow \{g : N \longrightarrow M\}\}| \end{aligned}$$

e

$$m^{n \cdot p} = |\{h : N \times P \longrightarrow M\}|$$

Se f tem domínio P e contra-domínio M^N, $f(z) = g_z$ e, para $y \in N$, $g_z(y) = x \in M$, associe a f a função $h(y, z)$, com $h(y, z) = x$. Defina então

$$\begin{aligned} \zeta : (M^N)^P &\longrightarrow M^{N \times P} \\ f &\longmapsto h \end{aligned}$$

Mostraremos que ζ é uma bijeção entre $(M^N)^P$ e $M^{N \times P}$. Para ver que ζ é injetora, suponha que $f_1, f_2 \in (M^N)^P$ e $f_1 \neq f_2$. Então existe um $z \in P$ tal que $f_1(z) = g_1 \neq g_2 = f_2(z)$ e, como $g_1 \neq g_2$, existe $y \in N$ tal que $g_1(y) \neq g_2(y)$. Logo,

$$\zeta(f_1)(y, z) = g_1(y) \neq g_2(y) = \zeta(f_2)(y, z)$$

Para ver que ζ é sobrejetora, seja $h : N \times P \longrightarrow M$. Então, se $(y, z) \in N \times P$, $h(y, z)$ é um elemento determinado de M. Portanto, para cada $z \in P$, $g_z(y) = h(y, z)$ define uma função de N em M, e então $f(z) = g_z$ é uma função de P em M^N. Portanto, $\zeta(f) = h$. ■

Temos $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$, por definição. A função

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow (0, 1) \\ x &\longmapsto \frac{1}{2} + \frac{arctg(x)}{\pi} \end{aligned}$$

é bijetora, e a função $\beta(x) = (x-a)/(x-b)$ é uma bijeção entre (a,b) e $(0,1)$. Portanto, $\mathbb{R} \cong_C (0,1) \cong_C (a,b)$. Como $[a,b] \subset \mathbb{R}$, temos $[a,b] \cong_C \mathbb{R}$, pelo Teorema de Cantor-Bernstein. Temos também que $2^{\mathfrak{a}}$ é o número cardinal do conjunto das seqüências cujos elementos são 0's e 1's. Seja S o conjunto de tais seqüências. Cada número real em $(0,1)$ pode ser expresso unicamente como uma soma

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

onde cada x_i é 0 ou 1 e infinitos x_i's são iguais a 1. Isso é verdade porque, se existir um número y em $(0,1)$ para o qual há um $x_N = 1$ e $x_i = 0$ se $i > N$, então podemos escrever y substituindo x_N por 0 e x_i por 1 se $i > N$. A função $f : (0,1) \longrightarrow S$ que associa a cada número $y \in (0,1)$ a seqüência $(x_i)_{i \geq i}$ é injetora. Por outro lado, a função $g : S \longrightarrow [0,1]$ que associa a seqüência $(x_i)_{i\geq 1}$ ao número real $\sum_{i\geq 1} 2x_i/3^i$ também é injetora (verifique isso). Novamente usando o teorema de Cantor-Bernstein, temos $S \cong_C [0,1]$. Ou seja,

$$2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Entre outras coisas, essa igualdade nos diz que $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$. Mas ela diz mais que isso. Usando o Teorema 3, obtemos

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Mas como

$$\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + n \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} \cdot n \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c},$$

na verdade todas essas desigualdades são igualdades. Uma das conseqüências disso é que $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$, isto é, $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$.

Analogamente, $\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$, por definição. Então

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}},$$

e

$$\mathfrak{f}^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f}.$$

Logo,

$$\mathfrak{f} \leq \mathfrak{f} + n \leq \mathfrak{f} + \mathfrak{a} \leq \mathfrak{f} + \mathfrak{c} \leq \mathfrak{f} + \mathfrak{f} \leq \mathfrak{f} \cdot n \leq \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{a} \leq \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{c} \leq \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} \leq \mathfrak{f}^n \leq \mathfrak{f}^{\mathfrak{a}} \leq \mathfrak{f}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f},$$

e todas essas desigualdades são de fato igualdades.

Esse texto acaba aqui, com a esperança de ter mostrado que, afinal, a Teoria dos Conjuntos não é uma coisa tão boba quanto imaginávamos. Como, porém, o objetivo do texto não era dar um tratamento rigoroso da Teoria dos Conjuntos e seus axiomas, algumas dificuldades lógicas foram deixadas de lado. Por exemplo, em vários pontos do texto são mencionadas "coleções". Mas uma coleção e um conjunto não são a mesma coisa? Aí começamos a entrar num terreno complicado. Podemos mostrar que se, por exemplo, permitirmos que a coleção de todos os conjuntos seja um conjunto, fenômenos bizarros ganham vida. Mas isso talvez seja assunto para outro dia.

Referências

[1] James Foran, *Fundamentals of Real Analysis*, Marcel Dekker Inc., 1991