XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (28 de outubro de 2017)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

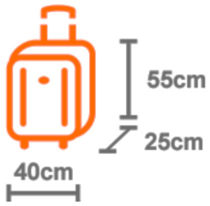
PROBLEMA 1

Bagagem de mão é aquela que pode ser levada junto ao passageiro durante a viagem. Nas companhias aéreas, há restrições em relação à massa e ao volume da bagagem de mão.

Segundo as novas regras da Agência Nacional de Aviação Civil, a ANAC, em vigor desde maio deste ano, a bagagem de mão pode ter massa de até 10 kg e suas dimensões máximas são estabelecidas por cada companhia aérea. Na tabela a seguir, apresentamos as condições sobre as massas e as medidas máximas permitidas em três companhias aéreas:

Companhia aérea	Dimensões	Massa
Amarelo	As três dimensões somadas devem ser, no máximo, 115 cm.	10 kg
Sabianca	No máximo 40 cm × 20 cm × 55 cm	10 kg
Escanteio	No máximo 40 cm × 25 cm × 55 cm	10 kg

A figura a seguir mostra como um passageiro da Escanteio pode verificar se sua bagagem de mão está dentro dos padrões permitidos.



a) O volume de uma mala no formato de um paralelepípedo reto-retângulo é o produto de suas três dimensões. Qual é o volume máximo, em cm^3, permitido pela Sabianca para a bagagem de mão?

b) Uma bagagem de mão da Amarelo pode ter volume maior do que o volume máximo de uma bagagem de mão da Escanteio. Apresente possíveis valores para as dimensões de uma bagagem de mão da Amarelo que tenha volume maior que o volume máximo permitido pela Escanteio.

c) A densidade do ouro é 19,3 g/cm^3, ou seja, em 1 cm^3 há 19,3 g de ouro. O passageiro que tentasse transportar o limite máximo de volume de uma mala de mão da Sabianca em ouro, estaria levando quantos quilogramas de ouro na mala?

d) Considerando que atualmente é permitido transportar no máximo 10 kg na bagagem de mão, quantas bagagens de mão seriam necessárias, no mínimo, para transportar a massa de ouro encontrada no item c?

PROBLEMA 2

Em 1865, o economista inglês William Stanley Jevons observou que avanços tecnológicos que aumentaram a eficiência no uso de carvão acompanharam o aumento do consumo de carvão na indústria. Esse fenômeno ficou conhecido como paradoxo de Jevons e afirma que o aumento na eficiência no uso de um recurso, reduzindo a quantidade necessária do recurso para qualquer uso, pode levar ao aumento no consumo total do recurso. Consideraremos nesse problema que *utilidade* é o valor monetário que indica o quanto uma pessoa valoriza algo.

Para ilustrar o fenômeno apresentado, suponha que na casa do Zé a iluminação da sala possa ser feita com uma lâmpada com utilidade de 10 reais por mês, ou seja, esse é o valor monetário que indica o quanto Zé valoriza a iluminação da sua sala com uma lâmpada, ou com duas lâmpadas com utilidade de 15 reais por mês. Sendo o custo de energia por lâmpada de 6 reais por mês, a sua utilidade mensal, dada pela diferença (utilidade de iluminação) – (custo com energia), é $10 - (1 \times 6) = 4$ reais com uma lâmpada. E, da mesma forma, temos a utilidade mensal de $15 - (2 \times 6) = 3$ reais usando duas lâmpadas. Comparando as duas situações, Zé nota que com uma lâmpada a utilidade mensal é maior. Por isso, ele opta por usar apenas uma lâmpada.

a) Após um avanço tecnológico, houve um aumento na eficiência do uso da energia e o custo com energia por lâmpada passou a ser apenas de 4 reais por mês. Considerando que as utilidades de iluminação são as mesmas, calcule a utilidade mensal para com uma lâmpada e com duas lâmpadas. Considerando a utilidade mensal, qual opção Zé deveria escolher?

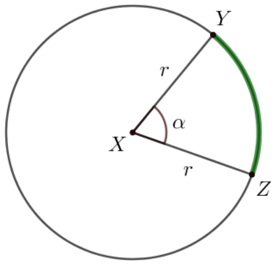
b) Considerando as maiores utilidades mensais já calculadas, qual foi o aumento percentual da maior utilidade mensal com custo de energia por lâmpada de 6 reais por mês para a maior utilidade mensal com custo de 4 reais por mês?

c) Suponha que haja apenas 1440 reais disponíveis para iluminar a sala de Zé. Depois disso, não haveria mais recursos para iluminar a sala de Zé. Considerando as duas situações, com custos de energia de 6 reais por mês por lâmpada e de 4 reais por mês por lâmpada, e que Zé escolha a opção dentre uma ou duas lâmpadas com maior utilidade mensal em cada caso, por quantos anos seria possível iluminar a sala do Zé em cada uma das duas situações?

PROBLEMA 3

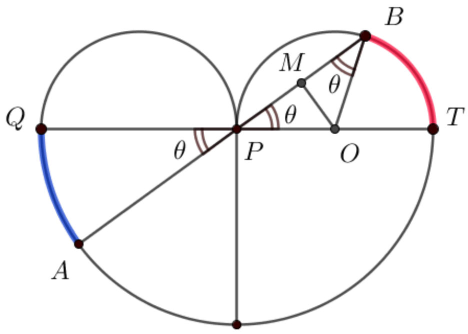
Uma das primeiras aparições do número π na história da Matemática foi como quociente entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Nesse problema, vamos analisar alguns resultados interessantes usando o fato de que uma circunferência de raio r possui comprimento $2\pi \cdot r$.

A seguir, temos uma circunferência de centro X e raio r. Sabendo que o ângulo $\angle YXZ = \alpha$, podemos calcular o comprimento do arco $\widehat{YZ}$ usando o fato de que a medida do ângulo e o comprimento do arco são proporcionais, ou seja, $\widehat{YZ} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$ com o ângulo α em graus.



A figura a seguir, que parece um coração, é conhecida como cardioide de Boscovich, em homenagem ao matemático Roger Boscovich (1711 – 1787). Ela é formada por três semicircunferências, uma de centro P e diâmetro QT e outras duas de diâmetros QP e PT. Uma propriedade muito interessante é que qualquer reta passando por P divide o cardioide em duas figuras de mesmo perímetro.

Chamaremos de R o raio das semicircunferências menores.



Note que o raio da semicircunferência maior será $2R$. Usando o fato descrito anteriormente, o comprimento do arco $\widehat{QP}$ é $\frac{180°}{360°} \cdot 2\pi R = \pi R$.

a) Calcule os comprimentos das semicircunferências $\widehat{PT}$ e $\widehat{QT}$. Em seguida, verifique que a soma dos comprimentos dos arcos $\widehat{QP}$ e $\widehat{PT}$ é igual ao comprimento do arco $\widehat{QT}$.

b) Na figura, traçamos uma reta AB formando um ângulo θ com a reta QT. Sejam O o centro da circunferência de diâmetro PT e M o ponto médio do segmento PB. Mostre que $\angle OBM = \angle OPM = \theta$.

Você pode querer utilizar o fato de que se os lados correspondentes de dois triângulos possuem mesma medida, então os triângulos são congruentes e seus ângulos correspondentes possuem mesma medida.

c) Calcule a medida do ângulo $\angle BOT$ em termos de θ.

d) Mostre que os comprimentos dos arcos $\widehat{AQ}$ e $\widehat{BT}$ são iguais e conclua que a soma dos arcos $\widehat{AQ} + \widehat{QP} + \widehat{PB}$ é igual a soma dos arcos $\widehat{BT} + \widehat{TA}$.

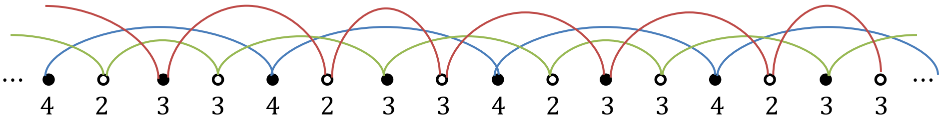
PROBLEMA 4

Chamamos de *padrão de malabarismo* uma sequência finita formada por números inteiros positivos. Por exemplo, $(4; 2; 3; 3)$ é um padrão de malabarismo. Por motivos práticos, não são interessantes padrões de malabarismos envolvendo números maiores do que 9, por isso, podemos escrever o padrão $(4; 2; 3; 3)$ na forma 4233 sem que ocorra dúvida na identificação.

O *diagrama de malabarismo* relativo a um padrão de malabarismo é desenhado inicialmente colocando-se pontos pretos e brancos alternadamente em uma reta. Então, escrevemos sob eles repetidamente o padrão de malabarismo que desejamos representar. Por exemplo, para o padrão 4233, temos:

⋯	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	⋯
	4	2	3	3	4	2	3	3	4	2	3	3	4	2	3	3	

Então, ligamos o ponto P_i, i inteiro, ao ponto que está exatamente s_i posições à sua direita, em que s_i é o termo do padrão de malabarismo que está embaixo do ponto P_i. Agora, as motivações desses nomes talvez possam fazer sentido. Os pontos brancos e pretos representam, respectivamente, a mão esquerda e a mão direita de um malabarista e o padrão de malabarismo indica a altura em que a bola está sendo lançada. Esse é o motivo de não ser muito razoável considerarmos padrões envolvendo números maiores do que 9.

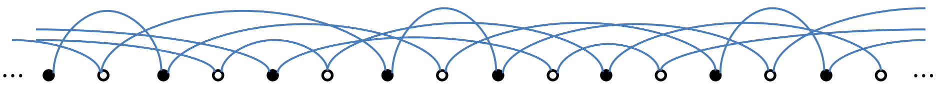


Dizemos que um padrão de malabarismo é válido se em seu diagrama cada ponto P_i tem exatamente duas ligações (uma bola chega na mão correspondente naquele instante e é imediatamente lançada novamente).

Note que, com a observação anterior, cada padrão de malabarismo é formado por um conjunto de traços contínuos (*trajetórias*). Esses traços naturalmente são identificados com as bolas necessárias para efetuar o malabarismo em questão. Por exemplo, para realizar 4233 necessitamos de 3 bolas representadas pelo traço azul, traço verde e traço vermelho.

a) Desenhe o diagrama de malabarismo do padrão 441. Uma curiosidade: apesar da arte dos malabares ser milenar, esse desafio parece ter sido descoberto apenas após a criação da teoria que estamos apresentando.

b) Qual é o padrão de malabarismo do diagrama representado a seguir. Quantas bolas são utilizadas para realizá-lo?



c) Mostre que o padrão de malabarismo 135792468 não é válido.

d) Apresente um padrão de malabarismo válido usando cada um dos números inteiros de 1 a 9 exatamente uma vez. Determine quantas bolas são necessárias para um malabarista realizar esse padrão.

PROBLEMA 5

Considere a sequência em que o seu n-ésimo termo tem n dígitos e ao colocarmos os seus termos justapostos (isto é, um ao lado do outro) obtemos:

$$123456789123456789123456789123456789123456789123456789123456789123456789\ \ldots$$

Ou seja, os termos iniciais da sequência são:

$$1, 23, 456, 7891, 23456, 789123, 4567891, 23456789, 123456789, 1234567891, 23456789123, \ldots$$

Essa sequência é chamada *sequência desconstrutiva de Smarandache*. Floretin Smarandache é um matemático e filósofo romeno, que atualmente trabalha na Universidade do Novo México nos EUA.

a) Os onze primeiros termos dessa sequência foram apresentados anteriormente. Qual é o 12º termo da sequência?

Observe que o segundo termo da sequência, 23, tem como primeiro dígito 2 e último dígito 3 e o décimo primeiro termo, 23456789123, também. De fato, considerando que o primeiro termo da sequência, 1, tem como primeiro e último dígitos o 1, temos que essa coincidência ocorre também com o primeiro e o décimo termo, 1234567891. Ou seja, parece que a cada nove termos, o primeiro e o último dígitos coincidem. Vamos provar isso nos próximos itens.

Imaginando os termos da sequência justapostos, ou seja,

1_23_456_7891_23456_789123_4567891_23456789_123456789_1234567891_23456789123_ ...

vemos que a diferença entre as posições ocupadas pelo primeiro dígito do segundo termo e o primeiro dígito do décimo primeiro termo é $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 54$. Entre os últimos dígitos, é $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 63$.

b) Considere agora o termo que ocupa a posição n e o que ocupa a posição $n + 9$, n inteiro positivo. Qual é a diferença entre posições ocupadas pelos primeiros dígitos desses termos? Qual é a diferença entre as posições ocupadas pelos últimos dígitos? Por que podemos afirmar que esses pares de dígitos sempre irão coincidir?

c) Há um múltiplo de 5 entre os termos dessa sequência?

d) Demonstre que há infinitos múltiplos de 128 na sequência desconstrutiva de Smarandache, mas não há um múltiplo de 256.

Nesse item, você pode querer utilizar o seguinte fato: um número inteiro é divisível por 2^k se, e somente se, o número formado pelos seus k últimos dígitos é divisível por 2^k. Por exemplo, um número é divisível por $8 = 2^3$ se, e somente se, seus 3 últimos dígitos formam um múltiplo de 8.

R A S C U N H O

Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.

XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (28 de outubro de 2017)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Suponha que você está lendo um livro e encontra 7 erros de digitação em 20 páginas. Você provavelmente imagina que a chance de haver erro de digitação em uma página é $\frac{7}{20}$. E se você não encontrasse erros de digitação nas 20 páginas? Você concluiria que que a probabilidade de erro de digitação no livro todo (que poderia ter, digamos, 500 páginas) é zero, ou seja, que o livro não tem erros de digitação? (Você não precisa responder a essa pergunta. 😉)

Agora imagine uma situação rara como, por exemplo, ter ouvido absoluto (ou seja, a habilidade de distinguir notas musicais sem ter um tom de referência). Sabe-se que pessoas com ouvido absoluto existem, mas são raras. Como estimar a proporção de pessoas com ouvido absoluto, mesmo tendo uma amostra de 1000 pessoas que não têm ouvido absoluto?

A resposta vem da Estatística: normalmente queremos estimar proporções p com 95% de confiança. Em geral, supomos que o valor correto é p e estimamos a chance de haver ocorrências de um evento raro em n elementos como sendo 95%. Ou seja, resolvemos a equação $1-(1-p)^n = 0{,}95$, que é equivalente a $(1-p)^n = 0{,}05$. Pode-se mostrar que, para $n \geq 500$ usamos a aproximação $p \cong \frac{3}{n}$. Ou seja, na prática, se não encontramos ocorrência de um evento raro, estimamos a chance de ocorrência como $\frac{3}{n}$.

a) Suponha que vimos uma amostra de 1000 pessoas e não encontramos pessoas que consigam dobrar a língua em formato de onda, outra característica rara. Estime a chance de uma pessoa escolhida aleatoriamente conseguir dobrar a língua em formato de onda.

b) Estudos científicos afirmam que 1 a cada 10000 pessoas tem ouvido absoluto. Se um desses estudos veio de uma amostra sem pessoas com ouvido absoluto, quantas pessoas há nessa amostra?

PROBLEMA 2

Em 1865, o economista inglês William Stanley Jevons observou que avanços tecnológicos que aumentaram a eficiência no uso de carvão acompanharam o aumento do consumo de carvão na indústria. Esse fenômeno ficou conhecido como paradoxo de Jevons e afirma que o aumento na eficiência no uso de um recurso, reduzindo a quantidade necessária do recurso para qualquer uso, pode levar ao aumento no consumo total do recurso. Consideraremos nesse problema que *utilidade* é o valor monetário que indica o quanto uma pessoa valoriza algo.

Para ilustrar o fenômeno apresentado, suponha que na casa do Zé a iluminação da sala possa ser feita com uma lâmpada com utilidade de 10 reais por mês, ou seja, esse é o valor monetário que indica o quanto Zé valoriza a iluminação da sua sala com uma lâmpada, ou com duas lâmpadas com utilidade de 15 reais por mês. Sendo o custo de energia por lâmpada de 6 reais por mês, a sua utilidade mensal, dada pela diferença $(\text{utilidade de iluminação}) - (\text{custo com energia})$, é $10-(1\times 6) = 4$ reais com uma lâmpada. E, da mesma forma, temos a utilidade mensal de $15-(2\times 6) = 3$ reais usando duas lâmpadas. Comparando as duas situações, Zé nota que com uma lâmpada a utilidade mensal é maior. Por isso, ele opta por usar apenas uma lâmpada.

a) Após um avanço tecnológico, houve um aumento na eficiência do uso da energia e o custo com energia por lâmpada passou a ser apenas de 4 reais por mês. Considerando que as utilidades de iluminação são as mesmas, calcule a utilidade mensal para com uma lâmpada e com duas lâmpadas. Considerando a utilidade mensal, qual opção Zé deveria escolher?

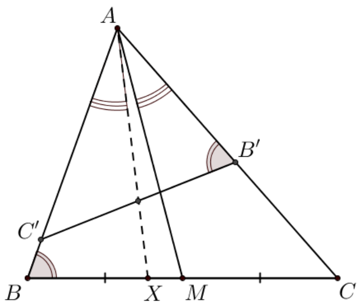
b) Suponha que haja apenas 1440 reais disponíveis para iluminar a sala de Zé. Depois disso, não haveria mais recursos para iluminar a sala de Zé. Considerando as duas situações, com custos de energia de 6 reais por mês por lâmpada e de 4 reais por mês por lâmpada, e que Zé escolha a opção dentre uma ou duas lâmpadas com maior utilidade mensal em cada caso, por quantos anos seria possível iluminar a sala do Zé em cada uma das duas situações?

David Owen, em seu artigo *The Efficiency Dilemma*, fala sobre o paradoxo de Jevons e usa alguns dados para reforçar a existência desse paradoxo. Por exemplo, entre 1993 e 2005, nos Estados Unidos os aparelhos de ar-condicionado tiveram sua eficiência média aumentada em 28%. Com isso, um aparelho novo em 2005 consumia em média apenas 78% do que o seu similar em 1993. Esperava-se que essa redução de 22% causasse uma redução no consumo de energia. Porém o consumo médio de energia com os aparelhos por residência aumentou 37% nesse período.

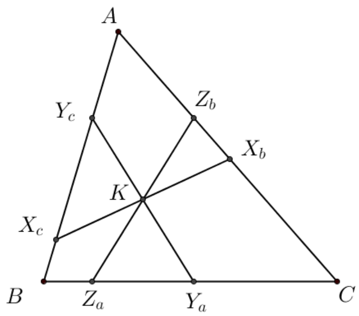
Já o economista James Barrett critica o paradoxo e defende que não é o aumento de eficiência que causa o aumento de consumo, mas que o aumento de eficiência em geral não é suficiente para compensar o aumento de consumo, que acompanha o crescimento da economia. Vamos estudar alguns dos argumentos de Barrett. A primeira observação de James é que as pessoas não trocam de ar-condicionado sempre que um modelo novo é lançado. Considerando que em média uma família usa um ar-condicionado por 20 anos, Barrett estima que, em média, um aparelho em 2005 consome 90% da energia que o seu similar consumia em 1993. Além disso, as pessoas passaram a usar aparelhos maiores em suas residências e estima-se que isso causou um aumento de aproximadamente 30% no consumo de energia com esses aparelhos por residência.

c) O tamanho médio das residências americanas passou de 195 metros quadrados em 1993 para 226 metros quadrados em 2005. Determine o aumento percentual x do tamanho médio das residências?
d) Admita que o aumento percentual x do tamanho médio das residências seja igual ao aumento percentual do consumo de energia por residência. Considere que o consumo de energia sofreu uma redução de 10% por conta aumento da eficiência, um aumento de 30% por conta do tamanho dos aparelhos e um aumento percentual x por conta do aumento do tamanho das residências. Por se tratar apenas de uma estimativa, tome essas variações como consecutivas. Sendo assim, estime o aumento percentual no consumo de energia com ar-condicionado por residência.

PROBLEMA 3
Na primeira fase da OPM 2017 vimos fatos sobre a simediana. Nesse problema, vamos apresentar mais fatos sobre elas.
Considere um triângulo ABC e M o ponto médio do lado BC. A ceviana AM é conhecida como mediana do triângulo relativa ao vértice A. A simediana relativa ao vértice A é a reta que também passa pelo ponto A e que forma os mesmos ângulos que a mediana, mas trocando a ordem dos ângulos. Na figura a seguir temos as representações da mediana AM e da simediana AX. Tome os pontos B' sobre o lado AC e C' sobre o lado AB. Dizemos que a reta $B'C'$ é *antiparalela* a BC quando os ângulos $\angle AB'C'$ e $\angle ABC$ são iguais.



a) Mostre que os triângulos ABC e $AB'C'$ são semelhantes e conclua que a reta AX passa pelo ponto médio de $B'C'$.
O ponto simediano de um triângulo é o ponto por onde passam as três simedianas do triângulo. Seja K o ponto simediano do triângulo ABC. Através do ponto K são traçadas retas antiparalelas X_bX_c, Y_cY_a e Z_aZ_b aos lados BC, CA e AB, respectivamente.



b) Prove que o triângulo KZ_aY_a é isósceles.
c) Prove que os seis pontos X_b, X_c, Y_c, Y_a, Z_a e Z_b são equidistantes do ponto K. Isto implica que existe uma circunferência de centro K que passa por estes seis pontos. Essa circunferência é conhecida como *Primeiro Círculo de Lemoine.*

PROBLEMA 4
Dizemos que um conjunto S de números inteiros positivos é *diofantino* se existe um polinômio $P(x, y_1, \dots, y_k)$ com coeficientes inteiros tal que $x \in S$ se, e somente se, existem inteiros positivos $y_1, \dots, y_k$ tais que $P(x, y_1, \dots, y_k) = 0$. Diremos que *$P$ é um polinômio associado ao conjunto S.*
Por exemplo, os números ímpares positivos formam um conjunto diofantino, pois, como $x = 2y - 1 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$, podemos tomar $P(x, y) = x - 2y + 1$ e temos que x pertence ao conjunto dos ímpares positivos se, e somente se, existe y tal que $P(x, y) = x - 2y + 1 = 0$.
a) A partir da equação $x = (y + 1)(z + 1)$, prove que os números compostos formam um conjunto diofantino.
b) Considere dois conjuntos diofantinos A e B aos quais estão associados, respectivamente, polinômios P_A e P_B. Mostre que um polinômio associado a $A \cap B$, intersecção dos conjuntos A e B, é $(P_A)^2 + (P_B)^2$.
Nesse item você pode querer utilizar que a intersecção de dois conjuntos é formada apenas pelos elementos que pertencem a ambos os conjuntos.

c) Dados P_A e P_B, determine um polinômio associado a $A \cup B$, união dos conjuntos A e B.
Nesse item você pode querer utilizar que a união de dois conjuntos é formada pelos elementos que pertencem apenas ao conjunto A ou apenas ao conjunto B ou a ambos os conjuntos.

Considere a sequência de Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Nos próximos itens provaremos que os números inteiros positivos pertencentes à sequência de Fibonacci formam um conjunto diofantino $F = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots\}$.
Considere os polinômios $R(x, y) = x^2 - xy - y^2 + 1$ e $S(z, w) = z^2 - zw - w^2 - 1$.
d) Resolva a equação $R(1, y) = 0$.
e) Mostre que $S(x, y) = 0$ é equivalente a $R(y, x - y) = 0$, isto é, o par ordenado (X, Y) é raiz do polinômio S se, e somente se, o par ordenado $(Y, X - Y)$ é raiz do polinômio R. Conclua que as raízes de R são os pares (F_{2k}, F_{2k-1}) e as raízes de S são os pares (F_{2k+1}, F_{2k}), para k inteiro positivo.
f) Mostre que o conjunto F dos números de Fibonacci inteiros positivos é diofantino.

PROBLEMA 5

O jogo da velha pode ser generalizado para ser jogado em um hipercubo k-dimensional de aresta n, dividido em n^k hipercubinhos unitários. Usualmente ele é jogado sobre um quadrado (hipercubo 2-dimensional) de lado (aresta) 3, dividido em $3^2 = 9$ casinhas (quadradinhos unitários).

Os dois jogadores alternam seus lances. Em cada jogada, o jogador da vez marca em uma das n^k casinhas o seu símbolo – $\times$ (xis) para o primeiro jogador e O (bolinha) para o segundo. O primeiro jogador a completar n símbolos alinhados (vale qualquer reta, incluindo qualquer tipo de diagonal) é o vencedor. Se todas as casinhas são preenchidas, mas nenhum jogador completa n símbolos iguais alinhados, o jogo empata.

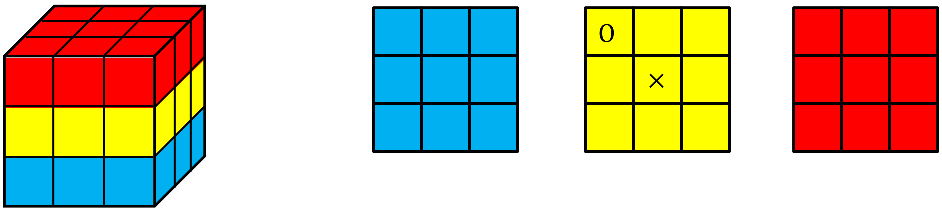
Como o primeiro lance é uma vantagem, com a estratégia ideal, o primeiro jogador não deve perder nunca (se alguma vez você começou o jogo e perdeu, você usou uma estratégia ruim, bem ruim). Então podemos esperar que o primeiro jogador busque a vitória, enquanto o segundo tenta empatar. De fato, os principais especialistas acreditam que, para um dado valor de k, existe um valor N de n tal que para hipercubos de aresta menor do que N o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora e, para hipercubos de aresta maior ou igual a N, o segundo jogador pode obter o empate. Nesse problema teremos algumas evidências de que isso realmente ocorre em duas, três e, mesmo, quatro dimensões!

a) Uma das principais estratégias de empate é a de *emparelhamento*: para cada jogada do primeiro jogador – excetuando uma possível escolha da casa central, quando houver uma – se estabelece uma resposta distinta do segundo de modo que, no final da partida, tais respostas impedem o primeiro jogador de completar todas as casinhas de um segmento de reta.

Explique por que o diagrama a seguir mostra uma estratégia de emparelhamento para o quadrado de lado 5.

v	i	a	a	f
j	b	h	u	b
c	i		g	c
d	u	h	d	f
j	e	e	g	v

b) Você já jogou o jogo da velha tridimensional? Para $n = 2$, o jogo é uma vitória muito fácil do primeiro jogador, logo na sua segunda jogada. Para $n = 3$, o primeiro jogador ainda vence. Para a situação apresentada a seguir em que cada um dos jogadores fez uma jogada, mostre uma segunda jogada do primeiro jogador de modo que ele garanta a vitória. Atenção: não é necessário apresentar todas as possíveis segundas jogadas que garantam a vitória. Justifique por que essa segunda jogada garante a vitória do primeiro jogador.

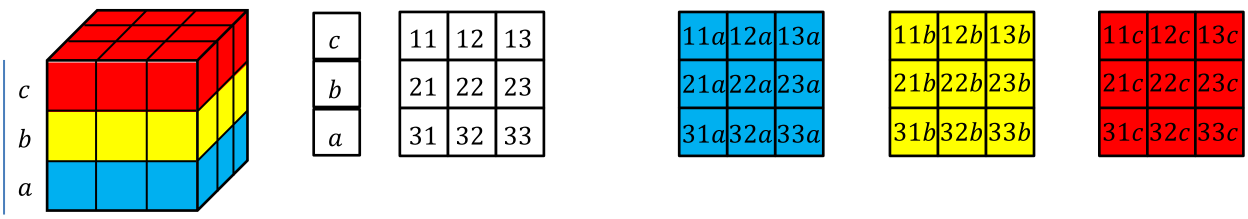


c) Podemos verificar que em um quadrado de lado n existem $2n + 2$ alinhamentos (segmentos de reta) que, se preenchidos com apenas um dos símbolos, levam à vitória: n horizontais, n verticais e as duas diagonais. Quantos alinhamentos (segmentos de reta) desse tipo existem em um cubo de aresta n?

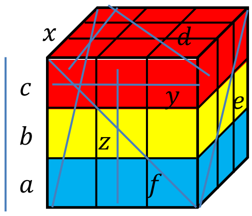
d) Mostre que não existe uma estratégia de emparelhamento para o cubo de aresta 7. Atenção: isso não significa que é impossível empatar em um cubo de aresta 7. Quer dizer apenas que a estratégia de emparelhamento, tal como descrita no item a, não pode ser aplicada.

e) Para aprendermos a "imaginar" um hipercubo na quarta dimensão, vamos inicialmente observar como podemos visualizar um cubo a partir de duas figuras: uma bidimensional e uma unidimensional.

Considere um quadrado de lado 3 em que cada uma de suas $3^2 = 9$ casinhas está identificada com um par de números e uma outra figura formada por três casinhas identificadas com letras diferentes. Observe que essa segunda figura é, essencialmente, um segmento de reta, ou seja, unidimensional.



O cubo é, então, formado por casinhas identificadas pela justaposição de um par de números e uma das letras.



$11a$	$12a$	$13a$
$21a$	$22a$	$23a$
$31a$	$32a$	$33a$

$11b$	$12b$	$13b$
$21b$	$22b$	$23b$
$31b$	$32b$	$33b$

$11c$	$12c$	$13c$
$21c$	$22c$	$23c$
$31c$	$32c$	$33c$

Observe que os alinhamentos nesse cubo são formados pelas casinhas que diferem apenas no primeiro número (por exemplo, reta x); apenas no segundo número (por exemplo, reta y); apenas na letra (por exemplo, reta z); nos dois números (por exemplo, reta d); no primeiro número e na letra (por exemplo, reta e); no segundo número e na letra (por exemplo, reta f); ou nos três (diagonais do cubo). Em resumo, os alinhamentos são formados quando "juntamos" um segmento vertical do quadrado original com uma casinha do segmento de reta; um segmento horizontal do quadrado original com uma casinha do segmento de reta; uma casinha do quadrado original com o segmento de reta; uma diagonal do quadrado original com uma casinha do segmento de reta; um segmento vertical do quadrado original com o segmento de reta; um segmento horizontal do quadrado original com o segmento de reta; ou uma diagonal do quadrado original com o segmento de reta.

Podemos resumir tal "operação" que nos permite obter todos os alinhamentos do cubo da seguinte maneira: "juntamos" um segmento de reta de uma das figuras com uma casinha da outra ou um segmento de reta de uma com um segmento de reta da outra.

Agora façamos a mesma operação para os dois quadrados de lado 4 apresentados a seguir. Não precisa desenhar a figura obtida, ela é um hipercubo de aresta 4 que é formado por 4^4 casinhas. Cada casinha desses quadrados está ocupada pelo número $+1$ ou -1.

$+1$	$+1$	-1	-1
$+1$	-1	$+1$	-1
-1	$+1$	-1	$+1$
-1	-1	$+1$	$+1$

$+1$	-1	$+1$	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	-1
$+1$	$+1$	-1	$+1$
-1	$+1$	$+1$	$+1$

Durante a operação, também multiplicamos os números das casinhas. Ao obtermos $+1$ devemos colocar um $\times$ na casinha correspondente do hipercubo formado e ao obtermos -1 devemos colocar uma O. Prove que o jogo da velha quadridimensional representado dessa forma acaba em um empate, ou seja, em todos os alinhamentos que aparecem no hipercubo temos pelo menos um $\times$ e pelo menos uma O.

XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (28 de outubro de 2017)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em 1865, o economista inglês William Stanley Jevons observou que avanços tecnológicos que aumentaram a eficiência no uso de carvão acompanharam o aumento do consumo de carvão na indústria. Esse fenômeno ficou conhecido como paradoxo de Jevons e afirma que o aumento na eficiência no uso de um recurso, reduzindo a quantidade necessária do recurso para qualquer uso, pode levar ao aumento no consumo total do recurso. Consideraremos nesse problema que *utilidade* é o valor monetário que indica o quanto uma pessoa valoriza algo.

Para ilustrar o fenômeno apresentado, suponha que na casa do Zé a iluminação da sala possa ser feita com uma lâmpada com utilidade de 10 reais por mês, ou seja, esse é o valor monetário que indica o quanto Zé valoriza a iluminação da sua sala com uma lâmpada, ou com duas lâmpadas com utilidade de 15 reais por mês. Sendo o custo de energia por lâmpada de 6 reais por mês, a sua utilidade mensal, dada pela diferença $(\text{utilidade de iluminação}) - (\text{custo com energia})$, é $10 - (1 \times 6) = 4$ reais com uma lâmpada. E, da mesma forma, temos a utilidade mensal de $15 - (2 \times 6) = 3$ reais usando duas lâmpadas. Comparando as duas situações, Zé nota que com uma lâmpada a utilidade mensal é maior. Por isso, ele opta por usar apenas uma lâmpada.

a) Após um avanço tecnológico, houve um aumento na eficiência do uso da energia e o custo com energia por lâmpada passou a ser apenas de 4 reais por mês. Considerando que as utilidades de iluminação são as mesmas, calcule a utilidade mensal para com uma lâmpada e com duas lâmpadas. Considerando a utilidade mensal, qual opção Zé deveria escolher?

b) Suponha que haja apenas 1440 reais disponíveis para iluminar a sala de Zé. Depois disso, não haveria mais recursos para iluminar a sala de Zé. Considerando as duas situações, com custos de energia de 6 reais por mês por lâmpada e de 4 reais por mês por lâmpada, e que Zé escolha a opção dentre uma ou duas lâmpadas com maior utilidade mensal em cada caso, por quantos anos seria possível iluminar a sala do Zé em cada uma das duas situações?

David Owen, em seu artigo *The Efficiency Dilemma*, fala sobre o paradoxo de Jevons e usa alguns dados para reforçar a existência desse paradoxo. Por exemplo, entre 1993 e 2005, nos Estados Unidos os aparelhos de ar-condicionado tiveram sua eficiência média aumentada em 28%. Com isso, um aparelho novo em 2005 consumia em média apenas 78% do que o seu similar em 1993. Esperava-se que essa redução de 22% causasse uma redução no consumo de energia. Porém o consumo médio de energia com os aparelhos por residência aumentou 37% nesse período.

Já o economista James Barrett critica o paradoxo e defende que não é o aumento de eficiência que causa o aumento de consumo, mas que o aumento de eficiência em geral não é suficiente para compensar o aumento de consumo, que acompanha o crescimento da economia. Vamos estudar alguns dos argumentos de Barrett. A primeira observação de James é que as pessoas não trocam de ar-condicionado sempre que um modelo novo é lançado. Considerando que em média uma família usa um ar-condicionado por 20 anos, Barrett estima que, em média, um aparelho em 2005 consome 90% da energia que o seu similar consumia em 1993. Além disso, as pessoas passaram a usar aparelhos maiores em suas residências e estima-se que isso causou um aumento de aproximadamente 30% no consumo de energia com esses aparelhos por residência.

c) O tamanho médio das residências americanas passou de 195 metros quadrados em 1993 para 226 metros quadrados em 2005. Determine o aumento percentual x do tamanho médio das residências?

d) Admita que o aumento percentual x do tamanho médio das residências seja igual ao aumento percentual do consumo de energia por residência. Considere que o consumo de energia sofreu uma redução de 10% por conta aumento da eficiência, um aumento de 30% por conta do tamanho dos aparelhos e um aumento percentual x por conta do aumento do tamanho das residências. Por se tratar apenas de uma estimativa, tome essas variações como consecutivas. Sendo assim, estime o aumento percentual no consumo de energia com ar-condicionado por residência.

PROBLEMA 2

Alguns raciocínios incorretos utilizando probabilidades podem aparecer em situações reais de júri. De fato, o impacto que podem ter no resultado de julgamentos é de tal relevância que alguns desses raciocínios recebem nomes especiais, por exemplo: *Falácia do Procurador*, *Falácia do Advogado de Defesa*, *Paradoxo de Berkson*. Nesse problema vamos conhecer alguns desses erros baseados em casos reais, infelizmente.

Um dos casos mais notórios do mau uso de probabilidades em julgamentos é o de Sally Clark.
A inglesa foi acusada em 1998 de ter matado seu primeiro filho quando tinha 11 semanas de idade e o segundo quando tinha 8 semanas de idade. Mortes de crianças em tão tenra idade e para as quais os médicos não encontram uma explicação são chamadas *morte no berço* ou *síndrome da morte súbita infantil (SMSI)* e os pais não são considerados suspeitos. Porém como o segundo filho tinha alguma possível evidência de ter sido asfixiado, a mãe foi levada a julgamento.
A acusação tinha o renomado pediatra Sir Roy Meadow, o qual afirmou que "a chance de uma morte no berço em uma família do status social da família Clark é de cerca de uma em 8.543. Isso significa que a chance de haver duas mortes dessas na mesma família é igual ao quadrado desse número: uma chance em cerca de 73 milhões." Os testemunhos de Meadow foram muito decisivos e Sally Clark acabou condenada, em 1999, à prisão perpétua.
Em 2001, a Real Sociedade de Estatística enviou uma queixa pública para o presidente da Câmara dos Lordes na qual expunha os erros de Meadow e a gravidade da situação. "Essa abordagem é, de forma geral, estatisticamente inválida. Seria válida apenas se os casos de SMSI surgissem independente dentro das famílias, premissa que necessitaria de justificação empírica. Não só essa justificação empírica não foi fornecida no caso, como também há fortes razões a priori para supor que a premissa seja falsa. Pode muito bem haver fatores genéticos ou ambientais desconhecidos que predisponham famílias à SMSI, de modo que um segundo caso na família se torne muito mais provável. "
Essa análise, associada à disponibilização de registros médicos para a defesa que mostravam que o segundo bebê estava sofrendo de uma séria infecção bacteriana quando morreu, resultaram na libertação de Sally em 2003. Lamentavelmente, ela nunca se recuperou da experiência traumática e faleceu por intoxicação alcoólica aguda em 2007.
a) Mostre que podemos concluir a partir dos dados do enunciado que Meadow supôs que os eventos descritos a seguir são independentes:
A: primeiro filho morre por SMSI
B: segundo filho morre por SMSI
b) Registros históricos recentes da Inglaterra indicam que de 5 mil bebês nascidos após uma morte por SMSI na família, oito também tiveram morte no berço. Levando em conta esse dado, estime a probabilidade, nas condições do problema, de haver duas mortes por SMSI em uma mesma família.
Nos itens a e b, você pode desejar usar que:
$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$ *em que* $p(B|A)$ *é a probabilidade condicional do evento* B *dado o* A
A *e* B *são eventos independentes se, e somente se,* $p(A|B) = p(A)$

c) Um outro raciocínio incorreto que pode aparecer é motivado por tomarmos um conjunto de suspeitos grande demais. Vamos supor que temos uma amostra de DNA obtida em uma cena de crime. Imagine que comparemos essa amostra com uma base de dados de 20 mil pessoas e que a probabilidade de haver coincidência dessa amostra com o de uma pessoa qualquer seja de 1 em 10 mil. Se encontramos alguém tal que a coincidência ocorra, poderíamos dizer que a chance dessa pessoa ser inocente é de 1 em 10 mil? Veremos que não, pois como 20 mil pessoas foram testadas, houve 20 mil oportunidades de a coincidência ocorrer e é bem provável que aconteça para um grupo desse tamanho, mesmo que nenhuma dessas pessoas tenha chance alguma de ter cometido o crime. É claro que se a pesquisa é restrita a um grupo pequeno de pessoas – por exemplo, as que tiveram acesso à cena do crime – a probabilidade de a pessoa ser inocente é, realmente, pequena.
Calcule a probabilidade de que em um grupo qualquer de 20 mil pessoas encontremos pelo menos uma para a qual a amostra coincida.
Você pode desejar usar nesse item que $\log 9999 \approx 3{,}9999566$ *e* $10^{-0{,}868} \approx 0{,}136$.

PROBLEMA 3
Nesse problema veremos um algoritmo que permite escrever (se possível) expressões polinomiais como somas de quadrados, com o auxílio de matrizes. Por exemplo, seja $f(x,y) = 2x^4 + 5y^4 - x^2y^2 + 2x^3y$.
O primeiro passo é escrever f na *forma quadrática*

$$f = v^TQv,$$

em que v é uma matriz coluna com monômios, Q é uma matriz simétrica cujas entradas são constantes reais e v^T é a transposta de v. Ou seja, as variáveis ficam somente em v e as constantes, em Q. No nosso caso, como v^TQv eleva v "ao quadrado", usamos $v = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \end{bmatrix}$.
Você pode querer utilizar o fato de que a matriz transposta é obtida pela troca de linhas por colunas em uma determinada matriz. Em outras palavras, se $M = (m_{ij})_{r\times s}$ *e* $N = (n_{ij})_{s\times r}$*, então* $N = M^T$ *quando* $n_{ij} = m_{ji}$ *para todo* $1 \le i \le r$ *e* $1 \le j \le s$*. Além disso, uma matriz P é simétrica quando é igual à sua transposta, ou seja,* $P = P^T$.

a) Escreva f na forma quadrática, ou seja, encontre constantes q_{ij}, $1 \le i \le j \le 3$, tais que

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \end{bmatrix} = 2x^4 + 5y^4 - x^2y^2 + 2x^3y \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aqui adotamos $q_{33} = 5$ para que a resposta seja única (sim, a matriz Q não é necessariamente única!)
b) O nosso próximo passo é encontrar uma matriz L e uma matriz diagonal D tal que $Q = L^TDL$. Uma matriz diagonal é uma matriz cujas entradas fora da diagonal principal são iguais a zero. Ou seja, queremos fazer

$$Q = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ \ell_{12} & \ell_{22} & \ell_{32} \\ \ell_{13} & \ell_{23} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}.$$

Mas não faremos isso diretamente (não abra essa última conta!). Para isso, utilizaremos a identidade

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & BC^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ C^{-1}B^T & I_n \end{bmatrix}, \qquad (*)$$

em que A, B e C são matrizes de tamanhos $m \times m$, $m \times n$ e $n \times n$, respectivamente, e I_k é a matriz identidade $k \times k$. Por exemplo, vamos escrever $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ na forma $R = L^T DL$: primeiro tomamos $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = [1]$ (podemos fazer outras escolhas). Com isso,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ih, a matriz do meio não é diagonal! Tudo bem: quebramos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ em $A = [1]$, $B = [1]$ e $C = [2]$, e fazemos de novo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo, obtemos

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo o produto das duas últimas matrizes obtemos

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

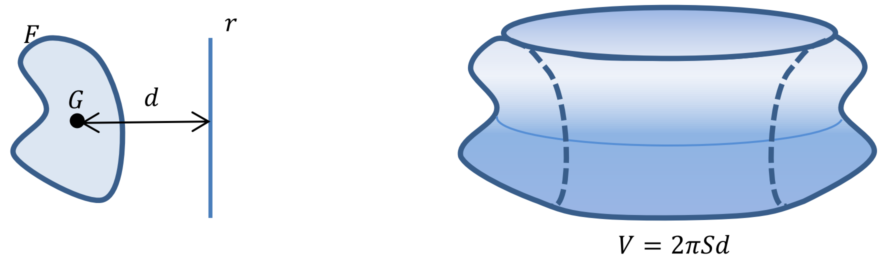
Agora é a sua vez! Encontre as matrizes L e D para a sua matriz Q que você encontrou no item anterior.

c) Agora que provamos que $f(x, y) = v^T Qv = v^T L^T DLv = (Lv)^T D(Lv)$, escreva $f(x, y)$ como soma de quadrados.

PROBLEMA 4

Um dos últimos grandes teoremas gregos é o *teorema de Pappus-Guldin*:

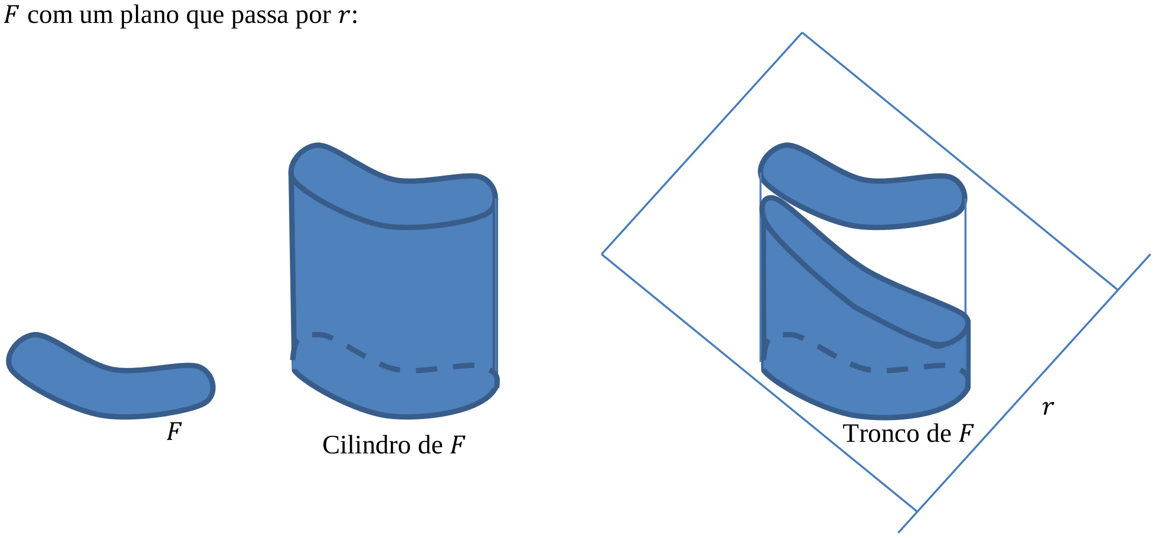
Sendo F uma figura plana com área S e r uma reta a uma distância d do centro de gravidade G de F. Então o volume do sólido obtido através da rotação de F em torno de r é $2\pi Sd$.



Esse fato foi descoberto por Pappus de Alexandria no século IV e reformulado com foco em centros de gravidade por Paul Guldin entre 1635 e 1641. Nenhum dos dois deu uma demonstração formal para o teorema. Em 1668, James Gregory, um matemático e astrônomo escocês que deu a primeira demonstração do teorema fundamental do Cálculo, provou o teorema. Nesse problema, iremos juntos desenvolver essa demonstração.

A ideia principal de Gregory foi considerar uma espécie de *cilindro*, cujo volume é fácil de calcular (área da base vezes altura), um *tronco* desse cilindro e aí sim considerar o sólido de revolução.

Dada uma figura F, um *cilindro* de F de altura h é obtido através da união de segmentos de reta de comprimento h perpendiculares ao plano de F, com uma das extremidades em F. Dada também uma reta de revolução r, dois *troncos* de F são obtidos cortando o cilindro de F com um plano que passa por r:



Antes de começar, precisamos definir uma medida do tronco: dado um tronco de F com reta de revolução r, o plano de corte intersecta o plano da base superior em uma reta s. Traçamos um plano α que contém s e é perpendicular ao plano de F. A distância de r a α será denominada *raio de rotação*.

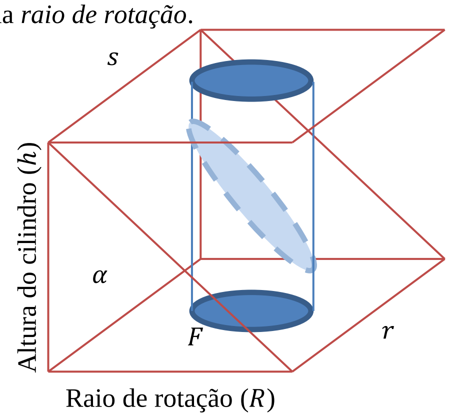
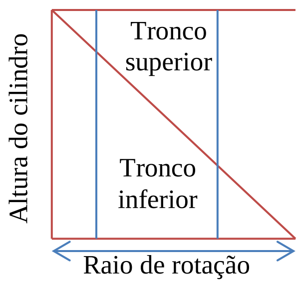
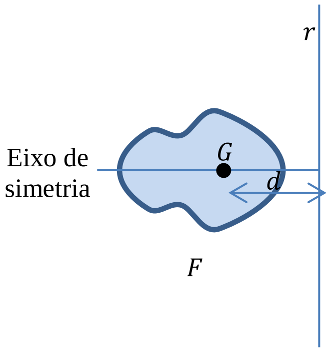
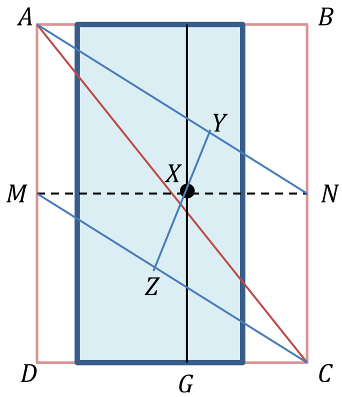


Figura 1



a) Para a primeira parte desse problema, iremos usar uma variante do *princípio de Cavalieri*, que diz que se seccionarmos dois sólidos por planos paralelos entre si e obtivermos áreas de secções numa razão constante k, então a razão entre os volumes é também k. Em outras palavras, se para todas secções paralelas S_1 e S_2 dos sólidos tivermos $\frac{\text{área}S_1}{\text{área}S_2} = k$, então $\frac{V_1}{V_2} = k$.
No nosso exemplo, faremos secções perpendiculares ao eixo de rotação, ou seja, usaremos planos perpendiculares à reta r. Note que esses planos são paralelos entre si. A secção vista na Figura 1 é um exemplo de corte feito por um desses planos. Na Figura 1 está indicada a secção relativa ao tronco inferior, que forma um trapézio.
Copie a Figura 1 no seu Bloco de Respostas e desenhe a secção relativa ao sólido de revolução de F em torno de r. Em seguida, calcule a razão entre as áreas das secções relativas ao tronco inferior de F e o sólido de revolução de F em torno de r.
b) Prove que a razão entre os volumes do tronco inferior de F e do sólido de revolução de F em torno de r é $\frac{\text{tronco}(F)}{\text{rev}(F)} = \frac{h}{2\pi R}$, em que h é a altura do cilindro e R é o raio de rotação.
c) Agora relacionaremos os volumes do tronco de F com o do cilindro de F, e também analisaremos o centro de massa do tronco. Faremos o caso em que F é simétrico e possui eixo de simetria perpendicular à reta de rotação r. Deste modo, os centros de gravidade, tanto do tronco, como do cilindro pertencem ao plano de simetria do tronco e do cilindro. A seguir, apresentamos uma base F e a secção transversal que contém o eixo de simetria:





Na figura anterior, M e N são pontos médios das alturas AD e BC do cilindro de F. Além disso, X, Y e Z são os centros de gravidade do cilindro, do tronco superior e do tronco inferior de F, respectivamente. Usando a simetria e o fato de que se um plano divide um sólido em dois sólidos de mesmo volume então o centro de gravidade está sobre esse plano, explique por que Y está sobre a reta AN.
d) Sabe-se que se dois sólidos têm volumes V_1 e V_2 e centros de gravidade X_1 e X_2 então o centro de gravidade da união disjunta dos dois sólidos é o ponto X sobre o segmento X_1X_2 tal que $X_1X \cdot V_1 = X_2X \cdot V_2$. Usando esse fato, prove que a razão entre os volumes do tronco inferior e do cilindro de F é

$$\frac{\text{tronco}(F)}{\text{cilindro}(F)} = \frac{d}{R},$$

em que d é a distância do centro de gravidade G de F à reta de rotação r e R é o raio de rotação, como definido anteriormente.
e) Conclua a demonstração do teorema de Pappus-Guldin para figuras F simétricas.

A demonstração acima só funciona para F simétrico, mas se F não for simétrico, basta tomar uma reta t qualquer que não corta F e fazer uma cópia simétrica F' de F com relação a t; aplicamos o teorema para $F \cup F'$. Efetivamente, para provar Pappus-Guldin basta considerar o caso em que F é simétrico. Você não precisa fazer isso!

PROBLEMA 5

A sequência de Thue-Morse é formada usando apenas 0's e 1's. Ela é definida começando-se com um 0 e acrescentando-se repetidamente o complemento binário da sequência (trocando-se 1 por 0 e 0 por 1) até o ponto atual. Como o complemento binário de 0 é 1, então ficamos com 01. Como o complemento de 01 é 10, ficamos com 0110. Continuando, temos os próximos 4 termos 1001 e os 8 termos seguintes 10010110. Temos a sequência

$$0|1|10|1001|10010110|1001011001101001\ ...$$

As barras foram colocadas para facilitar o entendimento da construção da sequência e das propriedades que estudaremos a seguir.

Essa sequência foi estudada pela primeira vez em 1851 pelo matemático francês Eugène Prouhet, mas só ficou famosa após os trabalhos do norueguês Axel Thue em 1906 e do americano Marston Morse em 1921. Daí vem o nome Thue-Morse. Nesse problema, vamos provar uma das propriedades surpreendentes dessa sequência: nenhum bloco de dígitos F se repete três vezes consecutivas nessa sequência. Por exemplo, não existe 111 e não existe 010010010, pois seriam repetições dos blocos "1" e "010" três vezes consecutivas.

Usaremos a notação a_0 para o primeiro termo da sequência, a_1 para o segundo e, assim, sucessivamente. Veja que após cada barra temos um termo a_{2^n} e, por isso, as potências de 2 serão muito importantes no nosso estudo.

a) Mostre que, para $0 \leq N < 2^n$, temos $a_{2^n+N} \neq a_N$.

b) Considere os números inteiros $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_t$. Mostre que

$$a_{2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_t}} = \begin{cases} 0, \text{se } t \text{ é par} \\ 1, \text{se } t \text{ é ímpar} \end{cases}$$

c) Cada número natural pode ser escrito de maneira única como soma de potências de 2 distintas. Chamamos isso de *representação binária* do número.

Usando o item b, prove que $a_{2n} = a_n$ e que $a_{2n} \neq a_{2n+1}$, para todo n natural, e conclua que na sequência de Thue-Morse não existem 3 termos consecutivos iguais.

Vamos agora aprofundar a análise dessa sequência. Suponha que ocorra na sequência de Thue-Morse a situação FFf onde F é um bloco de $k \geq 1$ dígitos e f é o primeiro dígito de F. Em outras palavras,

$$a_{i+1}a_{i+2} \ldots a_{i+k} |\ a_{i+k+1}a_{i+k+2} \ldots a_{i+2k} |\ a_{i+2k+1}$$

em que $a_{i+1} = a_{i+k+1} = a_{i+2k+1}$, $a_{i+2} = a_{i+k+2}$, ..., $a_{i+k} = a_{i+2k}$, ou seja, $a_{i+j} = a_{i+j+k}$ para $j = 1,2,\ldots,k$.

Vamos provar que isto não pode acontecer fazendo os casos k ímpar e k par.

d) Se k é ímpar, então podemos observar que exatamente um dos números $i + j$ ou $i + j + k$ é par. Isso, combinado com o resultado do item c, mostra que o bloco F tem que ser uma sequência alternada de zeros e uns.

Explique por que, nesse caso, valeria as seguintes igualdades

$$a_{i+1} = a_{i+k} = a_{i+k+1} = a_{i+2k} = a_{i+2k+1}$$

Em seguida, mostre que é impossível satisfazer todas essas igualdades e conclua que não existe o bloco F no caso em que k é ímpar.

e) Para k par, se existe FFf, vamos tomar a **primeira vez** que isso ocorre na sequência, ou seja, tomamos o menor i possível. Seja $k = 2t$ para um inteiro positivo t.

Se o i mínimo é par, temos $i = 2s$ e nosso pedaço FFf de interesse é

$$a_{2s+1}a_{2s+2} \ldots a_{2s+2t} |\ a_{2s+2t+1}a_{2s+2t+2} \ldots a_{2s+4t} |\ a_{2s+4t+1}$$

Mostre que vale $a_{2s} = a_{2s+2t}$.

Se tomarmos $F' = a_{2s}a_{2s+1} \ldots a_{2s+2t-1}$ teremos os blocos $F'F'f'$ acontecendo antes de FFf contrariando a suposição de que FFf é a primeira ocorrência.

f) Se o i mínimo é ímpar, temos $i = 2s - 1$ e nosso pedaço FFf de interesse é

$$a_{2s}a_{2s+1} \ldots a_{2s-1+2t} |\ a_{2s+2t}a_{2s+2t+1} \ldots a_{2s-1+4t} |\ a_{2s+4t}$$

Mostre que podemos tomar o bloco $F'' = a_s a_{s+1} \ldots a_{s-1+t}$ de modo que $F''F''f''$ aconteceria antes de FFf.

Isso conclui a demonstração, pois chegaremos em blocos com k ímpar (já vimos no item d que não existem) ou em blocos com k par sempre anteriores. Não poderá existir um primeiro e, portanto, não existe tal situação.