XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (05 de outubro de 2019)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Na casa de sucos OPSuco, há uma combinação muito pedida, o Mangela, que mistura manga com canela (você deve provar, é uma delícia!) e custa R$ 9,00 o copo de 300 ml.

Arnaldo adora o Mangela e toma um copo todo sábado. Na última vez, quando foi pagar a conta, soube que o preço havia acabado de passar de R$ 9,00 para R$ 11,00.

Como estratégia de vendas e fidelização dos clientes, a OPSuco passou a dar 1 selo para cada R$ 10,00 gastos na loja (a regra é clara: se você gastar R$ 19,99, por exemplo, leva apenas 1 selo). Ao juntar 10 selos, você ganha R$ 10,00 de desconto na sua próxima conta.

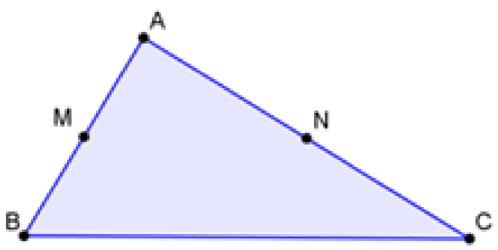
a) Supondo que Arnaldo começará uma cartela em branco no próximo sábado e que ao completar os 10 selos usará o desconto na compra seguinte, quantos reais Arnaldo gastará nos próximos 11 sábados comprando Mangela?

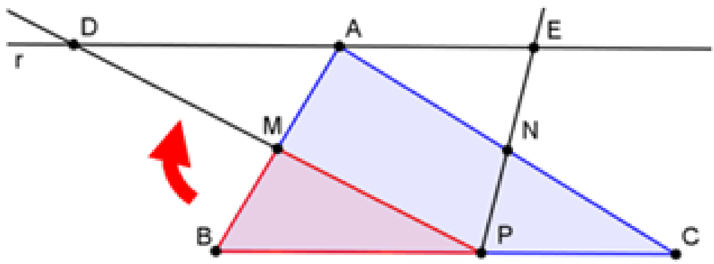
b) Qual foi o aumento percentual do valor obtido no item a em relação ao valor que Arnaldo gastaria nas compras de 11 Mangelas antes da mudança de preço?

Observação: o aumento percentual do valor A em relação ao valor B é $\frac{A-B}{B} \times 100\%$.

PROBLEMA 2

Você sabia que é possível recortar um triângulo qualquer de papel ABC em três pedaços e reorganizar os pedaços para formar um triângulo retângulo? Suponha sem perdas que A é o maior dos ângulos e os pontos M e N são os pontos médios de AB e AC, respectivamente. Trace por A uma reta r paralela a BC e marque um ponto P qualquer sobre o lado BC. As retas PM e PN cortam r nos pontos D e E, respectivamente.





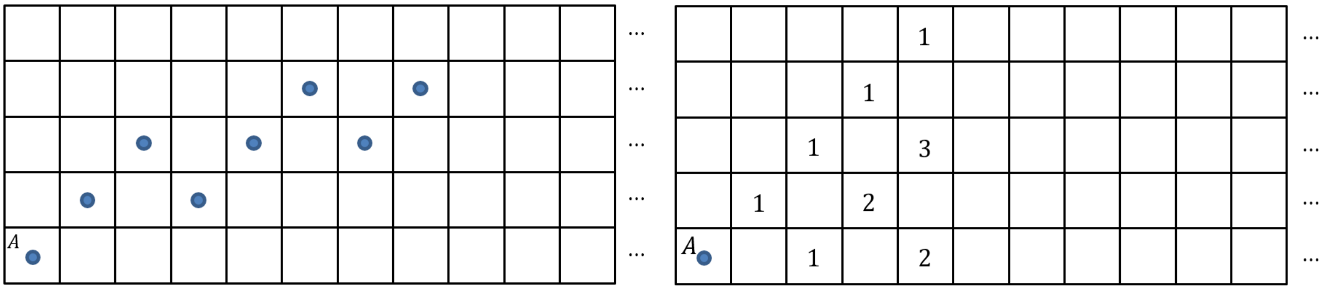
a) Mostre que se recortarmos o triângulo MBP, podemos encaixá-lo exatamente sobre o triângulo MAD (são triângulos congruentes). Para isso basta mostrar que os ângulos dos dois triângulos são iguais e que pelo menos um dos lados correspondentes são iguais.

b) Prove que é possível escolher o ponto P no lado BC de modo que o triângulo PDE construído usando as retas r, PM e PN seja retângulo.

c) Explique por que a escolha do ponto P pedida no item b demonstra que é possível fazer dois cortes retos no triângulo ABC e reorganizar os três pedaços para formar um triângulo retângulo.

PROBLEMA 3

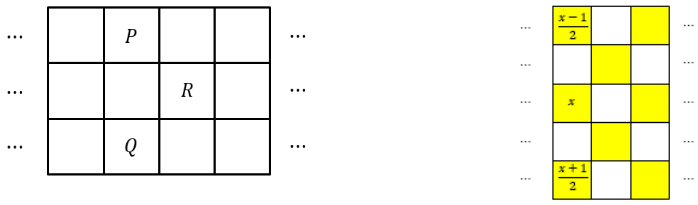
Vamos contar a quantidade de caminhos que começam na casinha A, situada no canto inferior esquerdo e terminam em cada casinha de um tabuleiro 5×2019. Os únicos movimentos permitidos são "diagonal para cima" (↗) e "diagonal para baixo" (↘). Podemos representar os caminhos com uma peça se movendo no tabuleiro. A seguir exibimos parte do tabuleiro e um possível caminho. Podemos escrever no tabuleiro as quantidades de caminhos que terminam em cada casinha. Preenchendo as cinco primeiras colunas, obtemos os seguintes valores (casas que não podem ser atingidas são deixadas em branco):



a) Considere a primeira figura abaixo. Suponha que há x caminhos que terminam na casinha P e y caminhos que terminam na casinha Q, mostradas a seguir. Quantos caminhos terminam na casinha R? Não se esqueça de justificar sua resposta.

b) Preencha o resto do tabuleiro que está na sua *Folha de Respostas*. Ela vai até a décima-primeira coluna.

c) Considere a segunda figura abaixo. Suponha que os valores em uma coluna são $\frac{x-1}{2}$, x e $\frac{x+1}{2}$. Preencha as duas colunas seguintes na sua *Folha de Respostas*.



d) De quantas maneiras podemos chegar à casinha que está na linha do meio e na última coluna? Justifique sua resposta!

PROBLEMA 4

A operação *insere e soma* toma um número inteiro positivo de dois ou mais algarismos, insere um sinal de $+$ entre dois de seus algarismos e troca o número pelo resultado da adição. Por exemplo, começando com o número 3097 podemos realizar a operação para obter $3 + 097 = 100$.

Podemos repetir esse processo até obter um número de um algarismo. Começando com 3097 podemos obter um número de um algarismo com duas operações:

$$3097 \to 3 + 097 = 100 \to 1 + 00 = 1$$

A seguir, veja como reduzimos o número 123456 a um número de um algarismo com 5 operações:

$$123456 \to 12345 + 6 = 12351 \to 123 + 51 = 174 \to 1 + 74 = 75 \to 7 + 5 = 12 \to 1 + 2 = 3$$

a) Mostre uma maneira de reduzir 123456 a um número de um algarismo com 3 operações.

Para cada n chamaremos de $a(n)$ o menor número a partir do qual não é possível chegar num número de um algarismo com menos que n operações. Por exemplo, temos $a(2) = 19$, pois partindo do 19 precisamos de pelo menos duas operações para chegar num número de um algarismo e para qualquer número menor que 19 basta uma operação ou nenhuma (número de um algarismo). Sabe-se que os três primeiros termos desta sequência são $a(1) = 10$, $a(2) = 19$ e $a(3) = 118$.

b) Mostre que duas ou menos operações são suficientes para reduzir qualquer número inteiro positivo menor do que 118 a um número de um algarismo.

Uma ferramenta muito útil quando trabalhamos com algarismos é observar o resto na divisão por 9. No caso da operação insere e soma sabe-se que o resto na divisão por 9 não se altera a cada operação. Veja que no exemplo iniciado com 123456 vemos que todos os números que apareceram deixaram resto 3 na divisão por 9.

c) Dizemos que um número inteiro positivo é uma *potência perfeita* se é igual a x^y com x inteiro positivo e y inteiro maior que 1. Por exemplo, $2^3 = 8$ e $5^2 = 25$ são potências perfeitas. Encontre uma potência perfeita tal que a partir dela e algumas operações é possível chegar ao número 43.

d) Prove que partindo de uma potência perfeita é impossível chegar ao número 2019 após uma ou mais operações.

Você pode querer utilizar que, como 3 é um número primo, se 3 é um divisor de x^y então é um divisor de x.

PROBLEMA 5

Um professor decide fazer um jogo com seus 10 estudantes. Cada um dos deles receberá um chapéu preto com um número de 1 a 9. Essa distribuição é feita de qualquer forma: pode haver ou não números repetidos; é possível, por exemplo, que todos recebam o mesmo número. Cada estudante olha os números dos outros, mas não pode ver o seu próprio número. Os estudantes não podem conversar entre si após receberem seus chapéus. Os estudantes devem gritar ao mesmo tempo um número. Se todos gritarem o mesmo número e houver pelo menos um chapéu com esse número, então eles vencem. Caso contrário, ou seja, se não gritarem todos o mesmo número ou se gritarem um número que não apareça em algum chapéu, então o professor vence.

Os estudantes decidem combinar a seguinte estratégia: cada um grita o número que enxergar na maior quantidade de chapéus. Em caso de empate, ou seja, se ver dois ou mais números aparecendo o mesmo número máximo de vezes, então grita qualquer um desses números.

a) Se os estudantes usarem essa estratégia no exemplo a seguir, quem vence: estudantes ou professor? Lembre-se de explicar como chegou nessa conclusão.

Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Número	3	2	5	1	1	3	3	8	4	3

b) Se os estudantes usarem essa estratégia no exemplo a seguir, quem vence? Lembre-se de explicar como chegou nessa conclusão.

Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Número	4	8	4	3	1	8	3	8	4	1

Depois de jogar algumas vezes, o professor decidiu mudar o jogo. Além dos chapéus, ele dá aos estudantes uma urna e 18 papéis numerados de 1 a 18. Os estudantes podem escolher quais papéis colocar na urna e, depois de receberem seus chapéus, sortearem um número para auxiliar sua estratégia. Todos os estudantes poderão ver o número sorteado da urna.

Alde (um dos estudantes, representado nas tabelas pela letra A) sugere a seguinte estratégia: colocar os papéis de 1 a 9 na urna e todos gritarem o número sorteado.

c) Chamaremos de *chance de vitória dos estudantes* a razão entre a quantidade de números da urna que dá vitória aos estudantes e o total de papéis na urna. Usando a estratégia de Alde no exemplo a seguir (sim, é a mesma situação do item b), qual é a chance de vitória dos estudantes?

Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Número	4	8	4	3	1	8	3	8	4	1

Balde (outro estudante e irmão de Alde, representado nas tabelas pela B) decidiu propor outra estratégia. Ele fez 9 chapéus de papel branco numerados de 1 até 9. Cada estudante, então, faz uma lista em ordem crescente dos 18 números que ele vê (são nove nas cabeças dos estudantes e nove dos chapéus de papel). Ele coloca na urna os papéis de 1 a 18 e, ao sair o número i da urna, cada estudante deve gritar o número na posição i da sua lista.

Considere o seguinte exemplo descrito na tabela a seguir.

Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Número	5	2	1	3	3	4	9	8	4	1

O estudante B deveria fazer a lista abaixo. Note que há apenas um 2 em sua lista, pois ele não vê o chapéu 2 na sua cabeça, mas vê o chapéu de papel com o número 2. Os números nos chapéus de papel estão destacados na tabela.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Número	1	1	1	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6	7	8	8	9	9

d) Usando a estratégia de Balde no exemplo acima e supondo que o número sorteado na urna seja 4, todos os estudantes gritarão o mesmo número? Justifique.

e) Usando a estratégia de Balde no exemplo acima e supondo que o número sorteado na urna seja 13, todos os estudantes gritarão o mesmo número? Justifique.

f) Não importando quais os números nos chapéus, usando a estratégia de Balde a chance de vitória dos estudantes é sempre a mesma. Determine o valor da chance de vitória e explique por que a chance é sempre essa.

R A S C U N H O

Respostas e justificativas devem ser apresentadas somente no *Bloco de Resoluções*.

XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (05 de outubro de 2019)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O *modelo de Cobb-Douglas* prevê que a produção total P de um sistema econômico pode ser expressa em termos da mão de obra M (em pessoas-hora), do capital C (valor da máquina, equipamento, instalações) e constantes k e α, com α entre 0 e 1:

$$P = k \cdot M^{\alpha} \cdot C^{1-\alpha}.$$

Suponha, nos itens seguintes, que $k = 1$, $M = 1600$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

a) Calcule P se $C = 25$.

b) Para obter o dobro do resultado obtido no item a, C deve ser multiplicado por qual número?

c) Há críticas ao modelo de Cobb-Douglas ser aplicado a dois sistemas econômicos. Por exemplo, se num outro sistema $k = 1$, $M = 900$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, temos a produção $P' = 30\sqrt{C'}$, sendo C' o capital para esse novo sistema. Calcule P' para $C' = 144$.

d) Qual seria a equação para a produção total $P + P'$ se usarmos o modelo de Cobb-Douglas para o total de mão de obra $(1600 + 900)$, $k = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e o total $C + C'$ de capital?

Observe que o valor obtido no item d é diferente da soma dos valores obtidos nos itens a e c. Essa diferença é um dos motivos que leva o modelo de Cobb-Douglas, e outros que são derivados dele, a serem bastante usados em microeconomia, mas não em macroeconomia. Nós da comissão elaboradora consideramos esse fato interessante. Obrigado pela compreensão.

Uma versão mais geral do modelo de Cobb-Douglas prevê a produção total P através da equação a seguir

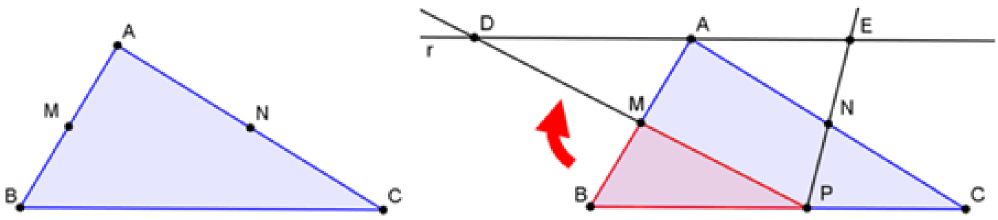
$$P = k \cdot M^{\alpha} \cdot C^{\beta}$$

com as mesmas definições de M e C e constantes k, α e β, com α e β entre 0 e 1.

e) Temos retorno em escala quando P é diretamente proporcional ao par (M, C), ou seja, se trocarmos o par (M, C) por $(A \cdot M, A \cdot C)$, no qual M e C foram multiplicados por A, então obtemos produção $A \cdot P$, isto é, a produção também será multiplicada por A. Qual condição deve ser satisfeita por α e β para termos retorno em escala?

PROBLEMA 2

Você sabia que é possível recortar um triângulo qualquer de papel ABC em três pedaços e reorganizar os pedaços para formar um triângulo retângulo? Suponha sem perdas que A é o maior dos ângulos e os pontos M e N são os pontos médios de AB e AC, respectivamente. Trace por A uma reta r paralela a BC e marque um ponto P qualquer sobre o lado BC. As retas PM e PN cortam r nos pontos D e E, respectivamente.



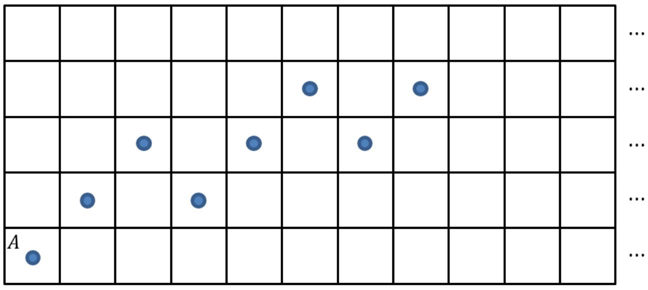
a) Mostre que se recortarmos o triângulo MBP, podemos encaixá-lo exatamente sobre o triângulo MAD (são triângulos congruentes). Para isso basta mostrar que os ângulos dos dois triângulos são iguais e que pelo menos um dos lados correspondentes são iguais.

b) Prove que é possível escolher o ponto P no lado BC de modo que o triângulo PDE construído usando as retas r, PM e PN seja retângulo.

c) Explique por que a escolha do ponto P pedida no item b demonstra que é possível fazer dois cortes retos no triângulo ABC e reorganizar os três pedaços para formar um triângulo retângulo.

d) Explique como recortar o triângulo ABC em três pedaços fazendo dois cortes retos e reorganizar os três pedaços para formar um triângulo isósceles.

PROBLEMA 3
Vamos contar a quantidade de caminhos que começam na casinha A, situada no canto inferior esquerdo e terminam em cada casinha de um tabuleiro 5×2019. Podemos representar os caminhos com uma peça se movendo no tabuleiro. Os únicos movimentos permitidos são "diagonal para cima" (↗) e "diagonal para baixo" (↘). A seguir exibimos parte do tabuleiro e um possível caminho. Podemos escrever no tabuleiro as quantidades de caminhos que terminam em cada casinha. Preenchendo as cinco primeiras colunas, obtemos os seguintes valores (casas que não podem ser atingidas são deixadas em branco):

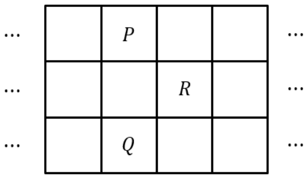


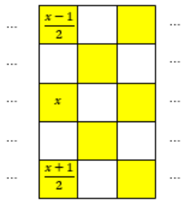
				1							...
			1								...
		1		3							...
	1		2								...
A		1		2							...

a) Considere a primeira figura abaixo. Suponha que há x caminhos que terminam na casinha P e y caminhos que terminam na casinha Q, mostradas a seguir. Quantos caminhos terminam na casinha R? Não se esqueça de justificar sua resposta.

b) Preencha o resto do tabuleiro que está na sua *Folha de Respostas*. Ela vai até a décima-primeira coluna.

c) Considere a segunda figura abaixo. Suponha que os valores em uma coluna são $\frac{x-1}{2}$, x e $\frac{x+1}{2}$. Preencha as duas colunas seguintes na sua *Folha de Respostas*.





d) De quantas maneiras podemos chegar à casinha que está na linha do meio e na última coluna? Justifique sua resposta!

e) Uma sequência é dita *formosa* se todos os seus termos são elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5\}$, o primeiro termo é 1, o último termo é 3 e a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é sempre 1. Por exemplo, uma sequência formosa de 9 termos é $(1,2,3,4,5,4,3,4,3)$. Determine a quantidade de sequências formosas de 2019 termos. Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 4
Muitos números podem ser escritos como a soma ou a subtração de uma potência de 2 (2^a, a inteiro não negativo) e uma potência de 3 (3^b, b inteiro não negativo). Em especial, considerando os números primos, temos, por exemplo:

$$2 = 2^0 + 3^0; \quad 3 = 2^1 + 3^0; \quad 5 = 2^1 + 3^1; \quad 7 = 3^2 - 2^1; \quad 11 = 2^3 + 3^1;$$
$$13 = 2^2 + 3^2; \quad 17 = 2^3 + 3^2; \quad 19 = 3^3 - 2^3; \quad 23 = 2^5 - 3^2$$

a) Escreva os demais primos menores do que 50 como a soma ou a subtração de uma potência de 2 e uma potência de 3.

Mostraremos agora que 53 é o menor primo que não pode ser escrito nessa forma.
b) Verifique que 53 não é a soma de uma potência inteira de 2 e uma potência inteira de 3.

Sendo n e m inteiros positivos, os restos que as potências de n na divisão por m podem ser determinados rapidamente montando uma tabela em que multiplicamos por n o resto da potência anterior e calculamos o resto desse novo número na divisão por m. Por exemplo, para $n = 3$ e $m = 16$:

Potência de $n = 3$	$n \cdot$ resto anterior	Resto por $m = 16$
3^0	---------------	1
3^1	$3 \cdot 1 = 3$	3
3^2	$3 \cdot 3 = 9$	9
3^3	$3 \cdot 9 = 27$	11
3^4	$3 \cdot 11 = 33$	1
3^5	$3 \cdot 1 = 3$	3

3^6	$3 \cdot 3 = 9$	9
3^7	$3 \cdot 9 = 27$	11
3^8	$3 \cdot 11 = 33$	1
3^9	$3 \cdot 1 = 3$	3
3^{10}	$3 \cdot 3 = 9$	9
3^{11}	$3 \cdot 9 = 27$	11
3^{12}	$3 \cdot 11 = 33$	1

Observe que os restos passam a se repetir e podemos concluir, por exemplo, que as potências de 3 que deixam resto 11 na divisão por 16 são $3^3, 3^7, 3^{11}, 3^{15}$, ..., ou seja, da forma, 3^{4k+3}, com k natural. Podemos ainda concluir que nenhuma potência de 3 deixa, por exemplo, resto 5 na divisão por 16.

c) Considere a equação $3^b - 2^a = 53$. Verifique que $a \geq 4$ e, a partir da tabela apresentada anteriormente, prove que essa equação não tem solução.

Assim, para completar a demonstração de que 53 é o menor primo que não pode ser representado como soma ou subtração de uma potência inteira de 2 e uma potência inteira de 3, basta mostrar que a equação $2^a - 3^b = 53$ não tem solução com a e b inteiros não negativos.
d) Verifique que $a \geq 4$ e $b \geq 4$.

e) Faça uma tabela, como a mostrada acima, para $n = 2$ e $m = 27$. Conclua que $a = 18\ell + 9$, com ℓ inteiro não negativo.

Podemos observar ainda que, como $2^a = 3^b + 53$ e $a \geq 4$, $3^b + 53$ deve ser divisível por 16. Logo, considerando a tabela inicial, 3^b deve deixar resto 11 na divisão por 16 e, portanto, $b = 4k + 3$.
Com isso, $2^a - 3^b = 53$ é equivalente a $2^{18\ell+9} - 3^{4k+3} = 53 \Leftrightarrow 8^{6\ell+3} - 3^{4k+3} = 53$.
f) Considerando os restos dos termos da equação na divisão por 7, mostre que ela não possui solução.

PROBLEMA 5

Números irracionais importantes, como π, a razão áurea $\left(\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e valores relacionados, podem ser apresentados de maneiras muito elegantes como produtos infinitos, por exemplo:

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right)\cdots$$

ou como frações contínuas, por exemplo:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Nesse problema, apresentaremos uma maneira de conectar essas representações tão importantes.
a) Sejam b_1 e b_2 números racionais. Considerando y e z tais que:

$$(1 + b_1)(1 + b_2) = 1 + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{y}{z}}$$

Mostre que

$$\frac{b_1 + b_2 + b_1 b_2}{b_1} = \frac{z}{z + y}$$

e conclua que

$$(1 + b_1)(1 + b_2) = 1 + \cfrac{b_1}{1 - \cfrac{b_2(1 + b_1)}{b_1 + b_2 + b_1 b_2}} \; (*)$$

b) Para generalizar o resultado anterior, observe que:

$$(1 + b_1)(1 + b_2)(1 + b_3) = (1 + b_1)\big(1 + (b_2 + b_3 + b_2 b_3)\big)$$

Assim, substituindo b_2 por $b_2 + b_3 + b_2 b_3$ em $(*)$, prove que

$$(1 + b_1)(1 + b_2)(1 + b_3) = 1 + \cfrac{b_1}{1 - \cfrac{b_2(1 + b_1)}{b_1 + b_2 + b_1 b_2 - \cfrac{b_1 b_3 (1 + b_2)}{b_2 + b_3 + b_2 b_3}}}$$

Observação:
(Você não precisa demonstrar as duas fórmulas que escreveremos a seguir, mas pode usá-las nos próximos itens do problema.)
Com um raciocínio similar, obtemos:

$$(1 + b_1)(1 + b_2)(1 + b_3)(1 + b_4) = 1 + \cfrac{b_1}{1 - \cfrac{b_2(1 + b_1)}{b_1 + b_2 + b_1 b_2 - \cfrac{b_1 b_3 (1 + b_2)}{b_2 + b_3 + b_2 b_3 - \cfrac{b_2 b_4 (1 + b_3)}{b_3 + b_4 + b_3 b_4}}}}$$

e, em geral:

$$(1 + b_1)(1 + b_2)(1 + b_3)(1 + b_4)\cdots(1 + b_n) =$$
$$1 + \cfrac{b_1}{1 - \cfrac{b_2(1 + b_1)}{b_1 + b_2 + b_1 b_2 - \cfrac{b_1 b_3 (1 + b_2)}{b_2 + b_3 + b_2 b_3 - \cfrac{b_2 b_4 (1 + b_3)}{b_3 + b_4 + b_3 b_4 - \cfrac{\ddots}{b_{n-2} + b_{n-1} + b_{n-2} b_{n-1} - \cfrac{b_{n-2} b_n (1 + b_{n-1})}{b_{n-1} + b_n + b_{n-1} b_n}}}}}}$$

Iremos, agora, aprender a fazer a manipulação algébrica necessária para chegar em uma belíssima representação de $\frac{\pi}{2}$.

c) Sejam, para m inteiro positivo,

$$b_{2m-1} = -\frac{1}{2m}, b_{2m} = \frac{1}{2m};$$

ou seja,

$$b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = -\frac{1}{4}, b_4 = \frac{1}{4}, b_5 = -\frac{1}{6}, b_6 = \frac{1}{6}, \cdots$$

Mostre que:
Sendo, $m \geq 3$,

$$B_{2m} = \cfrac{b_{2m-3}b_{2m-1}(1+b_{2m-2})}{b_{2m-2} + b_{2m-1} + b_{2m-2}b_{2m-1} - \cfrac{b_{2m-2}b_{2m}(1+b_{2m-1})}{b_{2m-1} + b_{2m} + b_{2m-1}b_{2m}}}$$

$$i) B_{2m} = \frac{1}{2(m-1)}\left(\frac{2m-1}{1+(2m-1)(2m)}\right)$$

$$ii)\ \frac{b_{2m-4}b_{2m-2}(1+b_{2m-3})}{b_{2m-3} + b_{2m-2} + b_{2m-3}b_{2m-2} - B_{2m}} = -\frac{1}{2(m-2)}\left(\cfrac{2m-3}{1+\cfrac{(2(m-1))(2m-1)}{1+(2m-1)(2m)}}\right)$$

Utilizando as fórmulas do item anterior, verifica-se que:

$$\frac{2}{\pi} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots = 1 - \cfrac{1}{2+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\cfrac{4\cdot 5}{1+\cfrac{5\cdot 6}{\ddots}}}}}}$$

Apesar do belo padrão apresentado por essa identidade, podemos encontrar algo relacionado ainda mais elegante. Vamos lá!
Considere

$$Q = \cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\cfrac{4\cdot 5}{1+\cfrac{5\cdot 6}{\ddots}}}}}$$

Então

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1}{2+Q} = \frac{1+Q}{2+Q}$$

e, portanto,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2+Q}{1+Q} = 1 + \frac{1}{1+Q}$$

d) Justifique por que podemos concluir que:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1/2+\cfrac{1}{1/3+\cfrac{1}{1/4+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (05 de outubro de 2019)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A operação *insere e soma* toma um número inteiro positivo de dois ou mais algarismos, insere um sinal de $+$ entre dois de seus algarismos e troca o número pelo resultado da adição. Por exemplo, começando com o número 3097 podemos realizar a operação para obter $3 + 097 = 100$. Podemos repetir esse processo até obter um número de um algarismo. Começando com 3097 podemos obter um número de um algarismo com duas operações:

$$3097 \to 3 + 097 = 100 \to 1 + 00 = 1$$

A seguir reduzimos o número 123456 a um número de um algarismo com 5 operações:

$$123456 \to 12345 + 6 = 12351 \to 123 + 51 = 174 \to 1 + 74 = 75 \to 7 + 5 = 12 \to 1 + 2 = 3$$

a) Mostre uma maneira de reduzir 123456 a um número de um algarismo com 3 operações.

Para cada n chamaremos de $a(n)$ o menor número a partir do qual não é possível chegar num número de um algarismo com menos que n operações. Por exemplo, temos $a(2) = 19$, pois partindo do 19 precisamos de pelo menos duas operações para chegar num número de um algarismo e para qualquer número menor que 19 basta uma operação ou nenhuma (número de um algarismo). Sabe-se que os três primeiros termos desta sequência são $a(1) = 10$, $a(2) = 19$ e $a(3) = 118$.

b) Mostre que duas ou menos operações são suficientes para reduzir qualquer número inteiro positivo menor do que 118 a um número de um algarismo.

Uma ferramenta muito útil quando trabalhamos com algarismos é observar o resto na divisão por 9. No caso da operação insere e soma sabe-se que o resto na divisão por 9 não se altera a cada operação. Veja que no exemplo iniciado com 123456 vemos que todos os números que apareceram deixaram resto 3 na divisão por 9.

c) Dizemos que um número inteiro positivo é uma *potência perfeita* se é igual a x^y com x inteiro positivo e y inteiro maior que 1. Por exemplo, $2^3 = 8$ e $5^2 = 25$ são potências perfeitas. Prove que partindo de uma potência perfeita é impossível chegar ao número 2019 após uma ou mais operações.

d) Encontre uma potência perfeita tal que a partir dela e algumas operações é possível chegar ao número 43.

PROBLEMA 2

Em probabilidade, dizemos que dois eventos A e B são *independentes* quando a probabilidade de ocorrer A e B é igual ao produto das probabilidades de ocorrer A e de ocorrer B. Simbolicamente,

$$A \text{ e } B \text{ são independentes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Também podemos definir independência entre mais de dois eventos. Dizemos que um conjunto S de eventos é *mutuamente independente* quando a probabilidade da ocorrência de qualquer subconjunto de S é igual ao produto dos eventos individuais do subconjunto. Por exemplo, três eventos A, B e C são mutuamente independentes quando

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B); \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C); \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C);$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

a) Considere o experimento de sortear um número ao acaso do conjunto $\{1; 2; 3; 4\}$. Cada número tem a mesma chance de ser sorteado. Defina os eventos:

- A: "sortear um número par";
- B: "sortear um número primo" (lembre-se de que 1 não é primo!);
- C: "sortear um número estritamente menor do que 3".

a.1) Calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ e $P(A \cap B \cap C)$.
a.2) Mostre que se A e B são independentes, A e C são independentes, e B e C são independentes, então não necessariamente A, B e C são mutuamente independentes.

Uma aplicação curiosa de probabilidade é no cálculo de $\varphi(n)$ que para cada inteiro $n \geq 2$ é igual à quantidade de números do conjunto $A_n = \{1,2,\dots,n-1,n\}$ que não possuem fatores em comum com n. Veja que a probabilidade de escolhendo ao acaso um número de A_n obter um número sem fatores em comum com n é $\frac{\varphi(n)}{n}$.

b) Seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ a fatoração de n em potências de primos. Qual é a probabilidade de escolhendo ao acaso um número de A_n obter um número que **não** é divisível por p_1?

c) Pode-se provar que o conjunto de eventos **não** ser divisível por p_i em A_n para cada $i = 1,2,\dots,k$ é mutuamente independente. A partir desse fato (você não precisa prová-lo nessa prova) determine uma fórmula para $\varphi(n)$ usando os fatores primos de n e calcule $\varphi(2019)$.

PROBLEMA 3
Uma formiga de dimensões desprezíveis (foi mal, formiga) começa a caminhar na ponta esquerda de uma corda elástica, em direção à ponta direita. A velocidade da formiga é constante e igual a 1 cm/s. A cada segundo a formiga caminha 1 cm, e imediatamente após essa caminhada a corda estica homogeneamente. Isso quer dizer que a formiga também vai imediata e proporcionalmente para a direita com a corda. Por exemplo, se ela estava bem no meio da corda antes de ela esticar, ela continua no meio da corda depois.

Sejam L_0 o comprimento inicial da corda e L_n o comprimento, em cm, da corda após n segundos (e, portanto, n "esticadas"). Queremos a distância d_n, em cm, da ponta esquerda da corda que a formiga está após n segundos.
a) Mostre que $d_n = \frac{L_n}{L_{n-1}}(d_{n-1} + 1)$ se $d_n \leq L_n$.
Estamos interessados em saber para quais sequências de L_i, $i = 1,2,\dots$ a formiga consegue chegar à ponta direita da corda. Para tanto, é mais conveniente calcular a razão $r_n = \frac{d_n}{L_n}$ e verificar se essa razão pode ser maior ou igual a 1.
b) Mostre que $r_n = \frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} + \cdots + \frac{1}{L_{n-1}}$.
c) Suponha que $L_0 = 100$ (ou seja, a corda tem inicialmente 1 metro) e que a cada segundo ela cresça 1 metro. Mostre que a formiga consegue chegar à outra ponta da corda e estime o tempo em que consegue fazer isso.
Você pode querer utilizar o fato de que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \cong \ln n,$$

em que $\ln n = \log_e n$, *e* $\cong 2{,}72$.
d) Suponha agora que $L_0 = 3$ (ou seja, a corda tem inicialmente 3 cm) e a corda dobre de tamanho a cada segundo. Mostre que a formiga não consegue chegar à outra ponta da corda.

Algumas teorias da expansão cosmológica do universo usam o modelo descrito acima para verificar se galáxias muito distantes podem ser observadas. No caso, a formiga representa a luz emanando da galáxia e as pontas das cordas representam a galáxia (na esquerda) e a Terra (na direita). A velocidade da formiga é a velocidade da luz e a corda esticando representa a expansão do universo.
Muitas teorias supõem que o universo se expande de modo quase exponencial; em outras palavras, a distância entre a galáxia e a Terra é, a cada segundo, multiplicada por uma constante $k > 1$.
e) Supondo que o universo se expande exatamente de modo exponencial, mostre que galáxias suficientemente distantes da Terra nunca poderão ser observadas.

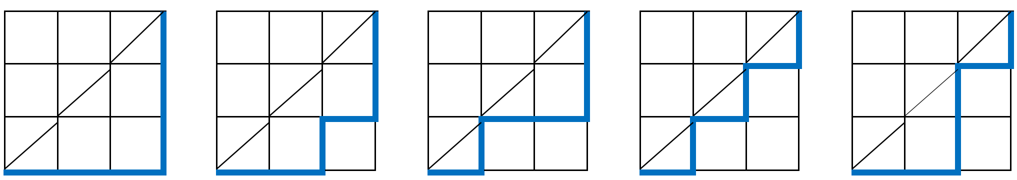
PROBLEMA 4
Os *números de Catalan* contam a quantidade de caminhos que ligam o canto inferior esquerdo ao canto superior direito de um quadrado $n \times n$ que satisfazem às seguintes condições:

- O caminho consiste em $2n$ movimentos, cada um sendo de uma unidade para a direita (→) ou uma unidade para cima (↑);
- O caminho nunca fica acima da diagonal que liga o início ao final do caminho.

Pode-se provar (não faça isso agora, faça em casa!) que tal quantidade é

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$

A seguir exibimos os $C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{2\cdot 3}{3} = 5$ caminhos em um quadrado 3×3:



Nesse problema, estamos interessados no determinante da matriz cujas entradas são os números de Catalan; sendo mais preciso, $a_{ij} = C_{i+j-2}$:

$$A_n = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{n-1} \\ C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_n \\ C_2 & C_3 & C_4 & \dots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \dots & C_{2n-2} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}$.

A definição de determinante nos diz que o determinante de uma matriz quadrada é a soma de $n!$ produtos de n termos, um de cada linha e cada coluna, multiplicado por $(-1)^v$, em que v é a *quantidade de inversões* e é definida da seguinte forma: sendo $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$ o produto, considere a sequência $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, que é uma permutação de $(1,2,\dots,n)$; v é a quantidade de pares (i_k, i_ℓ) com $k < \ell$ e $i_k > i_\ell$. Ou seja,

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^v a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}.$$

Por exemplo, para o determinante 3×3, temos os seguintes $3! = 6$ termos:

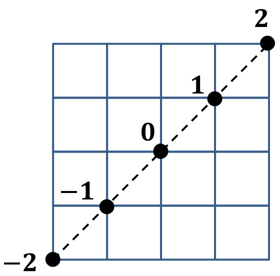
$(-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}$ $\pi = (1,2,3)$ $v = 0$	$(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}$ $\pi = (1,3,2)$ $v = 1$ (3,2)	$(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}$ $\pi = (2,1,3)$ $v = 1$ (2,1)
$(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}$ $\pi = (2,3,1)$ $v = 2$ (2,1 e 3,1)	$(-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}$ $\pi = (3,1,2)$ $v = 2$ (3,1 e 3,2)	$(-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}$ $\pi = (3,2,1)$ $v = 3$ (2,1; 3,1 e 3,2)

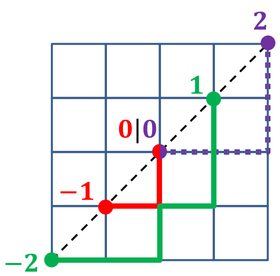
Logo $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

a) Calcule o determinante da matriz A_3 definida acima.

Usaremos a definição de determinante e ideias combinatórias para calcular determinante de A_n para todo n. Para tanto, vamos usar a interpretação combinatória de C_k. Usaremos um quadrado de lado $2n-2$ e os pontos sobre uma de suas diagonais; esses pontos são numerados de $-(n-1)$ a $n-1$. Para $n = 3$, temos a figura da esquerda.

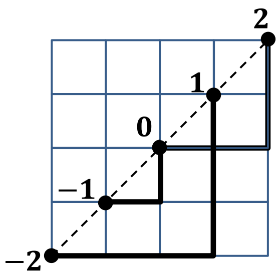
b) Usando os números de Catalan, calcule quantas são as triplas de caminhos (x, y, z) com x ligando os pontos -2 a 1, y ligando -1 a 0 e z ligando 0 (que agora é início em vez de fim de caminho) a 2, sendo que todos eles vão só para a direita ou para cima e nunca ficam acima da diagonal indicada. Na figura a seguir, exibimos os pontos e uma possível tripla de caminhos.





c) Relacionaremos cada n-upla de caminhos com uma permutação $(i_1, i_2, \dots, i_n)$: ligamos 0 a $i_1 - 1$; -1 a $i_2 - 1$; …; $-(n-1)$ a $i_n - 1$. Quantas n-uplas de caminhos são relacionadas com a permutação $(i_1, i_2, \dots, i_n)$?

Existem permutações diferentes que podem ser relacionadas com n-uplas de caminhos que usem os mesmos segmentos. Por exemplo, os segmentos destacados na figura a seguir pode ser obtida a partir de uma n-upla de caminhos relacionada com a permutação $(1,2,3)$ ligando de 0 a 0; -1 a 1 e de -2 a 2, mas também pode ser obtida a partir de uma n-upla de caminhos relacionada com a permutação $(2,1,3)$ ligando de 0 a 1; -1 a 0 e de -2 a 2.



d) Quais são as outras duas permutações que se relacionam com n-uplas de caminhos que usam os segmentos destacados da figura anterior? Indique as quantidades de inversões de cada permutação.

A ideia aqui é considerar que para cada permutação $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ a sua contribuição para o somatório do determinante pode ser calculada usando o número de n-uplas de caminhos relacionadas a ela.

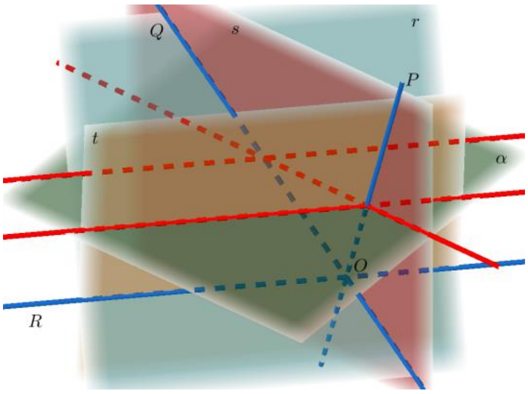
e) Para cada figura formada por segmentos usados em n-uplas de caminhos que possuem um ou mais cruzamentos a soma das contribuições dessas n-uplas no determinante através das permutações relacionadas é zero. Explique por que isto acontece.

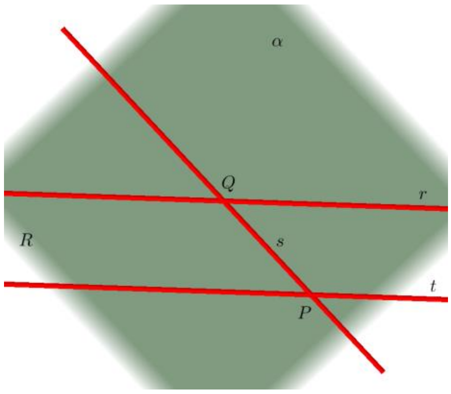
f) Calcule o determinante $\det A_n$.

PROBLEMA 5

Um dos postulados da geometria euclidiana é a existência de exatamente uma reta paralela a uma reta dada por um ponto. Por outro lado, verificou-se que esse postulado pode ser alterado sem consequências graves para o resto dos postulados de geometria, dando origem a outros tipos de geometria. Um exemplo é a *geometria projetiva*, em que não existem retas paralelas.

Um modelo que nos permite visualizar um plano projetivo é, na verdade, usar o espaço tridimensional. Fixe um ponto O, que será doravante chamado *origem*. Um ponto no plano projetivo é uma reta no espaço que passa pelo ponto O; uma reta no plano projetivo é um plano no espaço que passa pelo ponto O. Note que duas retas projetivas são dois planos no espaço que passam pelo ponto O, e têm sempre como interseção uma reta que contém O. Isso quer dizer que *quaisquer duas retas projetivas têm interseção*. Por que o plano projetivo é… um plano? A visualização que fazemos, em geral, é a interseção de tudo com um *plano de referência* que *não* passa por O. A seguir, exibimos três retas projetivas e seus três pontos (projetivos) de interseção, e uma representação em um plano de referência α.

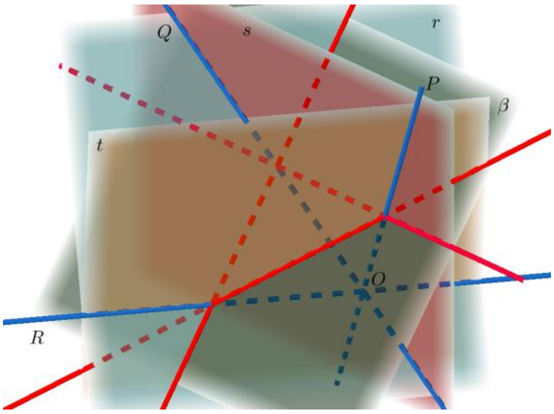


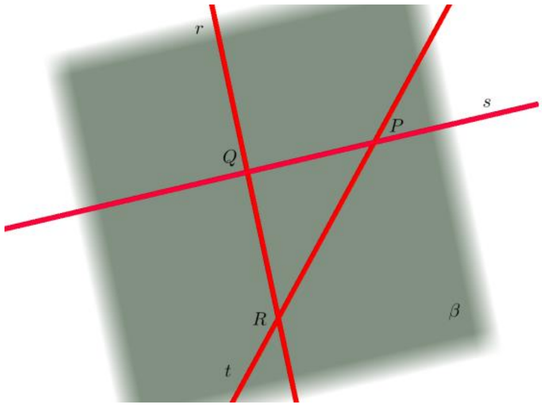


Note que as retas projetivas que parecem paralelas no plano α na verdade se cortam em um ponto projetivo R que não está contido em α. Nesse contexto, R é um *ponto do infinito* e o plano paralelo a α que passa pela origem O é a *reta do infinito*.

a) Explique, usando o modelo espacial, por que três retas projetivas que parecem paralelas no plano se cortam em um único ponto projetivo.

Algo interessante em geometria projetiva é que podemos mudar o plano de referência. Por exemplo, mudando o plano α para o plano β exibido a seguir, temos a mesma situação representada de outra maneira:



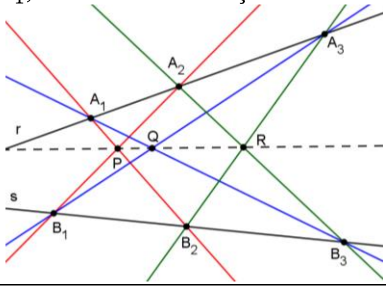


Note que $r \cap s = \{Q\}$, $r \cap t = \{R\}$ e $s \cap t = \{P\}$ em ambas as situações.

b) Suponha que mudemos a referência para que r seja a reta do infinito. Desenhe na *Folha de Respostas* como ficam as retas s e t e os pontos P, Q e R no plano de referência.

Podemos usar essas ideias para provar o *teorema de Pappus*:

Sejam A_1, A_2 e A_3 pontos sobre uma reta r e B_1, B_2 e B_3 pontos sobre uma reta s. Defina X como a interseção das retas A_1B_2 e A_2B_1, Y como a interseção das retas A_1B_3 e A_3B_1, e Z como a interseção das retas A_2B_3 e A_3B_2. Então X, Y e Z são colineares.



c) Usando o modelo espacial, mostre por que o teorema de Pappus é equivalente ao seguinte teorema:

Sejam K, L e M pontos sobre a reta u. Sejam k_1 e k_2 retas que passam por K, ℓ_1 e ℓ_2 retas que passam por L e m_1 e m_2 retas que passam por M tais que $k_1 \parallel m_2$, $k_2 \parallel \ell_1$ e $\ell_2 \parallel m_1$. Sejam A a interseção entre k_1 e ℓ_2, B a interseção entre k_2 e m_1 e C a interseção entre ℓ_1 e m_2. Então A, B e C são colineares.

d) Prove o teorema anterior e, portanto, o teorema de Pappus.