XLV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (novembro de 2021)

Instruções Gerais

www.opm.mat.br

Caro Responsável,

Este é o material referente à Fase Única da XLV Olimpíada Paulista de Matemática, a OPM-2021, que deve ser realizada entre os dias 4 e 6 de novembro de 2021.

Diante do cenário atual, face à pandemia e às normas sanitárias para realização de atividades extracurriculares nas escolas, a prova poderá ser aplicada, a critério de cada escola participante, no formato presencial ou à distância, no horário que for conveniente, oferecendo assim flexibilidade para a escolas participantes, podendo inclusive utilizar as duas modalidades.

I) A aplicação da prova pode ser presencial, nas dependências da escola, ou à distância, e deve obedecer às seguintes opções de data:

- Aplicação presencial, nas dependências da escola: dia 4 de novembro.
- Aplicação à distância: dias 5 ou 6 de novembro.

II) Em cada prova há 7 problemas. Os participantes devem escolher 5 problemas para resolver. Caso um estudante resolva (totalmente ou parcialmente) mais de 5 problemas, sua nota será a soma das 5 maiores pontuações obtidas dentre os problemas que ele escolheu para resolver, e também vale para pontuações parciais.

III) Para a aplicação presencial, a escola deve providenciar cópias das provas e também as *Folhas de Respostas*, que podem ser papel almaço ou sulfite. Não há um modelo oficial para as *Folhas de Respostas*. Os estudantes devem resolver a prova apenas nas *Folhas de Respostas*.

A escola deverá providenciar uma lista de presença e registrar com fotos e a aplicação da prova.

IV) Para a aplicação à distância, não é necessário imprimir os enunciados, podendo acessá-los diretamente em dispositivos eletrônicos. Cabe a cada escola gerenciar a aplicação à distância para seus alunos, que consiste em enviar os arquivos para os alunos e receber as imagens escaneadas das resoluções em qualidade legível, zelando pela ordem e lisura do processo, assegurando que todos cumpram as normas de aplicação da OPM.

Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são: (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados e (2) calculadora sem acesso à Internet.

Cada participante deverá enviar suas resoluções digitalmente para o responsável pela OPM da sua escola, junto com uma cópia do seu documento de identidade.

V) Em qualquer modalidade: (1) Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet e (2) Todas as respostas devem ser justificadas.

Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis; que estejam legíveis. Soluções digitadas ou ilegíveis não serão consideradas.

VI) A duração da prova é de 4h30min. Cada participante deve escrever na primeira página da sua resolução o horário em que começou e o horário em que terminou a prova. Não é permitido parar a prova e continuar em outro horário.

VII) Os estudantes devem colocar em suas *Folhas de Respostas* os seguintes dados pessoais:

- nome completo,
- nível (α, β ou γ),
- ano/série,
- nome da escola, dizendo se é particular ou pública,
- celular e e-mail para contato,
- data de nascimento.

VIII) Após a aplicação, a escola deve manter sob sua custódia a Prova (e rascunhos, se houver) e a Folha de Respostas. Todo esse material deve ficar guardado até a divulgação do resultado final da OPM 2021.

É vetada qualquer publicação das questões ou comentários sobre a prova até a publicação oficial dos enunciados no site da OPM. A manutenção do sigilo é responsabilidade de todos e há sanções em caso de quebra do sigilo! Após a publicação dos enunciados no site da OPM, a escola poderá entregar as folhas dos enunciados aos participantes, mas deverá manter consigo a Folha de Respostas, pois elas podem ser solicitadas a qualquer momento.

IX) Solicitamos que a escola registre com fotos/vídeos a aplicação e a realização da prova. As imagens poderão ser solicitadas para uso institucional e produção do vídeo anual de registro da OPM.

X) Os gabaritos e os critérios de correção estarão disponíveis para todos os interessados em nosso site a partir de 10 de novembro, para visualização e impressão.

XI) A partir de 10 de novembro, estará disponível em nossa página

http://www.opm.mat.br/relatorio2021

o *Relatório de Desempenho dos Estudantes* na Fase Única da OPM. *Atenção*: é necessário digitar em seu navegador o endereço acima, pois não há link para ele em nossa página.

Para poder acessar o relatório, deverão ser usados o mesmo número de inscrição e a mesma senha enviados para baixar as provas. Caso não os tenha, solicite-os por e-mail.

O *Relatório de Desempenho dos Estudantes* será no formato de uma planilha, na qual deverão ser relacionados, em ordem decrescente de notas, todos os estudantes que participaram da prova.

Após receber o *Relatório de Desempenho dos Estudantes* na Fase Única de cada uma das escolas participantes, a Comissão Organizadora da OPM irá analisá-los e então divulgará, apenas no site da OPM, a *Lista de Premiados*, sendo este o único instrumento válido de divulgação. Assim, recomendamos que nenhum resultado seja antecipadamente divulgado.

Nesse processo, serão analisadas as notas e desempenhos gerais dos participantes e escolas.

As provas de todos os indicados no *Relatório de Desempenho dos Estudantes* deverão ser armazenadas (em papel ou em formato digital) até a divulgação do resultado da OPM 2021, podendo ser requisitadas a qualquer momento para análise. A falta de algum material solicitado poderá implicar na desclassificação do participante ou até da escola da competição. Além disso, outros procedimentos poderão ser adotados e outros documentos solicitados a fim de verificar lisura do processo e a consistência dos resultados apresentados.

XII) Muita atenção: o prazo final para o preenchimento e envio do *Relatório de Desempenho dos Estudantes* é 20 de novembro, sábado.

XIII) A publicação da *Lista de Premiados* e a cerimônia de premiação serão exclusivamente virtuais, por vídeo conferência, em data a ser divulgada.

Qualquer irregularidade deve ser imediatamente comunicada por e-mail.

Boa prova a todos! Agradecemos muito pela sua participação e colaboração.

Comissão Organizadora – OPM 2021.

XLV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2021)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Durante os Jogos Olímpicos de Tóquio, como de costume, acompanhamos o quadro de medalhas. Em geral, a classificação é feita por quantidade de medalhas de ouro, usando como critério de desempate a quantidade de medalhas de prata e, em seguida, a quantidade de medalhas de bronze. De acordo com essa classificação, os dez primeiros países são:

País	Ouro	Prata	Bronze	Total
EUA	39	41	33	113
China	38	32	18	88
Japão	27	14	17	58
Reino Unido	22	21	22	65
Comitê Olímpico Russo	20	28	23	71
Austrália	17	7	22	46
Países Baixos	10	12	14	36
França	10	12	11	33
Alemanha	10	11	16	37
Itália	10	10	20	40

Todavia, houve uma série de reportagens considerando classificações alternativas. Uma foi o total de medalhas, em que se observa, por exemplo, uma troca de ordem entre a terceira, a quarta e a quinta posições.

Outras possibilidades são discutidas pelo economista David Forrest, do Reino Unido, que pesquisa previsões para os Jogos Olímpicos. Uma é por população, que se baseia no argumento de que países mais populosos têm mais chance de terem mais atletas de nível olímpico. O website *Medals per capita* também usa um sistema de pesos nas medalhas, em que ouro tem peso 4, prata tem peso 2 e bronze tem peso 1. Por exemplo, a pontuação dos EUA nesse sistema é $39 \cdot 4 + 41 \cdot 2 + 33 \cdot 1 = 271$. Para classificar os países de acordo com população, divide-se a população pela pontuação, e valores *menores* indicam classificação melhores. Usando esse critério, os países de menor população são privilegiados, com San Marino em primeiro com 8482 habitantes por ponto, Bermudas em segundo com 15979 habitantes por ponto e Bahamas em terceiro com 49155 habitantes por ponto.

Outra possibilidade apontada pelo website *Medals per capita* é o Produto Interno Bruto (PIB), que mede a riqueza de cada país. A conta é quase a mesma: dividimos o PIB (em bilhões de dólares) pela pontuação, e valores menores são melhores. Nesse caso, os três primeiros são San Marino com $0{,}41$ bilhão de dólares por ponto, Jamaica com $0{,}67$ bilhão de dólares por ponto e Geórgia com $0{,}79$ bilhão de dólares por ponto.

A tabela a seguir exibe os dados pertinentes para três países: os EUA, o Brasil e o país sede, o Japão.

País	Ouro	Prata	Bronze	População (milhões)	PIB (bilhões)
EUA	39	41	33	331,0	19485
Brasil	7	6	8	212,6	2054
Japão	27	14	17	126,5	4872

a) Calcule a pontuação de cada país com peso 4 para ouro, peso 2 para prata e peso 1 para bronze.

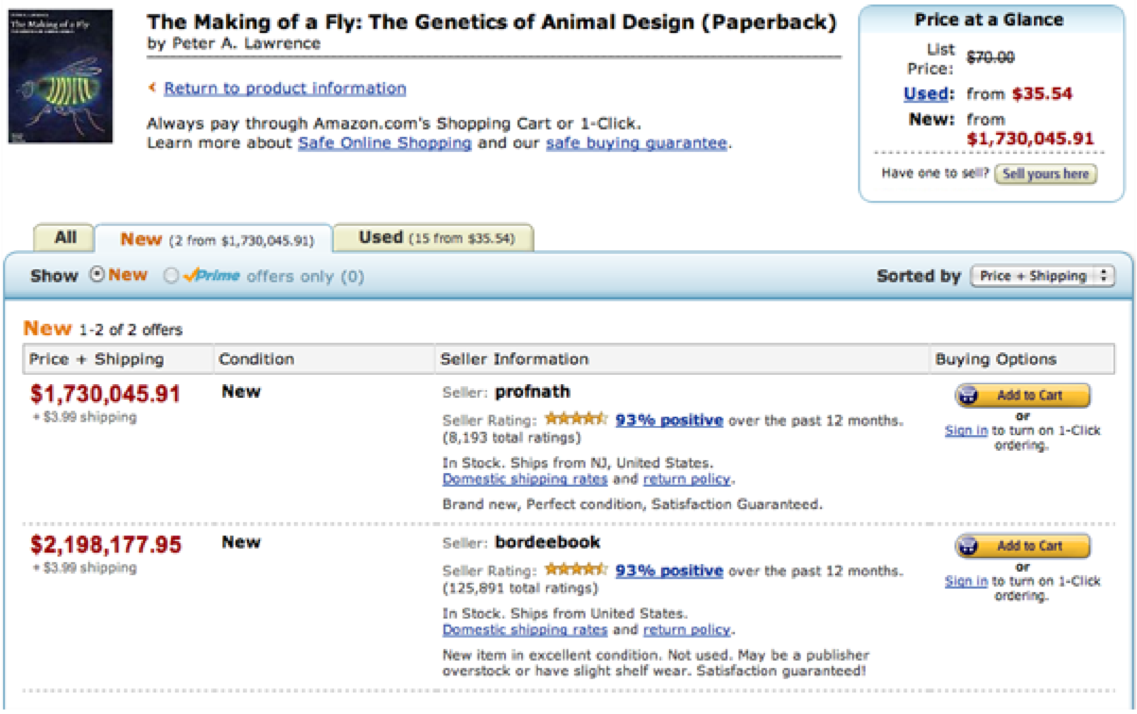
b) Calcule a população por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor.

c) Calcule o PIB por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor.

d) David Forrest propõe também considerar a *renda per capita*, que é o PIB dividido pela população. Calcule a renda per capita por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor. Nesse caso, também é melhor ter valores menores.

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

O pesquisador e biólogo Michael Eisen relatou uma história muito curiosa no seu blog "it is NOT junk" (https://www.michaeleisen.org/blog/). Ao pesquisar sobre o livro *The Making of a Fly* no site Amazon.com, ele encontrou duas opções para comprar o livro novo (imagem a seguir) custando 1.730.045,91 e 2.198.177,95 dólares, além de 3,99 dólares de envio (isso mesmo, não tinha frete grátis).



a) Com o valor cobrado por profnath, seria possível pagar os fretes individuais de 3,99 dólares de quantos livros?

Por melhor que fosse o livro, Michael não acreditou que os dois vendedores esperassem vender por aquele preço e começou a acompanhar os valores para tentar descobrir o que estava acontecendo. Michael notou que todos os dias o vendedor profnath atualizava o seu preço para 0,9983 do preço de bordeebook. Segundo Michael faria sentido ter o livro e tentar vender um pouco mais barato que o maior preço disponível. Algumas horas depois o vendedor bordeebook aumentava o seu preço para 1,270589 do preço de profnath. Para Michael isso poderia significar que bordeebook não tinha o produto e se alguém fizesse o pedido, o livro seria comprado do outro vendedor e bordeebook lucraria com a diferença de preços. Provavelmente esses preços eram atualizados automaticamente através de algoritmos e programas desses vendedores.

b) A partir das informações fornecidas, qual foi aproximadamente o aumento percentual diário do preço do livro do vendedor profnath? Considere que a cada dia há exatamente uma alteração do preço de cada vendedor.

c) Michael acompanhou os preços durante 10 dias. Estime qual foi o maior preço que chegou a custar o livro do vendedor profnath.

No final das contas, Michael reporta que o preço de profnath caiu para apenas 106,23 dólares e foi seguido pelo preço de bordeebook que baixou para 134,97 dólares. Esse livro novo não está mais disponível no site da Amazon.com. (Depois desse descontão, né?)

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

João e Maria são dois irmãos que gostam de participar de corridas de rua. João corre com velocidade constante de 1 km a cada 6 minutos e Maria corre com velocidade variável, alternando entre uma velocidade constante maior por 500m e outra velocidade constante menor por 500m, mas na qual cada 1 km é percorrido em exatamente 6 minutos e 0,5 segundo. Isso significa que os três tempos de Maria nos trechos de 0km a 1km, de 2,3 km a 3,3 km e de 9,6 km a 10,6 km são todos iguais a 6 minutos e 0,5 segundo. Dependendo da corrida, Maria pode ter velocidades maior e menor diferentes, mas sempre demora 6 minutos e 0,5 segundo para percorrer 1 km.

a) Considerando uma corrida de rua de 10 km e que os irmãos correm nos ritmos descritos no enunciado, quanto tempo cada um deles demora para completar a prova?

b) Se Maria levar 3 minutos e 20 segundos para percorrer 500 m na velocidade constante menor entre as duas velocidades constantes que ela fica alternando, quais são, aproximadamente, as duas velocidades constantes (em metros por minuto) que Maria fica alternando durante a corrida?

Maria e João vão correr as 10 milhas de Morretes no Paraná. Suponha que 10 milhas são 16,1 km.

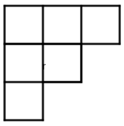
c) Considerando o ritmo descrito no enunciado, quanto tempo João demora para completar as 10 milhas de Morretes?

d) Se Maria começar com a menor velocidade nos primeiros 500 m da prova e seguir alternando como descrito no enunciado, então ela certamente terminará a prova depois de João. Por que podemos concluir isto?

e) Suponha que Maria começa com o ritmo rápido nos primeiros 500 m e segue alternando como o descrito no enunciado. Apesar de Maria ter velocidade menor do que João em todo trecho de 1 km, ela ainda consegue vencer a corrida! Qual deve ser a velocidade aproximada de Maria (em metros por minuto) no ritmo mais rápido para que Maria termine a prova 4 segundos antes que João?

PROBLEMA 4 – $\boxed{\text{Valor: 3 pontos}}$

Uma escadinha de tamanho n é uma figura formada por quadradinhos em que há n quadradinhos na primeira linha, $n-1$ quadradinhos na segunda e assim por diante até 1 quadradinho na linha n e os primeiros quadradinhos de cada linha estão alinhados. Por exemplo, na figura a seguir temos uma escadinha de tamanho 3.

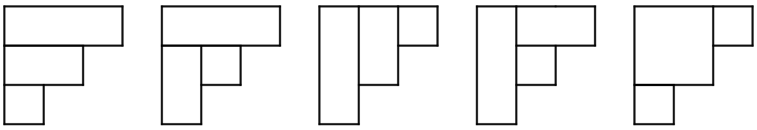


Você sabe quantas maneiras diferentes existem de separar uma escadinha de tamanho n em n retângulos formados por quadradinhos? Pode-se demonstrar (não tente fazer isto agora) que o número de maneiras é igual a

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)\cdot(2n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 \cdot n \cdot (n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

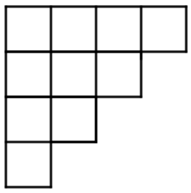
Os números C_n são conhecidos como *números de Catalan*.

Por exemplo, para $n = 3$, temos $C_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 5$ e nas figuras a seguir mostramos as 5 maneiras diferentes. Observe que poderíamos separar a escadinha de tamanho 3 em 6 quadradinhos (que são retângulos, não se esqueça), por exemplo, mas só contamos as maneiras com exatamente 3 retângulos.



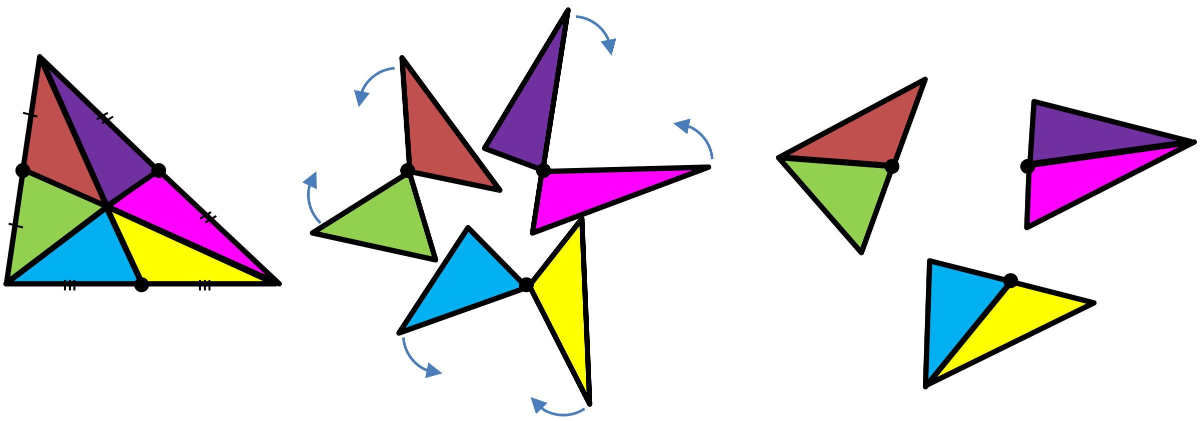
a) Calcule, utilizando a fórmula acima, C_4 e diga quantas maneiras existem de separar uma escadinha de tamanho 4 em 4 retângulos formados por quadradinhos.

b) Mostre na sua folha de respostas todas as maneiras diferentes de separar uma escadinha de tamanho 4 em 4 retângulos formados por quadradinhos.



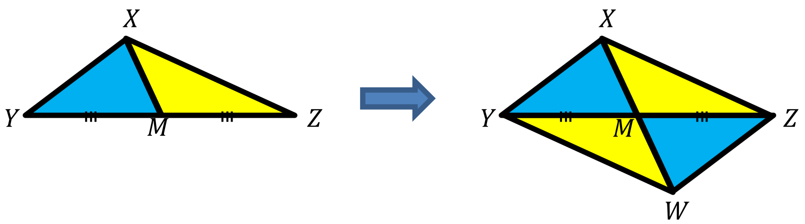
PROBLEMA 5 – $\boxed{\text{Valor: 3 pontos}}$

Tome um triângulo de papel, marque os pontos médios de seus lados e faça os cortes indicados formando seis triângulos menores. Gire esses triângulos em torno dos pontos médios e obtenha três triângulos menores.



Mostraremos nesse problema que esses três triângulos são congruentes, ou seja, seus lados e ângulos têm respectivamente as mesmas medidas.

Uma figura que vai nos ajudar bastante é o *paralelogramo*, que são os quadriláteros com lados opostos paralelos. Um paralelogramo pode ser obtido copiando e girando em 180° um triângulo XYZ em torno do ponto médio M do lado $\overline{YZ}$. Note que XY e ZW formam ângulos iguais com YZ e, por *alternos internos*, XY e ZW são paralelos. O mesmo argumento serve para provar que XZ e YW são paralelos. Assim, $XYWZ$ tem os pares de lados opostos paralelos e é de fato um paralelogramo.

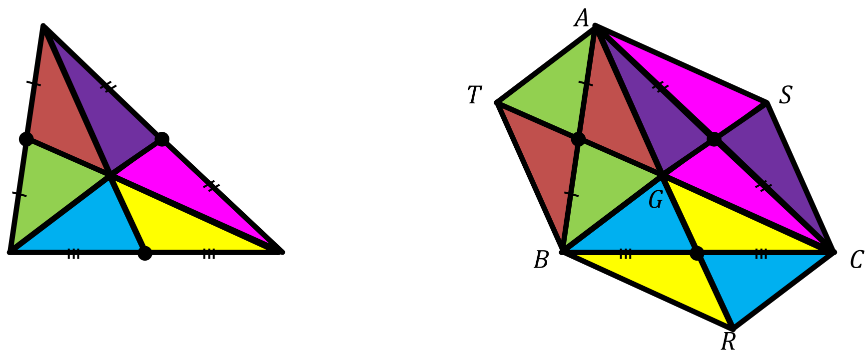


Triângulo XYZ Paralelogramo $XYWZ$

a) Explique por que os pontos X, M e W estão sobre uma mesma reta.

b) Sabemos que XYZ e WZY são triângulos congruentes. Explique por que os triângulos XYW e WZX são congruentes.

Voltando ao nosso problema, fazemos uma cópia de cada triângulo e giramos cada cópia em $180°$. Obtemos assim os paralelogramos $AGBT$, $BGCR$ e $CGAS$.



c) Mostre que $BRGT$ é um paralelogramo.

d) Termine o problema, ou seja, mostre por que os triângulos GBR, BGT e SGC são congruentes.

PROBLEMA 6 – $\boxed{\text{Valor: 4 pontos}}$

Um número racional r, $0 < r < 1$, é um *quadradobrado* quando existem inteiros positivos a e b, tais que $r = \frac{a}{b}$ e r^2 é igual à fração cujo numerador é igual aos dígitos de a repetidos duas vezes uma após a outra exatamente na mesma ordem e cujo denominador é igual aos dígitos de b repetidos duas vezes uma após a outra também na mesma ordem. Por exemplo, $\frac{1}{91}$ é um quadradobrado pois $\frac{1}{91} = \frac{2}{182}$ e $\left(\frac{2}{182}\right)^2 = \frac{22}{182182}$.

Vale a pena observar que $\left(\frac{1}{91}\right)^2 \neq \frac{11}{9191}$ e, por isso, precisamos tomar a fração equivalente $\frac{2}{182}$. É verdade que $\left(\frac{1}{91}\right)^2 = \frac{11}{91091}$, porém não é permitido colocar zeros entre as repetições dos algarismos.

Nesta questão iremos mostrar que existem infinitos racionais quadradobrados.

Pode-se verificar que $\frac{1}{91} = \frac{11}{1001}$. Assim, observe o que acontece quando multiplicamos, por exemplo, a fração $\frac{2}{123}$ por $\frac{1}{91}$:

$$\frac{2}{123} \cdot \frac{1}{91} = \frac{2}{123} \cdot \frac{11}{1001} = \frac{22}{123123}.$$

a) Mostre que ao multiplicarmos uma fração $\frac{a}{b}$ em que a é um inteiro positivo de um dígito e b é um inteiro positivo de três dígitos por $\frac{1}{91}$ obtemos uma fração que é equivalente a uma em que o numerador é igual aos dígitos de a repetidos duas vezes uma após a outra exatamente na mesma ordem e cujo denominador é igual aos dígitos de b repetidos duas vezes uma após a outra também na mesma ordem.

b) Considerando o item anterior, diga o que acontece quando multiplicamos uma fração $\frac{a}{b}$ em que a é um inteiro positivo de dois dígitos e b é um inteiro positivo de seis dígitos por $\frac{101}{1000001}$. *Não se esqueça de que você deve justificar a sua resposta.*

c) Temos que $\frac{101}{1000001} = \frac{1}{9901}$. Mostre que este racional é um quadradobrado.

d) Verifique que $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ e conclua que:

$$\frac{x + 1}{x^3 + 1} = \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

e) Simplifique a fração

$$\frac{10^3 + 1}{10^9 + 1}.$$

c) Mostre que existem infinitos racionais quadradobrados.

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Suponha que nós tenhamos diversos cubos de aresta unitária (que denominaremos *cubinhos*) com cada face pintada de azul ou vermelho. Considere ainda que ambas as cores aparecem em cada um dos cubinhos.

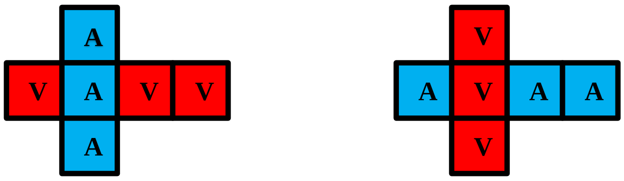
Nesse problema vamos analisar a seguinte questão: *Quantos cubos devemos ter, no mínimo, para que seja possível montar um cubo* $n \times n \times n$, $n \geq 2$, *com cada face monocromática (de uma única cor)?* Este cubo será chamado de *cubo maior*.

Inicialmente, podemos observar que é possível escolher quaisquer $(n-2)^3$ cubinhos para serem os que ficarão escondidos dentro do cubo maior, pois nenhuma das suas faces irá aparecer. Do mesmo modo, para preencher os interiores das n faces podemos escolher quaisquer $6(n-2)^2$ cubinhos, pois apenas uma das suas faces irá aparecer e todos os cubos da caixa possuem faces de ambas as cores. Assim, podemos nos focar nos oito cubinhos que conterão os vértices do cubo maior e os $12(n-2)$ que conterão as arestas, mas não os vértices, de tal cubo. Chamaremos estes $8 + 12(n-2) = 12n - 16$ cubinhos de *moldura* do cubo maior.

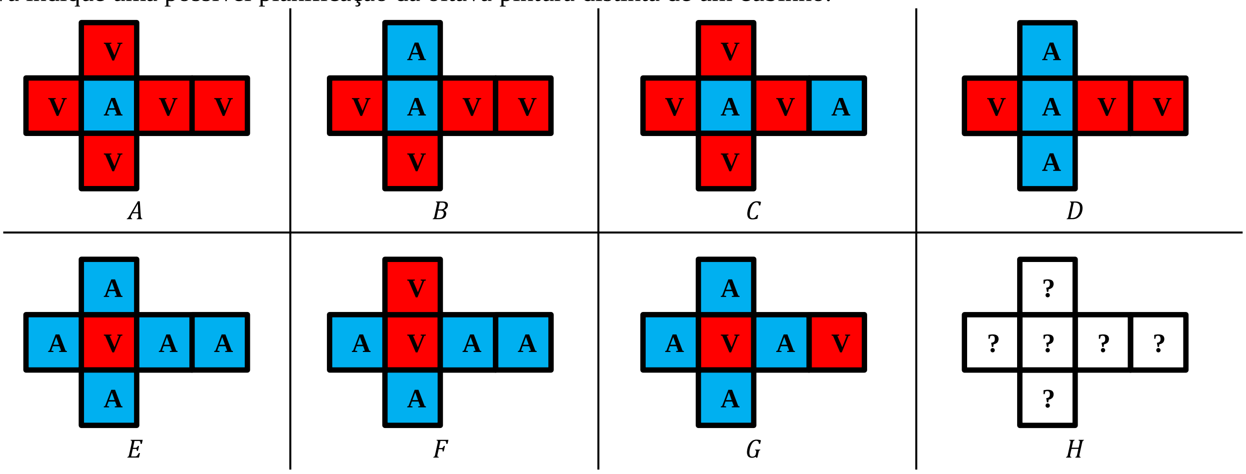
O problema, então, se resume a encontrar o menor número de cubinhos que precisamos para montar a moldura de um cubo $n \times n \times n$ em que cada face é monocromática.

Vamos chamar os oito cubinhos que contêm os vértices do cubo maior de *cantos*. Como três faces destes cubinhos são visíveis após a montagem do cubo maior, há quatro possibilidades de combinações de cores para os cantos, sendo que utilizaremos a letra A para a cor azul e a letra V para a cor vermelha: AAA, AAV, AVV e VVV. Para os $12(n-2)$ cubinhos das arestas que não são cantos e que, portanto, têm duas faces visíveis há três combinações: AA, AV, VV.

Nós consideramos duas pinturas do cubo iguais se uma pode ser obtida da outra por meio de rotações. Por exemplo, as pinturas indicadas pelas planificações a seguir são iguais.



a) A seguir apresentamos a planificação de sete das oito pinturas de um cubinho com as cores azul e vermelha. Na folha de respostas da prova indique uma possível planificação da oitava pintura distinta de um cubinho.

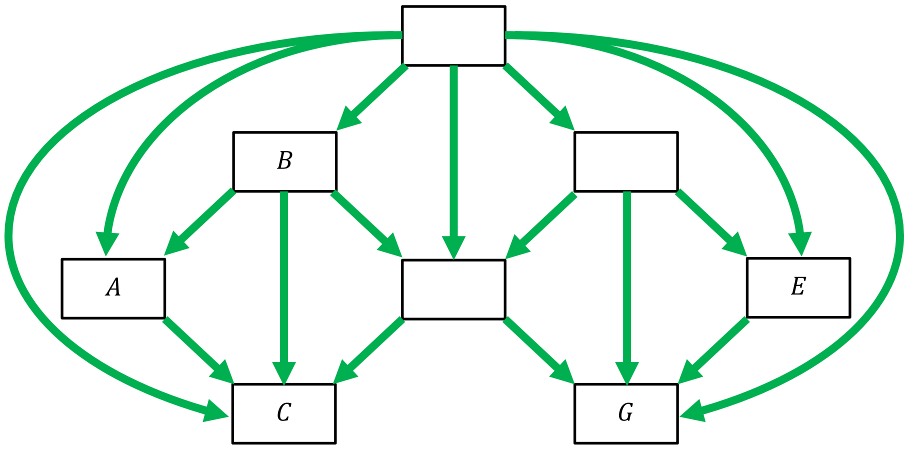


Dica: o exemplo acima de pinturas iguais indica que esse item é mais difícil do que parece.

b) Copie e preencha na sua folha de respostas os espaços que faltam na tabela a seguir. Nela indicamos quantas vezes cada configuração de três faces visíveis e cada configuração de duas faces visíveis aparecem em cada uma das oito pinturas distintas.

Pintura	AAA	AAV	AVV	VVV	AA	AV	VV
A	0	0	4	4	0	4	8
B	0	2	4	2		6	
C	0	0	8	0	0	8	4
D	0			0	2		
E	4	4	0	0	8	4	0
F							
G	0	8	0	0	4	8	0
H							

c) Considerando a tabela acima, podemos fazer um diagrama no qual ligamos duas pinturas por uma flecha se uma delas contém todas as configurações de três faces visíveis que a outra possui. Por exemplo, a pintura A está ligada à pintura C, pois ela contém as configurações AVV e VVV enquanto C possui apenas AVV. A flecha é colocada no sentido daquela cujas configurações estão contidas, como no nosso exemplo de A para C. Copie e complete o diagrama na sua folha de respostas.



d) Determine os valores de n para os quais, utilizando n cubos do tipo C e $10 - n$ do tipo G, não é possível montar um cubo $2 \times 2 \times 2$.

e) Mostre que, se temos quaisquer 11 cubinhos de aresta unitária com cada face pintada de azul ou vermelho, é possível montar um cubo $2 \times 2 \times 2$ com cada face monocromática (ou seja, de uma única cor).

f) Quantos cubinhos, no mínimo, são necessários para termos certeza de que é possível montar um cubo $4 \times 4 \times 4$ com cada face monocromática (ou seja, de uma única cor), não importando quais cubinhos temos? *Não se esqueça de justificar sua resposta.*

XLV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2021)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

• **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**
Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
• A duração da prova é de 4h30min.
• Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
• Todas as respostas devem ser **justificadas**.
• Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
• Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
• Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Durante os Jogos Olímpicos de Tóquio, como de costume, acompanhamos o quadro de medalhas. Em geral, a classificação é feita por quantidade de medalhas de ouro, usando como critério de desempate a quantidade de medalhas de prata e, em seguida, a quantidade de medalhas de bronze. De acordo com essa classificação, os dez primeiros países são:

País	Ouro	Prata	Bronze	Total
EUA	39	41	33	113
China	38	32	18	88
Japão	27	14	17	58
Reino Unido	22	21	22	65
Comitê Olímpico Russo	20	28	23	71
Austrália	17	7	22	46
Países Baixos	10	12	14	36
França	10	12	11	33
Alemanha	10	11	16	37
Itália	10	10	20	40

Todavia, houve uma série de reportagens considerando classificações alternativas. Uma foi o total de medalhas, em que se observa, por exemplo, uma troca de ordem entre a terceira, a quarta e a quinta posições.

Outras possibilidades são discutidas pelo economista David Forrest, do Reino Unido, que pesquisa previsões para os Jogos Olímpicos. Uma é por população, que se baseia no argumento de que países mais populosos têm mais chance de terem mais atletas de nível olímpico. O website *Medals per capita* também usa um sistema de pesos nas medalhas, em que ouro tem peso 4, prata tem peso 2 e bronze tem peso 1. Por exemplo, a pontuação dos EUA nesse sistema é $39 \cdot 4 + 41 \cdot 2 + 33 \cdot 1 = 271$. Para classificar os países de acordo com população, divide-se a população pela pontuação, e valores *menores* indicam classificação melhores. Usando esse critério, os países de menor população são privilegiados, com San Marino em primeiro com 8482 habitantes por ponto, Bermudas em segundo com 15979 habitantes por ponto e Bahamas em terceiro com 49155 habitantes por ponto.

Outra possibilidade apontada pelo website *Medals per capita* é o Produto Interno Bruto (PIB), que mede a riqueza de cada país. A conta é quase a mesma: dividimos o PIB (em bilhões de dólares) pela pontuação, e valores menores são melhores. Nesse caso, os três primeiros são San Marino com 0,41 bilhão de dólares por ponto, Jamaica com 0,67 bilhão de dólares por ponto e Geórgia com 0,79 bilhão de dólares por ponto.

A tabela a seguir exibe os dados pertinentes para três países: os EUA, o Brasil e o país sede, o Japão.

País	Ouro	Prata	Bronze	População (milhões)	PIB (bilhões)
EUA	39	41	33	331,0	19485
Brasil	7	6	8	212,6	2054
Japão	27	14	17	126,5	4872

a) Calcule a pontuação de cada país com peso 4 para ouro, peso 2 para prata e peso 1 para bronze.

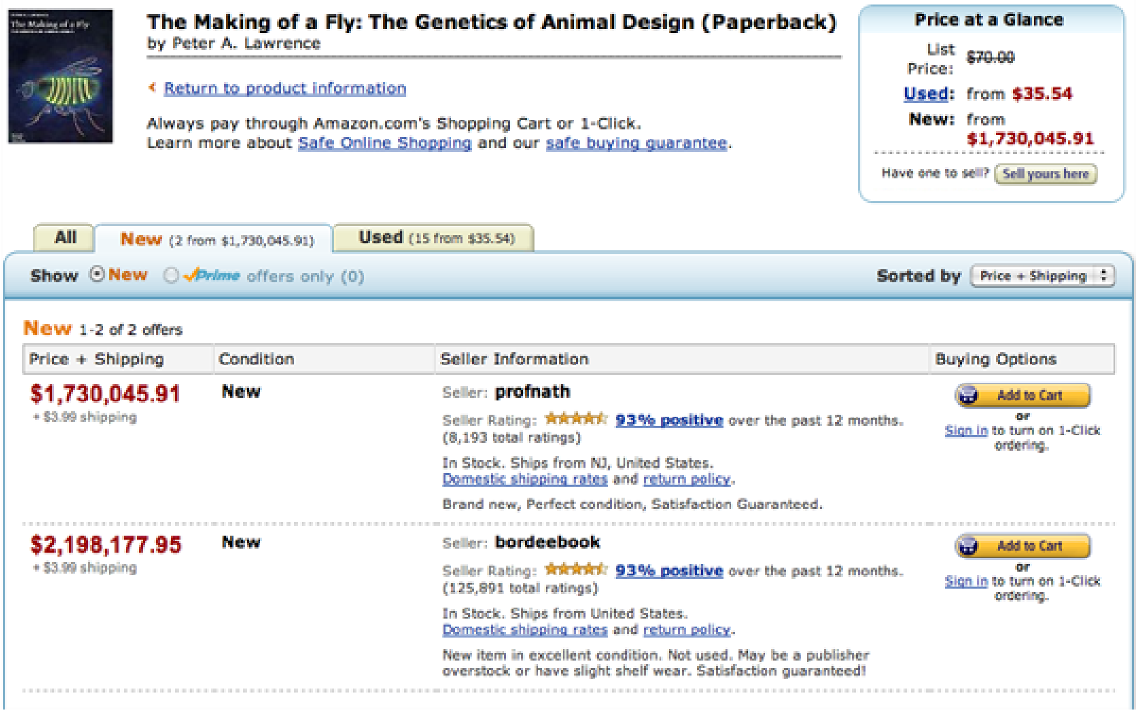
b) Calcule a população por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor.

c) Calcule o PIB por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor.

d) David Forrest propõe também considerar a *renda per capita*, que é o PIB dividido pela população. Calcule a renda per capita por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor. Nesse caso, também é melhor ter valores menores.

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

O pesquisador e biólogo Michael Eisen relatou uma história muito curiosa no seu blog “it is NOT junk” (https://www.michaeleisen.org/blog/). Ao pesquisar sobre o livro *The Making of a Fly* no site Amazon.com, ele encontrou duas opções para comprar o livro novo (imagem a seguir) custando 1.730.045,91 e 2.198.177,95 dólares, além de 3,99 dólares de envio (isso mesmo, não tinha frete grátis).



a) Com o valor cobrado por profnath, seria possível pagar os fretes individuais de 3,99 dólares de quantos livros?

Por melhor que fosse o livro, Michael não acreditou que os dois vendedores esperassem vender por aquele preço e começou a acompanhar os valores para tentar descobrir o que estava acontecendo. Michael notou que todos os dias o vendedor profnath atualizava o seu preço para 0,9983 do preço de bordeebook. Segundo Michael faria sentido ter o livro e tentar vender um pouco mais barato que o maior preço disponível. Algumas horas depois o vendedor bordeebook aumentava o seu preço para 1,270589 do preço de profnath. Para Michael isso poderia significar que bordeebook não tinha o produto e se alguém fizesse o pedido, o livro seria comprado do outro vendedor e bordeebook lucraria com a diferença de preços. Provavelmente esses preços eram atualizados automaticamente através de algoritmos e programas desses vendedores.

b) A partir das informações fornecidas, qual foi aproximadamente o aumento percentual diário do preço do livro do vendedor profnath? Considere que a cada dia há exatamente uma alteração do preço de cada vendedor.

c) Michael acompanhou os preços durante 10 dias. Estime qual foi o maior preço que chegou a custar o livro do vendedor profnath.

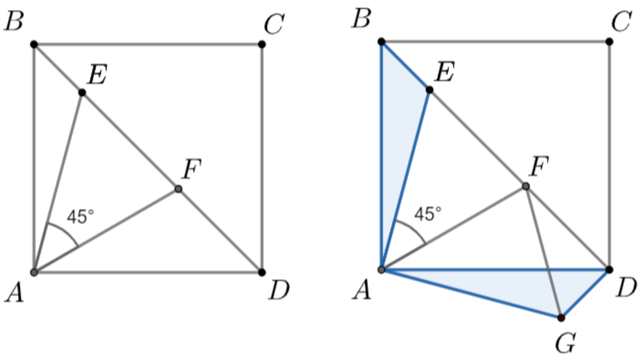
No final das contas, Michael reporta que o preço de profnath caiu para apenas 106,23 dólares e foi seguido pelo preço de bordeebook que baixou para 134,97 dólares. Esse livro novo não está mais disponível no site da Amazon.com. (Depois desse descontão, né?)

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Existem muitos resultados interessantes envolvendo construções geométricas com quadrados. Nesse problema veremos (e demonstraremos) mais um deles.

Sejam os pontos E e F sobre a diagonal $\overline{BD}$ de modo que $m(E\hat{A}F) = 45^\circ$ e E sobre o segmento $\overline{BF}$, como na figura na esquerda; então $BE^2 + FD^2 = EF^2$.

Para a nossa demonstração, vamos considerar, na figura da direita, o triângulo ADG obtido com uma rotação de 90° no sentido horário do triângulo ABE em torno do ponto A.



a) Prove que $m(F\hat{A}G) = 45°$.

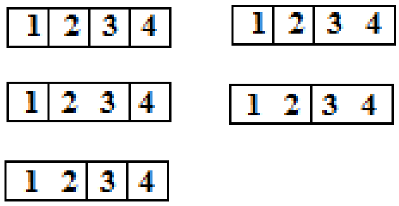
b) Prove que os triângulos EAF e GAF são congruentes e conclua que $EF = GF$.

c) Prove que $m(F\hat{D}G) = 90°$.

d) Conclua a demonstração do resultado apresentado, ou seja, prove que $BE^2 + FD^2 = EF^2$.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Considere uma linha formada por n quadrados unitários (de lado 1). Iremos cobrir tal linha com peças que são quadrados unitários ou dominós 1×2. Tal cobertura deve ser completa, ou seja, nenhum quadrado pode ficar sem uma peça sobre ele; e sem sobreposições, ou seja, não podemos colocar uma peça sobre outra. Por exemplo, apresentamos a seguir as 5 maneiras de cobrir uma linha formada por quatro quadrados unitários:

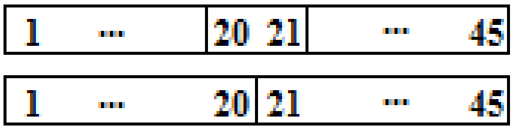


a) Apresente na sua folha de respostas as 8 maneiras de cobrir uma linha formada por cinco quadrados unitários.

Sendo R_n o número de maneiras de cobrir uma linha formada por n quadrados unitários com quadrados unitários ou dominós, verifica-se que $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$, $R_4 = 5$ e $R_5 = 8$. Quem viu (ou verá) a questão da sequência de Fibonacci nesta prova deve estar muito desconfiado! De fato, como $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$, temos $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ e $F_6 = 8$. Assim, temos tudo para imaginar que $R_n = F_{n+1}$.

b) Considerando que a última peça colocada ao cobrirmos a linha com n quadrados unitários é um quadrado ou um dominó, justifique por que $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$, para $n \geq 3$, e conclua que $R_n = F_{n+1}$.

c) Considere uma linha formada por 45 quadrados unitários e observe a fronteira entre o seu 20º e o seu 21º quadrado. Ela pode ser coberta por um dominó ou não. Veja as figuras abaixo. Vale destacar que estamos considerando apenas a fronteira entre os quadrados 20 e 21.



A partir dessa ideia, justifique por que podemos concluir que $F_{46} = F_{21}F_{26} + F_{20}F_{25}$.

PROBLEMA 5 – Valor: 3 pontos

Você já ouviu falar da sequência de Fibonacci? É uma sequência de inteiros em que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores. Em termos matemáticos, a sequência F_n é definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 3$. Seus nove primeiros termos são:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Os termos da sequência de Fibonacci aparecem em vários lugares e em vários problemas, inclusive em muitas edições da OPM. Neste problema, vamos analisar propriedades dos restos que os termos F_n deixam na divisão por um inteiro fixado.

Pode-se provar que os restos de F_n por m se repetem periodicamente. Isto é equivalente a existir um bloco de T_m restos que se repete. Por exemplo, $T_2 = 3$, pois os restos r_n da divisão de F_n por 2 se repetem de três em três termos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
r_n	1	1	0	1	1	0	1	1	0	...

Observe que, quando obtivemos a repetição dos restos iguais a 1 para o quarto e o quinto termo da sequência, já sabíamos que tínhamos encontrado o período. Cada termo é a soma dos dois anteriores e os termos iniciais são justamente também ambos iguais a 1.

a) Calcule T_3.

b) Determine o resto de F_{2021} na divisão por 3.

c) Copie e preencha a tabela abaixo na sua folha de respostas e conclua que $T_{29} = 14$. *Lembre-se que os restos devem ser os da divisão por* 29.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34							
r_n	1	1														

d) Sabe-se que n^7 só pode deixar restos 0, 1, 12, 17 ou 28 na divisão por 29. Utilizando este fato, prove que não existem inteiros positivos x e y tais que $F_x = y^7 - 77$.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Arnaldo e Bernaldo brincam de um jogo de esconder diferente.

Há dezessete caixinhas, numeradas de 1 a 17, colocadas em linha. Inicialmente, Bernaldo esconde uma bala em uma delas. Arnaldo deseja encontrar a bala e Bernaldo tenta fazer que isso demore o maior número de rodadas possível.

A cada rodada, Arnaldo escolhe duas das caixinhas. Se a bala estiver em uma delas, o jogo acabou. Se não estiver, Bernaldo deve, sem Arnaldo ver (é claro!), trocar a bala de caixinha. Ele deve colocá-la em uma vizinha daquela em que a bala estava. Por exemplo, se a bala estava na caixinha 4, ela pode ser colocada na 3 ou na 5. Se estava na caixinha 17, tem de ser colocada na 16, e se estava na caixinha 1, tem de ser colocada na caixinha 2. Arnaldo pode escolher suas caixinhas como quiser, ou seja, não há regras para suas escolhas.

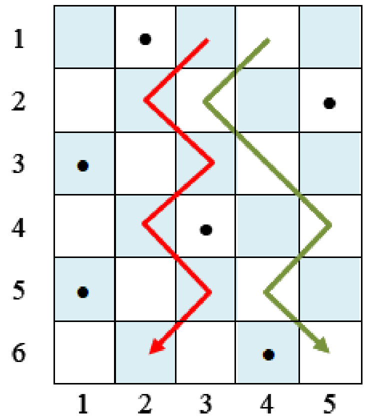
Como Arnaldo não recebe nenhuma informação de Bernaldo durante o jogo, exceto errou/acertou, podemos supor que Arnaldo faz todas as tentativas logo no começo da partida. Isso irá simplificar a análise.

Como a ordem em que elas ocorrem faz diferença, as representaremos por uma sequência de pares.

a) Mostre que se as tentativas de Arnaldo são $t_1 = \{1,2\}; t_2 = \{2,3\}; t_3 = \{3,4\}; \ldots; t_{16} = \{16,17\}$, ele vence o jogo em, no máximo, 16 rodadas.

Para podermos entender a situação melhor, considere o caso mais simples em que Arnaldo escolhe apenas uma caixa por rodada e sejam apenas 5 caixas.

Visando uma modelagem mais adequada do jogo, vamos representar as tentativas de Arnaldo no "tabuleiro" quadriculado mostrado a seguir em que as colunas indicam as caixinhas e as linhas indicam a ordem em que as tentativas são feitas. No exemplo a seguir, Arnaldo escolhe as caixas 2, 5, 1, 3, 1 e 4, nessa ordem. Essas tentativas não garantem a vitória de Arnaldo. De fato, Bernaldo poderia, por exemplo, mover a bala nas caixas $4 \to 3 \to 4 \to 5 \to 4 \to 5$, como representado na linha verde da direita, ou alternar entre as caixas 3 e 2, fazendo $3 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 2$, como representado na linha vermelha da esquerda.



Para os itens b e d a seguir, suponha que Arnaldo pode escolher apenas uma caixinha por rodada.

b) Apresente uma sequência que vença em 6 rodadas, no máximo. Ou seja, apresente uma sequência de jogadas que, não importando as decisões de Bernaldo, encontre a bala.

c) Prove que, em uma solução do jogo – seja na versão com duas escolhas ou com uma só escolha – as tentativas de Arnaldo ao serem representadas no tabuleiro não deixarão duas colunas adjacentes vazias.

d) Mostre que não é possível garantir uma vitória para o jogo com uma escolha e 5 caixinhas em 5 rodadas.

Vamos voltar ao jogo original agora!

e) Apresente uma solução em no máximo 10 rodadas. Você pode desenhar um tabuleiro na sua folha de respostas. *Não se esqueça de que a sua resposta deve ser justificada.*

Será que é possível obter uma solução para 9 rodadas? Veremos nos próximos itens que a resposta é *não*.

Chamamos as $9 \cdot 2 = 18$ casas do tabuleiro correspondentes às escolhas de Arnaldo de *casas marcadas*. Considere a cor que aparece menos entre as casas marcadas; podemos supor que essa cor é azul. Sejam $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ os números das colunas, não necessariamente distintas, das casas azuis marcadas. Vamos adicionar $a_0 = 0$ e $a_{n+1} = 18$ nesta sequência para cobrir os casos que envolvem as bordas do tabuleiro.

f) Explique por que se $a_i \geq a_{i-1} + 3$ para algum i então não se garante que Arnaldo encontre a bala. Não se esqueça que só estamos considerando casas marcadas azuis.

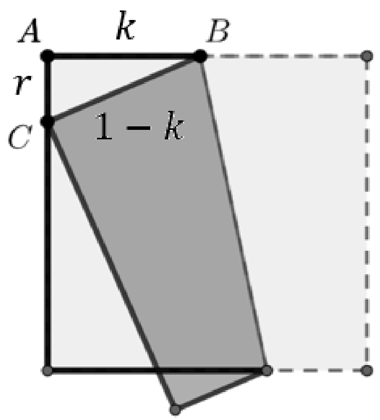
A partir daqui vamos supor que $a_i \leq a_{i-1} + 2$ para $2 \leq i \leq n$, e mostraremos que existe uma coluna j que satisfaz às seguintes condições: (I) há exatamente uma casa azul marcada nessa coluna (ou seja, $j = a_k$ para um valor único de k) e (II) não há casas azuis marcadas nas colunas $j - 1$ e $j + 1$.

g) Mostre que se tal coluna j não existe, então $a_{i+1} \leq a_{i-1} + 3$ para $2 \leq i \leq n - 1$. Em seguida, mostre que $a_n \leq 14$ e conclua que a coluna j existe.

h) Complete a demonstração e mostre que não é possível garantir que que a bala será encontrada em 9 rodadas. Ou seja, não importando quais sejam as escolhas de Arnaldo, existe uma maneira de Bernaldo ir mudando a bala de caixinha e ela nunca ser achada.

PROBLEMA 7 – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

Diremos que um triângulo retângulo com lados de medidas inteiras x, y e z *pode ser obtido por dobradura*, se existe um r racional, $0 < r < 1$, tal que, dobrando um quadrado de lado 1 como na figura a seguir, obtemos um triângulo retângulo semelhante ao de lados x, y e z.



a) Tomando $r = \frac{4}{3+5} = \frac{1}{2}$, mostre que o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 pode ser obtido por dobradura.
b) Tomando $r = \frac{12}{5+13} = \frac{2}{3}$, mostre que o triângulo retângulo de lados 5, 12 e 13 pode ser obtido por dobradura.
c) Mostre que o triângulo retângulo de lados 28, 45 e 53 pode ser obtido por dobradura.
d) Prove que todos os triângulos retângulos com lados de medidas inteiras podem ser obtidos por dobradura.
e) Mostre que cada triângulo retângulo com lados de medidas inteiras é obtido por dobradura para exatamente dois valores distintos de r.
f) Sejam a e b inteiros positivos com $a < b$. Supondo que um triângulo retângulo é obtido por dobradura para $r_1 = \frac{a}{b}$, prove que ele também é obtido para $r_2 = \frac{b-a}{b+a}$.
g) Uma *terna pitagórica* é uma tripla ordenada (x, y, z) formada por três inteiros positivos tais que $x^2 + y^2 = z^2$. Dizemos que uma terna pitagórica (x, y, z) é *primitiva* se, e somente se, $\text{mdc}(x, y, z) = 1$. Utilizando os itens anteriores, demonstre que toda terna pitagórica primitiva pode ser escrita na forma $(b^2 - a^2, 2ab, b^2 + a^2)$ em que a e b são inteiros positivos com $a < b$, $\text{mdc}(a, b) = 1$ e a e b têm paridades diferentes (ou seja, um é par e o outro é ímpar).

XLV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2021)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

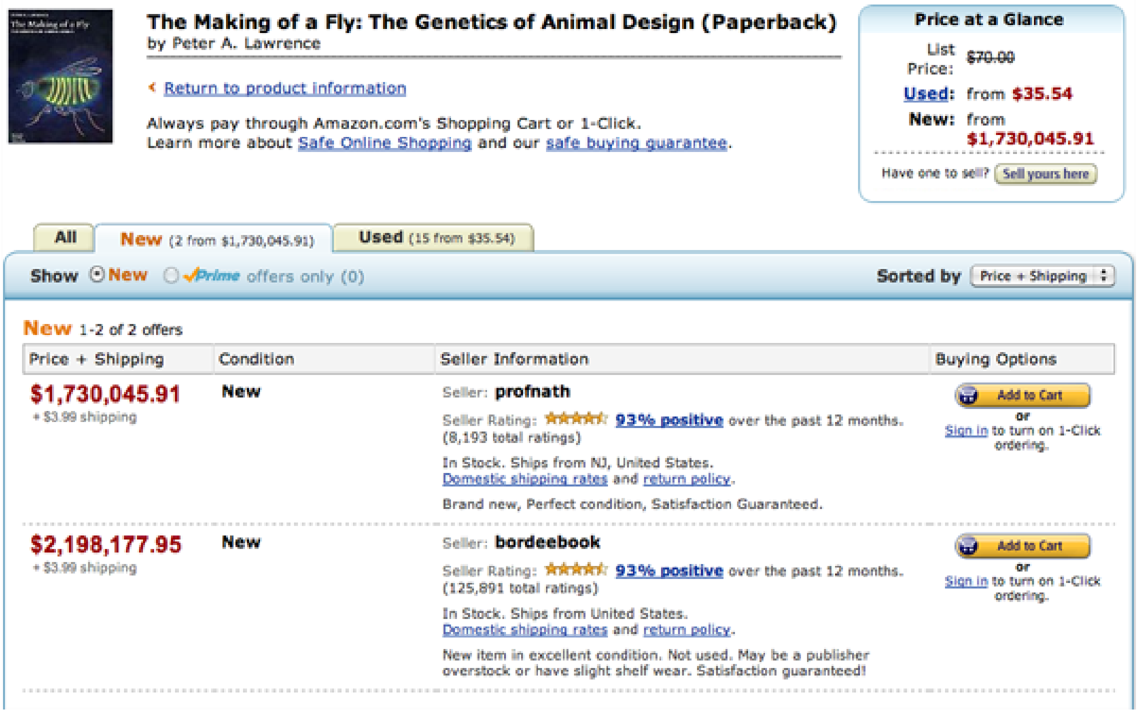
Folha de Perguntas

Instruções:

• Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
• A duração da prova é de 4h30min.
• Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
• Todas as respostas devem ser **justificadas**.
• Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
• Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
• Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

O pesquisador e biólogo Michael Eisen relatou uma história muito curiosa no seu blog “it is NOT junk” (https://www.michaeleisen.org/blog/). Ao pesquisar sobre o livro *The Making of a Fly* no site Amazon.com, ele encontrou duas opções para comprar o livro novo (imagem a seguir) custando 1.730.045,91 e 2.198.177,95 dólares, além de 3,99 dólares de envio (isso mesmo, não tinha frete grátis).



a) Com o valor cobrado por profnath, seria possível pagar os fretes individuais de 3,99 dólares de quantos livros?

Por melhor que fosse o livro, Michael não acreditou que os dois vendedores esperassem vender por aquele preço e começou a acompanhar os valores para tentar descobrir o que estava acontecendo. Michael notou que todos os dias o vendedor profnath atualizava o seu preço para 0,9983 do preço de bordeebook. Segundo Michael faria sentido ter o livro e tentar vender um pouco mais barato que o maior preço disponível. Algumas horas depois o vendedor bordeebook aumentava o seu preço para 1,270589 do preço de profnath. Para Michael isso poderia significar que bordeebook não tinha o produto e se alguém fizesse o pedido, o livro seria comprado do outro vendedor e bordeebook lucraria com a diferença de preços. Provavelmente esses preços eram atualizados automaticamente através de algoritmos e programas desses vendedores.

b) A partir das informações fornecidas, qual foi aproximadamente o aumento percentual diário do preço do livro do vendedor profnath? Considere que a cada dia há exatamente uma alteração do preço de cada vendedor.

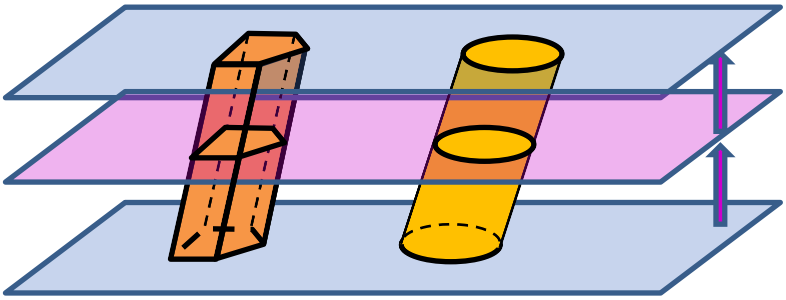
c) Michael acompanhou os aumentos até o preço do vendedor profnath chegar a 18.651.718,08 dólares. Considerando que o aumento diário foi um pouco superior a 25%, aproximadamente, durante quantos dias Michael acompanhou esses preços? Você pode querer utilizar que $\log 2 = 0{,}301$.

No final das contas, Michael reporta que o preço de profnath caiu para apenas 106,23 dólares e foi seguido pelo preço de bordeebook que baixou para 134,97 dólares. Esse livro novo não está mais disponível no site da Amazon.com. (Depois desse descontão, né?)

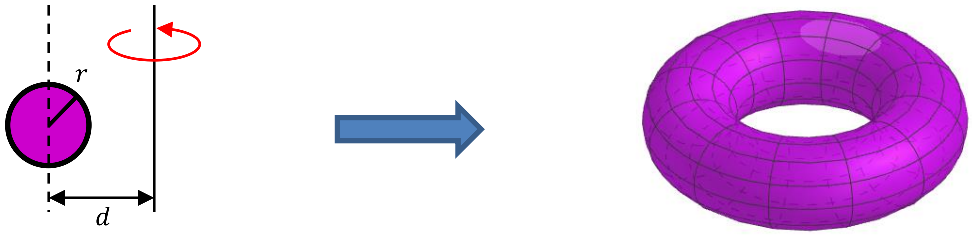
PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

O *princípio de Cavalieri* diz que, dados dois sólidos A e B, se é possível posicioná-los de modo que um plano que se move continuamente se mantendo paralelo à posição inicial sempre determina secções de mesma área em A e B, então seus volumes são iguais.

Uma consequência do princípio de Cavalieri é que o volume de prismas e pirâmides somente dependem da altura e da área da base, e não de sua forma.

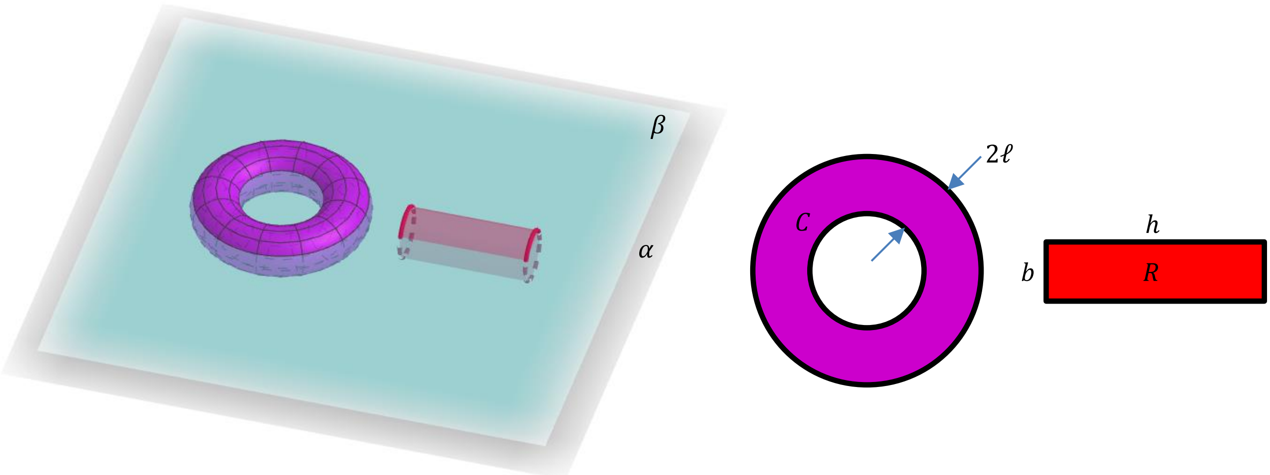


Nesse problema veremos como calcular a área de um *toro*, que é obtido a partir da rotação de um círculo de raio r em torno de um eixo a uma distância $d > r$ de seu centro.



Seja α o plano de simetria do toro, que passa pela circunferência definida pela rotação do centro do círculo em torno do eixo.

Na figura a seguir, temos o toro e um cilindro de base com raio r e altura h cujo eixo está contido em α. Ambos estão seccionados por um plano β paralelo a α, determinando um anel circular C de espessura 2ℓ e um retângulo R de base b e altura h.



a) Se a distância entre os planos α e β é x, calcule ℓ e b em função de x, r e d.

b) Calcule a área desse anel circular C em função de x, r e d.

c) Encontre o valor de h para o qual a área da secção de β no cilindro seja igual à área da secção de β no toro para todo x.

d) Mostre, usando o princípio de Cavalieri, que o volume do toro é $2\pi^2 r^2 d$.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Você já ouviu falar da sequência de Fibonacci? É uma sequência de inteiros em que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores. Em termos matemáticos, a sequência F_n é definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 3$. Seus nove primeiros termos são:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Os termos da sequência de Fibonacci aparecem em vários lugares e em vários problemas, inclusive em muitas edições da OPM. Neste problema, vamos analisar propriedades dos restos que os termos F_n deixam na divisão por um inteiro fixado.

Pode-se provar que os restos de F_n por m se repetem periodicamente. Isto é equivalente a existir um bloco de T_m restos que se repete. Por exemplo, $T_2 = 3$, pois os restos r_n da divisão de F_n por 2 se repetem de três em três termos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
r_n	1	1	0	1	1	0	1	1	0	...

Observe que, quando obtivemos a repetição dos restos iguais a 1 para o quarto e o quinto termo da sequência, já sabíamos que tínhamos encontrado o período. Cada termo é a soma dos dois anteriores e os termos iniciais são justamente também ambos iguais a 1.

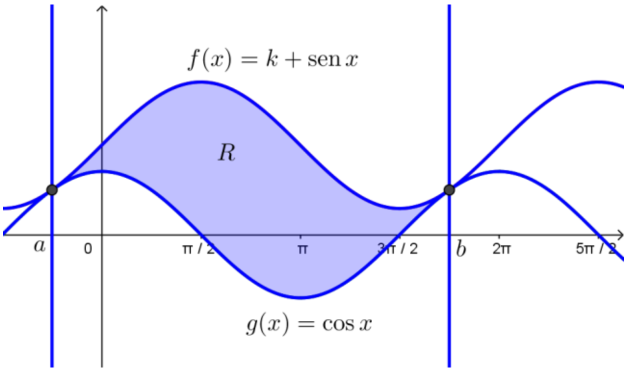
a) Calcule T_3.
b) Determine o resto de F_{2021} na divisão por 3.
c) Copie e preencha a tabela abaixo na sua folha de respostas e conclua que $T_{29} = 14$. *Lembre-se que os restos devem ser os da divisão por* 29.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34							
r_n	1	1														

d) Sabe-se que n^7 só pode deixar restos 0, 1, 12, 17 ou 28 na divisão por 29. Utilizando este fato, prove que não existem inteiros positivos x e y tais que $F_x = y^7 - 77$.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

A seguir exibimos os gráficos de $f(x) = k + \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$, que são tangentes. Exibimos dois pontos consecutivos de tangência, com abscissas $a < 0 < b$.

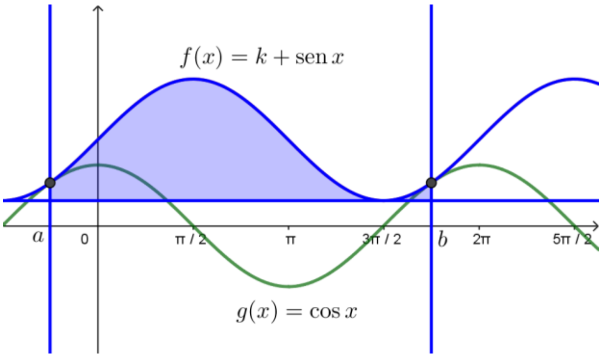


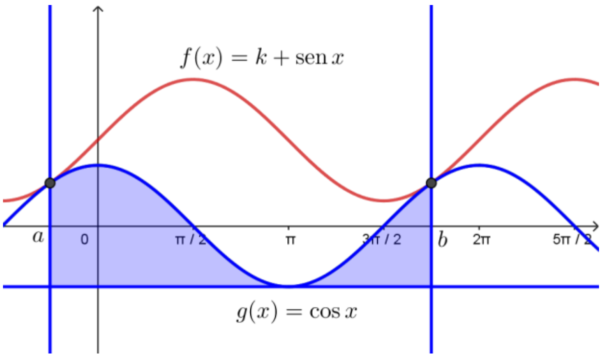
a) O valor de k é o menor real tal que $f(x) \geq g(x)$ para todo x real. Calcule k.

Dica: você pode querer utilizar a expressão de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ *em função de* $\cos x$ *e* $\text{sen}\, x$.

b) Calcule a e b.

Vamos calcular a área da região R sombreada na figura inicial, que lembra o mapa do estado de São Paulo.





c) Na figura acima, à esquerda sombreamos a área abaixo do gráfico de $y = f(x)$ e acima de $y = m$, em que m é o valor mínimo de $f(x)$; à direita, sombreamos a área abaixo do gráfico de $y = g(x)$ e acima de $y = -1$, que é o valor mínimo de $g(x)$. Explique por que essas duas áreas são iguais.

d) Usando o item c, calcule a área de R.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

O *polinômio interpolador de Lagrange* nos permite encontrar um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a $n-1$ (ou o polinômio identicamente nulo) dados os valores de $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$:

$$p(x) = \prod_{j\neq 1} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} p(x_1) + \prod_{j\neq 2} \frac{x-x_j}{x_2-x_j} p(x_2) + \cdots + \prod_{j\neq n} \frac{x-x_j}{x_n-x_j} p(x_n).$$

Por exemplo, para $n=4$,

$$p(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} p(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} p(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} p(x_3) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} p(x_4).$$

Observe que temos, de fato,

$$p(x_1) = \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} p(x_1) + \frac{(x_1-x_1)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} p(x_2) + \frac{(x_1-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} p(x_3) + \frac{(x_1-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} p(x_4)$$

"Abrindo" a conta, obtemos $p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$.

a) Considere um polinômio de grau menor do que 5 tal que $p(0)=1$, $p(1)=3$, $p(2)=9$, $p(3)=27$ e $p(4)=81$. Calcule $p(5)$.

Resolvendo o item a, você deve ter percebido que a fórmula dada não fornece os coeficientes diretamente e isso pode ser um complicador do uso de tal polinômio. Nos próximos itens, aprenderemos uma maneira de determinar diretamente os coeficientes do polinômio interpolador de Lagrange utilizando matrizes e determinantes.

A *matriz de Vandermonde* é uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ cujo elemento a_{ij} é igual a x_i^{j-1}, dados x_1, x_2, ..., x_n. Por exemplo, se A é uma matriz de Vandermonde 4×4,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix}.$$

Pode-se demonstrar que o determinante de uma matriz de Vandermonde é igual a

$$\prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

No exemplo acima, teríamos

$$\det(A) = \prod_{1\le i<j\le 4} (x_j - x_i) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3).$$

Considere que tenham sido dados os valores de $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$. Seja, então, A a matriz de Vandermonde $n\times n$ com $a_{ij} = x_i^{j-1}$.

b) Justifique por que $Ax=b$, sendo $x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{bmatrix}$.

c) Determine o termo independente do polinômio interpolador de Lagrange que obtemos para os valores $p(-1)=1$, $p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$ e $p(4)=5$.

Dica: Você pode desejar utilizar a *Regra de Cramer*. No caso específico deste item, ao considerarmos o sistema linear $Ax=b$:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} p(x_1) & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ p(x_2) & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ p(x_3) & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ p(x_4) & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ p(x_5) & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Os playoffs do Campeonato Paulista de Opmbol (uma variação do quadribol) serão disputados pelos *Borá Simpáticos* contra os *Flora Rica Legais*. Arnaldo é torcedor dos Simpáticos e Bernaldo é torcedor dos Legais. A final será em melhor de sete jogos, ou seja, a primeira equipe a vencer 4 jogos será a campeã. Não há empates no opmbol.

Como os Simpáticos fizeram melhor campanha na temporada regular, eles terão a vantagem de fazer os dois primeiros jogos e os dois últimos (se algum for necessário) em Borá. Os jogos 3, 4 e 5 (se necessário) serão em Flora Rica.

Arnaldo e Bernaldo estarão em um retiro espiritual no Tibete até o final da série de jogos. Suponha que um monge bondoso (como todos os monges) conte para eles que leu no site do New York Times que a série terminou no sexto jogo. Infelizmente, ele não lembra o nome do campeão. Considerando que Arnaldo e Bernaldo têm um ótimo conhecimento de Probabilidades, iremos descobrir qual deles irá ficar mais feliz com tal informação. Nesse problema suponha que ambos os times quando jogam em casa tenham uma probabilidade p fixada, $0{,}5 < p < 1$, de vencer.
a) Mostre que se a série terminar antes do sexto jogo, ou seja, em quatro ou cinco jogos, Flora Rica tem maior probabilidade de ser campeã.
b) Determine quem ficaria mais feliz com a informação do monge: Arnaldo ou Bernaldo? Nenhum dos dois? *Não se esqueça de justificar sua resposta.*

Para o campeonato do ano que vem está sendo considerada uma melhor de 11 jogos e há uma grande discussão de quais dos jogos devem ser na casa do time de melhor campanha. Serão 6 jogos ao todo na casa deste time, mas é preciso definir quais dentre os 11. Com relação a probabilidade de cada time ser campeão, essa discussão faz sentido? Na verdade, não.
c) Mostre que a ordem dos jogos dos playoffs não influencia as chances de cada time ser campeão. Lembre-se que estamos supondo que cada time, quando joga em casa, tem uma probabilidade p fixada, $0{,}5 < p < 1$, de vencer.
Dica: você pode considerar para efeito de cálculo que todos os 11 jogos são disputados mesmo que um time atinja 6 vitórias antes do 11º jogo. Caso você decida usar essa dica, você deve justificá-la na sua resolução.

Uma forma de entender melhor a importância da ordem dos jogos nos playoffs é o conceito de *esperança*. Neste caso, uma estimativa de em quantas partidas os playoffs irão terminar. Para simplificar as contas, vamos considerar uma melhor de três jogos. O time de melhor campanha joga duas partidas em casa. Sendo C o time de melhor campanha jogar em casa e F jogar na casa de seu adversário, as possibilidades para os playoffs são CCF, CFC e FCC.
d) Determine em função de p, definido acima, o número esperado de jogos dos playoffs, isto é,

$$2 \cdot \text{probabilidade de terminar em 2 jogos} + 3 \cdot \text{probabilidade de terminar em 3 jogos}$$

para cada uma das possibilidades das três possibilidades de distribuição dos jogos mostradas acima.
e) Prove que o menor número esperado de jogos é obtido no caso CCF.

PROBLEMA 7 – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

Considere os números inteiros e separe-os em trechos de inteiros consecutivos. Por exemplo, separamos de três em três:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...

Em seguida, eliminamos o último número de cada trecho e escrevemos, na linha seguinte, as somas parciais: 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 5 = 12$, e assim por diante:

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17	~~18~~	...
1	3		7	12		19	27		37	48		61	75		91	108		

Repetimos o procedimento, ou seja, eliminamos o último número da segunda linha de cada trecho e obtemos uma terceira linha com as somas parciais 1, $1 + 7 = 8$, $1 + 7 + 19 = 27$, e assim por diante:

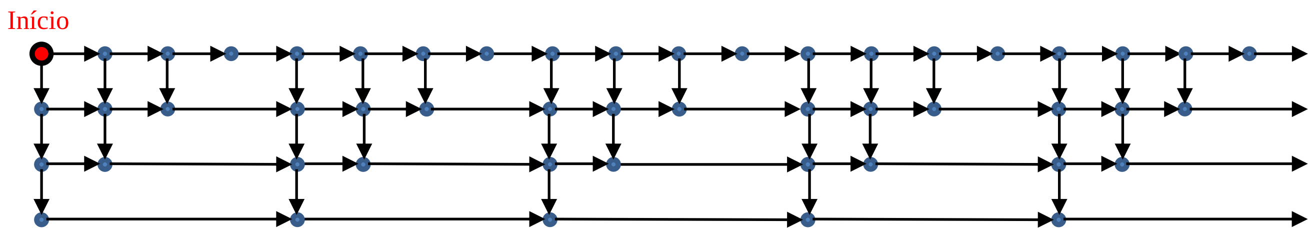
1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17	~~18~~	...
1	~~3~~		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~		61	~~75~~		91	~~108~~		
1			8			27			64			125			216			

Paramos agora que só temos um número em cada parte. Você os reconhece? Sim! São os cubos perfeitos $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ ...

a) Faça o mesmo procedimento agora separando os números de cinco em cinco. Faça a conta com os números de 1 a 20. *Você deve obter na última linha as potências quintas* $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$ *e* $4^5 = 1024$.

Notou o padrão? Esse é o chamado *milagre de Moessner*, descoberto por Alfred Moessner em 1951. A solução que exibiremos a seguir é brilhantemente ilustrada por Burkard Polster em seu canal do YouTube Mathologer.

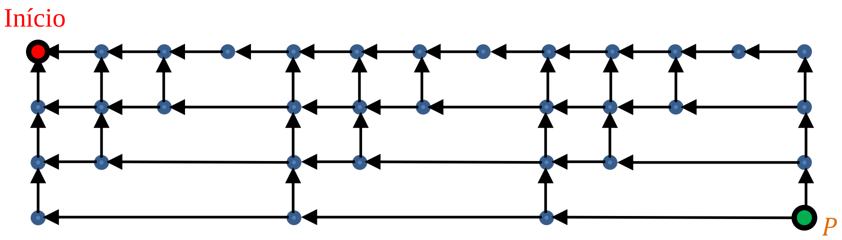
Considere os pontos a seguir. A linha superior, que chamaremos de *linha zero*, temos pontos igualmente espaçados. Na linha seguinte, a *primeira linha*, tiramos pontos da linha zero de modo que sobrem pontos agrupados da mesma forma que os números, e nas próximas linhas eliminamos pontos da mesma forma que os números. Finalmente, pontos são ligados por flechas para a direita e para baixo, e destacamos o ponto superior esquerdo, que chamaremos doravante de *início*. Representamos a divisão de três em três a seguir.



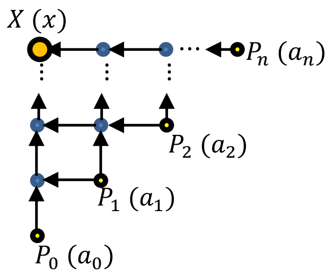
Considere um ponto P qualquer, e considere a quantidade de caminhos do início a P usando as flechas. Note que se há a caminhos do início ao ponto vizinho à esquerda de P e b caminhos do início ao ponto vizinho acima de P, então há $a + b$ caminhos do início a P.

b) Mostre que a quantidade de caminhos a cada ponto em toda linha abaixo da linha zero é igual ao número na conta correspondente ao milagre de Moessner.

É claro que a quantidade de caminhos do início a um ponto P qualquer é igual ao número de caminhos de P ao início revertendo as flechas. Vamos contar esses caminhos.



Suponha que as quantidades de maneiras de chegar aos pontos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ são respectivamente $a_0, a_1, \dots, a_n$, como mostra a figura. Nela, há $n + 1$ pontos na linha 0, n pontos na linha 1, até 2 pontos na linha $n - 1$ e 1 ponto na linha n.



c) Prove que a quantidade de maneiras de chegar ao ponto X começando a partir de algum dos pontos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ é

$$x = \binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 + \cdots + \binom{n}{n} a_n.$$

Você pode querer usar o fato de que o número de caminhos em que se vai para cima k vezes e para a esquerda ℓ vezes é igual à quantidade de anagramas com k $\uparrow$'s e ℓ $\leftarrow$'s, que é $\frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} = \binom{k+\ell}{\ell}$.

d) Mostre que o milagre de Moessner vale para o caso em que os trechos são de cinco números, ou seja, que geramos as potências quintas.

Você pode querer usar o binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n.$$

e) O milagre de Moessner também dá certo se os trechos têm tamanhos diferentes: por exemplo, se eles têm tamanhos 1, 2, 3, ... obtemos 1, 2, 6, 24, 120, ... (os números finais são riscados na hora de montar a próxima linha). Desta vez, a quantidade de linhas é infinita.

~~1~~	2 ~~3~~	4 5 ~~6~~	7 8 9 ~~10~~	11 12 13 14 ~~15~~	...
	~~2~~	6 ~~11~~	18 26 ~~35~~	46 58 71 ~~85~~	
		~~6~~	24 ~~50~~	96 154 ~~225~~	
			~~24~~	120 ~~274~~	
				~~120~~	

Prove que o número obtido no n-ésimo trecho é $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

f) Quantos números há em cada trecho se o número obtido no n-ésimo trecho é $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$? Por exemplo, $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ e $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$. *Justifique sua resposta!*