XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (12 de agosto de 2017)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Um carro híbrido elétrico é um automóvel que combina um motor a combustão com um motor elétrico, o que permite reduzir o esforço do motor de combustão e, assim, reduzir o consumo de combustíveis e a emissão de poluentes.

Segundo especialistas, nos EUA, um comprador que dispõe de cerca de US$6.200,00 a mais para comprar a versão híbrida de um luxuoso Lexus, economizará esse valor em gasolina dentro de cinco anos.

Os especialistas americanos usaram um período de recuperação de cinco anos, porque esse é o tempo médio de propriedade de um carro nos EUA. Eles também adotaram que um carro roda 19.300 km por ano. O desempenho do modelo híbrido é, em média, de 11 km com 1 litro de gasolina, e o do não híbrido, de 8,9 km.

a) Calcule quantos litros de gasolina serão consumidos em 5 anos por um modelo híbrido e por um modelo não híbrido.

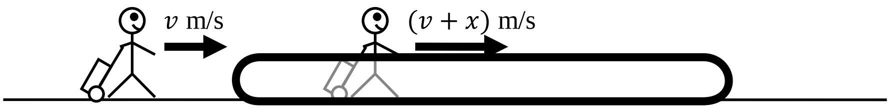
b) Considerando que o preço atual do litro de gasolina é US$0,70, calcule o valor que um comprador do modelo híbrido do Lexus gastará com gasolina em 5 anos. Suponha que o preço da gasolina não será alterado.

c) Calcule o valor economizado pelo comprador do modelo híbrido. Os especialistas estão certos em relação à previsão de economia? Justifique sua resposta.

PROBLEMA 2

Nos maiores aeroportos do mundo, como o aeroporto de Cumbica, em Guarulhos, é comum haver esteiras rolantes no chão para economizar tempo de transferência entre terminais e entre portões.

Suponha que a velocidade de uma dessas esteiras seja x m/s. Assim, uma pessoa que caminha com uma velocidade v m/s fora da esteira tem uma velocidade $(v + x)$ m/s quando caminha na esteira. Em particular, uma pessoa parada fora da esteira ($v = 0$ m/s) terá velocidade $(0 + x) = x$ m/s se ficar parada sobre a esteira.



a) Desert Pump é um garoto que gosta muito de correr e de fazer contas. Enquanto corria pelo aeroporto de Cumbuca, ele encontrou uma esteira de 60 m de comprimento. Ele calcula que para percorrer essa distância correndo fora da esteira ele demora 12 s, e para percorrer essa distância correndo sobre a esteira ele demora 10 s. Determine a velocidade de Desert correndo e também a velocidade da esteira.

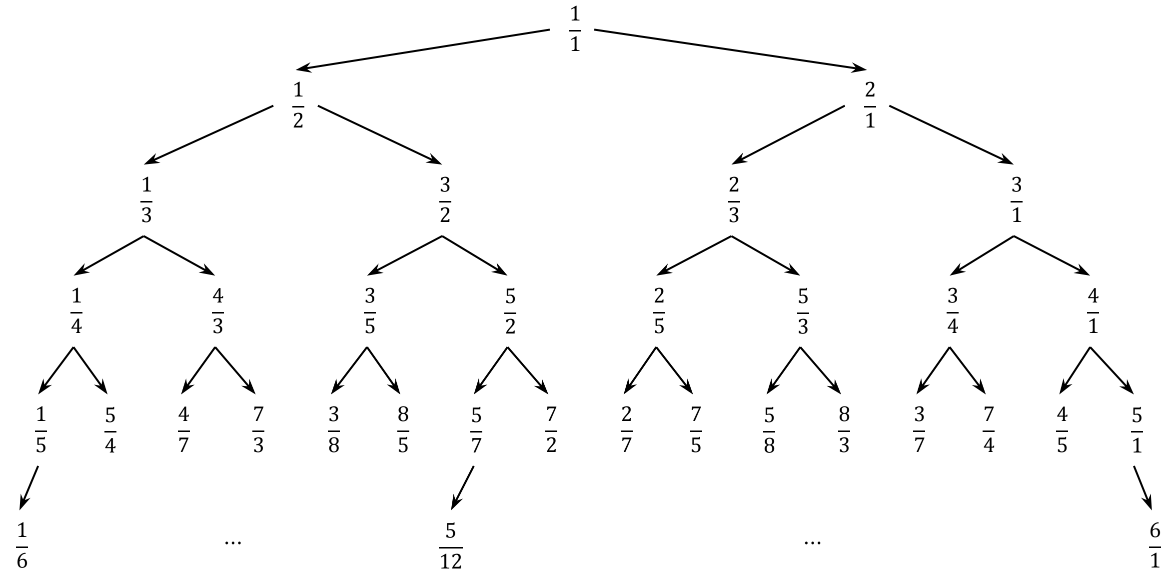
b) Suponha que a distância entre dois portões, A e B, é de 120 m. Suponha ainda que existe uma esteira de 60 m (a mesma do item anterior) entre esses dois portões que pode ser usada pelos passageiros para percorrer os 120 m mais rapidamente. Terencetaldo está no portão A e precisa ir para o portão B. Ao começar seu trajeto ele percebe que o cadarço do pé direito do seu tênis desamarrou. Para amarrá-lo ele deve ficar parado ($v = 0$ m/s) durante 15 s. Considere que Terencetaldo caminha com velocidade de 2 m/s. Ele possui três opções para percorrer os 120 m.

i) Não usa a esteira e amarra o cadarço antes de iniciar o trajeto.
ii) Usa a esteira e amarra o cadarço quando não está sobre a esteira.
iii) Usa a esteira e amarra o cadarço quando está sobre a esteira.

Para cada uma das três opções, calcule o tempo necessário para Terencetaldo ir do portão A até o portão B. Usando qual das opções ele chegará em menos tempo no portão B?

PROBLEMA 3

Nesse problema vamos estudar a *Árvore de Euclides*. Essa árvore é construída a partir da fração $\frac{1}{1}$ e cada fração $\frac{p}{q}$ gera duas novas frações $\frac{p}{p+q}$ e $\frac{p+q}{q}$. A seguir temos os termos iniciais dessa árvore.



Para fazer o caminho voltando de uma fração qualquer $\frac{m}{n}$, com $m \neq n$, até a fração $\frac{1}{1}$ usamos os seguintes passos:

$$\frac{m}{n} \leftarrow \frac{m-n}{n} \text{ se } m > n \qquad \text{e} \qquad \frac{m}{n} \leftarrow \frac{m}{n-m} \text{ se } m < n.$$

Por exemplo, começando de $\frac{5}{12}$ temos os seguintes passos:

Como $5 < 12$ a fração veio de $\frac{5}{12-5} = \frac{5}{7}$. Como $5 < 7$ essa fração foi gerada por $\frac{5}{7-5} = \frac{5}{2}$. Agora temos $5 > 2$, então a fração foi gerada por $\frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$. Seguindo esses passos chegamos no caminho

$$\frac{5}{12} \leftarrow \frac{5}{7} \leftarrow \frac{5}{2} \leftarrow \frac{3}{2} \leftarrow \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{1}.$$

a) Determine o caminho voltando da fração $\frac{27}{17}$ até a fração $\frac{1}{1}$, escrevendo as frações obtidas em cada passo.

Vamos atribuir a cada fração um número inteiro positivo que representa sua posição na árvore. A fração $\frac{1}{1}$ está na posição 1, $\frac{1}{2}$ está na posição 2, $\frac{2}{1}$ está na posição 3, $\frac{1}{3}$ está na posição 4, e assim por diante. Como cada fração gera duas frações, podemos observar que se uma fração $\frac{p}{q}$ possui posição N as frações $\frac{p}{p+q}$ e $\frac{p+q}{q}$ geradas dela ocuparão as posições $2N$ e $2N+1$, respectivamente. Dessa forma, para achar o termo que ocupa a posição t vamos dividindo por 2 até obter quociente 1. Depois devemos fazer os passos no sentido contrário, multiplicando por 2, ou multiplicando por 2 e somando 1, de acordo com os restos obtidos nas divisões por 2.

Por exemplo, para encontrar a fração que ocupa a posição 88 dividimos 88 por 2, obtendo quociente 44 e resto 0, ou seja,

$$88 = 2 \cdot 44 + 0$$

Agora, dividimos 44 por 2, obtendo quociente 22 e resto 0, ou seja,

$$44 = 2 \cdot 22 + 0$$

Continuando o processo, obtemos

$$22 = 2 \cdot 11 + 0$$
$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

e paramos aqui, pois obtivemos quociente 1.

Os restos obtidos, de baixo para cima, são 0, 1, 1, 0, 0, 0. Logo fazemos uma soma no denominador, duas no numerador e, finalmente, três somas no denominador. A ramificação da árvore é, então,

$$\frac{1}{1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \to \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \to \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \to \frac{5}{2+5} = \frac{5}{7} \to \frac{5}{7+5} = \frac{5}{12} \to \frac{5}{12+5} = \frac{5}{17}$$

ou em resumo

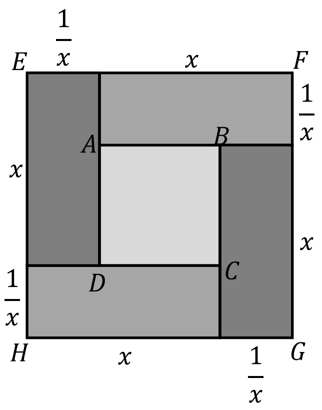
$$\frac{1}{1} \to \frac{1}{2} \to \frac{3}{2} \to \frac{5}{2} \to \frac{5}{7} \to \frac{5}{12} \to \frac{5}{17}.$$

Portanto a fração na posição 88 é $\frac{5}{17}$.

b) Usando os passos anteriores, determine a fração que está na posição 114.

PROBLEMA 4

Seja x um número real positivo tal que $x = 1 + \frac{1}{x}$. Considere o quadrado $EFGH$ a seguir, formado por quatro retângulos de lados x e $\frac{1}{x}$ e um quadrilátero central $ABCD$.



a) Mostre que $ABCD$ é um quadrado unitário, ou seja, mostre que os quatro ângulos internos são retos e que os lados têm medida unitária. Determine, então, a área de $EFGH$.

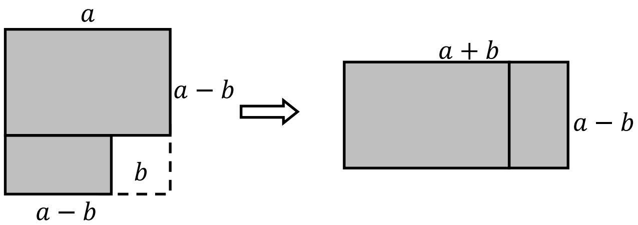
b) O quadrado $EFGH$ tem lado de medida $ax - b$, em que a e b são números inteiros positivos. Calcule esses valores.

c) Encontre o valor de x.

PROBLEMA 5

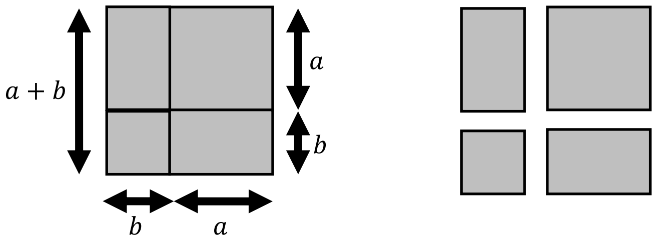
Existem muitas identidades algébricas na Matemática. Nesse problema vamos estudar algumas identidades algébricas e através de interpretações geométricas vamos ver um modo interessante de demonstrá-las considerando algumas limitações.

Começaremos com dois números positivos a e b com $a > b$. Note que $a^2 - b^2$ é a área da primeira figura a seguir. Ao deslocarmos o retângulo de baixo fazendo coincidir o lado $(a - b)$ formando um retângulo de lados $(a - b)$ e $(a + b)$.



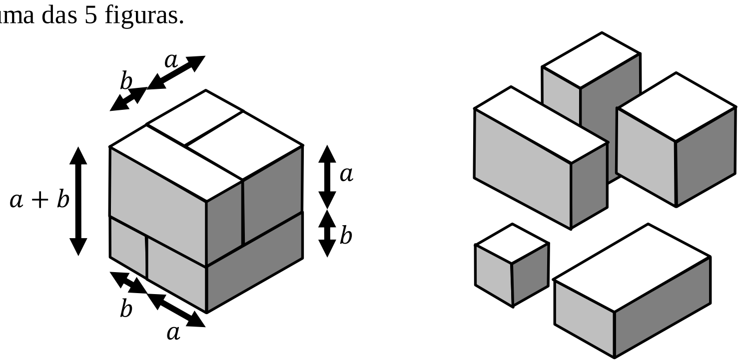
Como as duas figuras possuem a mesma área podemos concluir que vale a identidade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

a) A figura a seguir representa um quadrado de lado $(a + b)$ e uma forma de recortá-lo em dois quadrados e dois retângulos. Considerando a área do quadrado é igual a soma das áreas das figuras recortadas, que identidade algébrica está sendo representada?



O paralelepípedo retorretângulo é um sólido tal que todos os seus planos são perpendiculares entre si (como uma caixa de sapatos). Se seus lados possuem medidas a, b e c então seu volume é igual ao produto dos três lados $a \cdot b \cdot c$. Por exemplo, um cubo de lado L é um paralelepípedo reto retângulo com todos os lados iguais a L e portanto possui volume $L \cdot L \cdot L = L^3$.

b) A figura a seguir representa um cubo de lado $(a + b)$ e uma forma de recortá-lo em 2 cubos e 3 paralelepípedos retorretângulos. Determine os volumes de cada uma das 5 figuras.



c) Considerando que o volume do cubo maior é igual à soma dos cinco volumes menores, qual identidade algébrica está sendo representada?

d) Uma das sequências mais famosas da matemática é a sequência de Fibonacci. Ela é definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e para calcular cada termo a partir do F_3 nós somamos os dois termos anteriores. Os termos iniciais são 1,1,2,3,5,8,13, ...

Considere os termos 99, 100 e 101 da sequência de Fibonacci F_{99}, F_{100} e F_{101}, respectivamente. Usando a identidade obtida no item c, explique por que

$$F_{100}^3 + F_{99}^3 + 3\,F_{101}\,F_{100}\,F_{99}$$

é um cubo perfeito.

Observação: um número é chamado de cubo perfeito quando é igual a um número inteiro elevado ao cubo.

XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (12 de agosto de 2017)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Um carro híbrido elétrico é um automóvel que combina um motor a combustão com um motor elétrico, o que permite reduzir o esforço do motor de combustão e, assim, reduzir o consumo de combustíveis e a emissão de poluentes.

Segundo especialistas, nos EUA, um comprador que dispõe de cerca de US$6.200,00 a mais para comprar a versão híbrida de um luxuoso Lexus, economizará esse valor em gasolina dentro de cinco anos.

Os especialistas americanos usaram um período de recuperação de cinco anos, porque esse é o tempo médio de propriedade de um carro nos EUA. Eles também adotaram que um carro roda 19.300 km por ano. O desempenho do modelo híbrido é, em média, de 11 km com 1 litro de gasolina, e o do não híbrido, de 8,9 km.

a) Calcule quantos litros de gasolina serão consumidos em 5 anos por um modelo híbrido e por um modelo não híbrido.

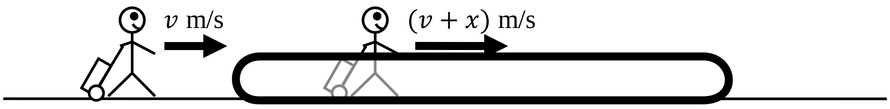
b) Considerando que o preço atual do litro de gasolina é US$0,70, calcule o valor que um comprador do modelo híbrido do Lexus gastará com gasolina em 5 anos. Suponha que o preço da gasolina não será alterado.

c) Calcule o valor economizado pelo comprador do modelo híbrido. Os especialistas estão certos em relação à previsão de economia? Justifique sua resposta.

PROBLEMA 2

Nos maiores aeroportos do mundo, como o aeroporto de Cumbica, em Guarulhos, é comum haver esteiras rolantes no chão para economizar tempo de transferência entre terminais e entre portões.

Suponha que a velocidade de uma dessas esteiras seja x m/s. Assim, uma pessoa que caminha com uma velocidade v m/s fora da esteira tem uma velocidade $(v + x)$ m/s quando caminha na esteira. Em particular, uma pessoa parada fora da esteira ($v = 0$ m/s) terá velocidade $(0 + x) = x$ m/s se ficar parada sobre a esteira.



a) Desert Pump é um garoto que gosta muito de correr e de fazer contas. Enquanto corria pelo aeroporto de Cumbuca, ele encontrou uma esteira de 60 m de comprimento. Ele calcula que para percorrer essa distância correndo fora da esteira ele demora 12 s, e para percorrer essa distância correndo sobre a esteira ele demora 10 s. Determine a velocidade de Desert correndo e também a velocidade da esteira.

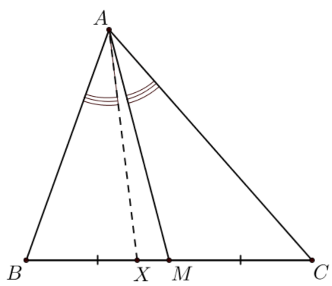
b) Suponha que a distância entre dois portões, A e B, é de 120 m. Suponha ainda que existe uma esteira de 60 m (a mesma do item anterior) entre esses dois portões que pode ser usada pelos passageiros para percorrer os 120 m mais rapidamente. Terencetaldo está no portão A e precisa ir para o portão B. Ao começar seu trajeto ele percebe que o cadarço do pé direito do seu tênis desamarrou. Para amarrá-lo ele deve ficar parado ($v = 0$ m/s) durante 15 s. Considere que Terencetaldo caminha com velocidade de 2 m/s. Ele possui três opções para percorrer os 120 m.

i) Não usa a esteira e amarra o cadarço antes de iniciar o trajeto.
ii) Usa a esteira e amarra o cadarço quando não está sobre a esteira.
iii) Usa a esteira e amarra o cadarço quando está sobre a esteira.

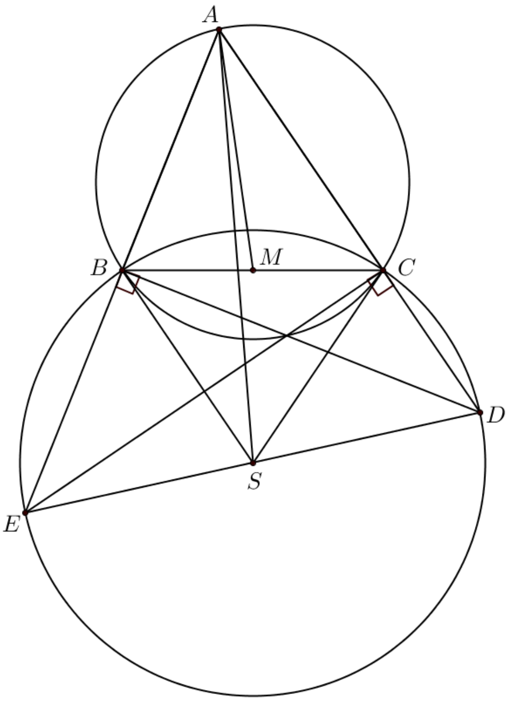
Para cada uma das três opções, calcule o tempo necessário para Terencetaldo ir do portão A até o portão B. Usando qual das opções ele chegará em menos tempo no portão B?

PROBLEMA 3

Considere um triângulo ABC e M o ponto médio do lado BC. O segmento AM é conhecida como *mediana* do triângulo relativa ao vértice A. A *simediana* relativa ao vértice A é a reta que também passa pelo ponto A e que forma os mesmos ângulos que a mediana, mas trocando a ordem dos ângulos. Na figura a seguir, temos as representações da mediana AM e da simediana AX. Observe a igualdade de ângulos $\angle BAX = \angle MAC$.



Nesse problema, vamos estudar mais sobre a simediana e como construí-la.

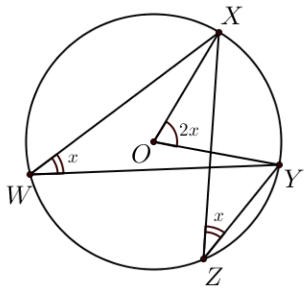


Considere o triângulo acutângulo ABC, o ponto médio M do lado BC e a circunferência Γ que passa pelos pontos A, B e C. Pelo vértice B traçamos a reta perpendicular ao lado AB intersectando o prolongamento do AC no ponto D. De maneira análoga, traçamos a perpendicular ao lado AC pelo vértice C intersectando a reta AB em E. Seja S o ponto médio do segmento DE.

a) Mostre que existe uma circunferência de centro S que passa pelos pontos B, C, D e E, ou seja, que $SB = SC = SD = SE$.
b) Mostre que os triângulos ABC e ADE são semelhantes.
c) Explique por que AS é a simediana do vértice A, ou seja, por que $\angle BAS = \angle CAM$.
d) Mostre que $\angle SBC = \angle BAC = \angle SCB$.

Como consequência, se tomarmos um triângulo ABC, sua circunferência circunscrita Γ e o ponto S de encontro das tangentes Γ pelos pontos B e C, então AS é simediana do triângulo ABC. (você já pode usar esse fato conhecido nas próximas competições!)

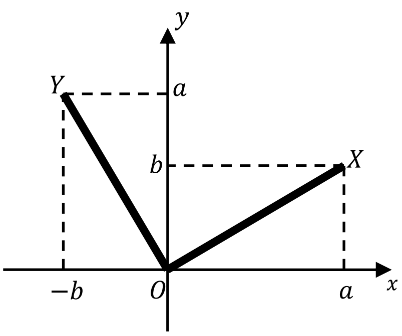
Você pode querer utilizar os seguintes fatos conhecidos:
Fato 1: a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo possui comprimento igual à metade do comprimento da hipotenusa.
Fato 2: Dados 4 pontos X, Y, Z e W sobre uma circunferência de centro O com Z, W e O no mesmo lado em relação à reta XY (como na figura a seguir) podemos afirmar que $\angle XZY = \angle XWY = \frac{1}{2}\angle XOY$.



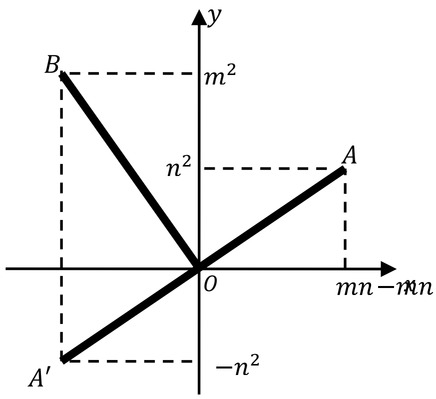
PROBLEMA 4

Nessa questão, nós demonstraremos, sem o auxílio do Teorema de Pitágoras, que, sendo m e n inteiros positivos, $m > n$, um triângulo com lados $m^2 - n^2$, $2mn$ e $m^2 + n^2$ é retângulo.

a) Sejam $O = (0,0)$ a origem, $X = (a, b)$ e $Y = (-b, a)$. Mostre que os segmentos OX e OY são perpendiculares.
Você pode desejar utilizar a figura a seguir:



b) No sistema cartesiano a seguir, considere o segmento com extremidades $A = (mn, n^2)$ e $A' = (-mn, -n^2)$. Considere ainda o segmento com extremidades $B = (-mn, m^2)$ e $O = (0,0)$. Utilizando o item a, prove que AA' e OB são perpendiculares.

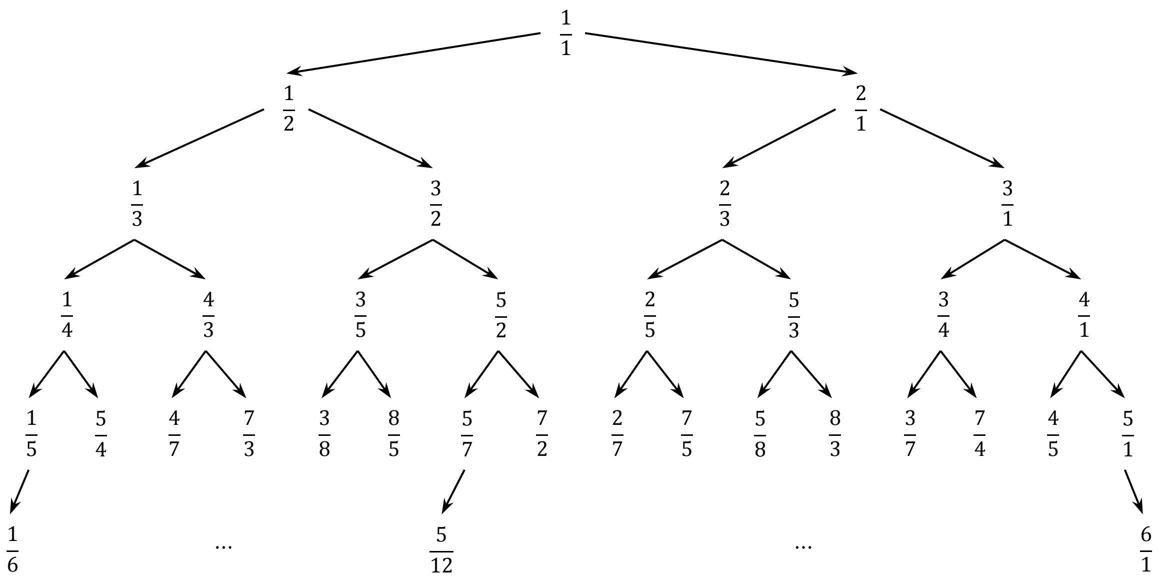


c) Demonstre que os triângulos OBA' e OBA são congruentes.
d) Considere o ponto $C = (-mn, n^2)$. Verifique que o triângulo ABC satisfaz as condições do nosso problema, ou seja, tem lados $m^2 - n^2$, $2mn$ e $m^2 + n^2$ e é retângulo. Lembre-se que não vale utilizar o Teorema de Pitágoras.

PROBLEMA 5

Um fato matemático surpreendente é que existe a mesma quantidade de números inteiros positivos e de números racionais positivos (números que podem ser escritos como fração irredutível $\frac{p}{q}$). A surpresa vem do fato de que todo número inteiro positivo n pode ser escrito como fração irredutível $\frac{n}{1}$, mas nem todo racional é inteiro positivo, como por exemplo $\frac{1}{2}$. No contexto matemático, dois conjuntos (finitos ou infinitos) possuem a mesma quantidade de elementos se podemos relacionar cada elemento de um conjunto com um elemento diferente do outro conjunto e vice-versa. Chamamos isso de *bijeção*.

Nesse problema vamos estudar uma bijeção entre os inteiros positivos e os racionais positivos usando a *Árvore de Euclides*. Essa árvore é construída a partir da fração $\frac{1}{1}$ e cada fração $\frac{p}{q}$ gera duas novas frações $\frac{p}{p+q}$ e $\frac{p+q}{q}$. A seguir temos os termos iniciais dessa árvore.



Para fazer o caminho voltando de uma fração qualquer $\frac{m}{n}$, com $m \neq n$, até a fração $\frac{1}{1}$ usamos os seguintes passos

$$\frac{m}{n} \leftarrow \frac{m-n}{n} \text{ se } m > n \qquad \text{e} \qquad \frac{m}{n} \leftarrow \frac{m}{n-m} \text{ se } m < n.$$

Por exemplo, começando de $\frac{5}{12}$ temos os seguintes passos:

Como $5 < 12$ a fração veio de $\frac{5}{12-5} = \frac{5}{7}$. Como $5 < 7$ essa fração foi gerada por $\frac{5}{7-5} = \frac{5}{2}$. Agora temos $5 > 2$, então a fração foi gerada por $\frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$. Seguindo esses passos chegamos no caminho

$$\frac{5}{12} \leftarrow \frac{5}{7} \leftarrow \frac{5}{2} \leftarrow \frac{3}{2} \leftarrow \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{1}.$$

a) Determine o caminho voltando da fração $\frac{11}{9}$ até a fração $\frac{1}{1}$ escrevendo as frações obtidas em cada passo.

Vamos atribuir a cada fração um número inteiro positivo que representa sua posição na árvore. A fração $\frac{1}{1}$ está na posição 1, $\frac{1}{2}$ está na posição 2, $\frac{2}{1}$ está na posição 3, $\frac{1}{3}$ está na posição 4, e assim por diante. Como cada fração gera duas frações, podemos observar que se uma fração $\frac{p}{q}$ possui posição N as frações $\frac{p}{p+q}$ e $\frac{p+q}{q}$ geradas dela ocuparão as posições $2N$ e $2N+1$, respectivamente. Dessa forma, para achar o termo que ocupa a posição t vamos dividindo por 2 até obter quociente 1. Depois devemos fazer os passos no sentido contrário, multiplicando por 2, ou multiplicando por 2 e somando 1, de acordo com os restos obtidos nas divisões por 2.

Por exemplo, para encontrar a fração que ocupa a posição 88 dividimos 88 por 2, obtendo quociente 44 e resto 0, ou seja,

$$88 = 2 \cdot 44 + 0$$

Agora, dividimos 44 por 2, obtendo quociente 22 e resto 0, ou seja,

$$44 = 2 \cdot 22 + 0$$

Continuando o processo, obtemos

$$22 = 2 \cdot 11 + 0$$
$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

e paramos aqui, pois obtivemos quociente 1.

Os restos obtidos, de baixo para cima, são 0, 1, 1, 0, 0, 0. Logo fazemos uma soma no denominador, duas no numerador e, finalmente, três somas no denominador. A ramificação da árvore é, então,

$$\frac{1}{1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \to \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \to \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \to \frac{5}{2+5} = \frac{5}{7} \to \frac{5}{7+5} = \frac{5}{12} \to \frac{5}{12+5} = \frac{5}{17}$$

ou, em resumo,

$$\frac{1}{1} \to \frac{1}{2} \to \frac{3}{2} \to \frac{5}{2} \to \frac{5}{7} \to \frac{5}{12} \to \frac{5}{17}.$$

b) Usando os passos anteriores, determine a fração que está na posição 110.

Talvez a maior mágica dessa bijeção é encontrar uma forma de obter a fração x_{n+1} na posição $(n+1)$ a partir da fração x_n na posição n. De fato, vamos mostrar que vale a seguinte equação de recorrência:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor + 1 - x_n},$$

onde $\lfloor x_n \rfloor$ denota a parte inteira do número x_n e é igual ao maior inteiro que é menor ou igual a x_n.

Por exemplo, para a fração na posição 9 é dada por $x_9 = \frac{4}{3}$ temos $1 \leq \frac{4}{3} < 2 \Rightarrow \lfloor x_9 \rfloor = 1$ e $\frac{1}{2\lfloor x_9 \rfloor + 1 - x_9} = \frac{1}{3 - \frac{4}{3}} = \frac{3}{5}$ que de fato é a fração x_{10} que ocupa a posição 10. Observe que se $x_n = \frac{k}{1}$ está no fim de uma linha, então $x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor + 1 - x_n} = \frac{1}{2k + 1 - \frac{k}{1}} = \frac{1}{k+1}$ que é justamente o primeiro termo da linha seguinte.

c) Mostre que se duas frações consecutivas $x_n = \frac{p}{p+q}$ e $x_{n+1} = \frac{p+q}{q}$ são geradas a partir da mesma fração $\frac{p}{q}$, então elas satisfazem a equação de recorrência.

d) Considere duas frações consecutivas x_t e x_{t+1} na árvore, mas que não foram geradas da mesma fração. Mostre que elas satisfazem a equação de recorrência.

Sugestão: mesmo não sendo geradas da mesma fração subindo através da árvore sempre podemos chegar numa fração $\frac{p}{q}$ que aparece no caminho dessas duas frações e escrever cada uma delas em função de p, q e do número de subidas na árvore. Por exemplo, para $x_{19} = \frac{7}{3}$ e $x_{20} = \frac{3}{8}$ a fração comum é $\frac{1}{2}$.

XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (12 de agosto de 2017)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

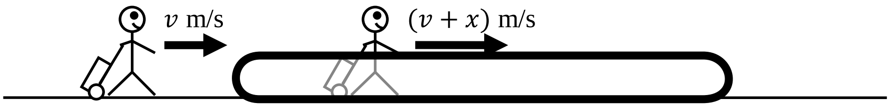
Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Nos maiores aeroportos do mundo, como o aeroporto de Cumbica, em Guarulhos, é comum haver esteiras rolantes no chão para economizar tempo de transferência entre terminais e entre portões.

Suponha que a velocidade de uma dessas esteiras seja x m/s. Assim, uma pessoa que caminha com uma velocidade v m/s fora da esteira tem uma velocidade $(v+x)$ m/s quando caminha na esteira. Em particular, uma pessoa parada fora da esteira ($v=0$ m/s) terá velocidade $(0+x)=x$ m/s se ficar parada sobre a esteira.



a) Desert Pump é um garoto que gosta muito de correr e de fazer contas. Enquanto corria pelo aeroporto de Cumbuca, ele encontrou uma esteira de 60 m de comprimento. Ele calcula que para percorrer essa distância correndo fora da esteira ele demora 12 s, e para percorrer essa distância correndo sobre a esteira ele demora 10 s. Determine a velocidade de Desert correndo e também a velocidade da esteira.

b) Suponha que a distância entre dois portões, A e B, é de 120 m. Suponha ainda que existe uma esteira de 60 m (a mesma do item anterior) entre esses dois portões que pode ser usada pelos passageiros para percorrer os 120 m mais rapidamente. Terencetaldo está no portão A e precisa ir para o portão B. Ao começar seu trajeto ele percebe que o cadarço do pé direito do seu tênis desamarrou. Para amarrá-lo ele deve ficar parado ($v=0$ m/s) durante 15 s. Considere que Terencetaldo caminha com velocidade de 2 m/s. Ele possui três opções para percorrer os 120 m.

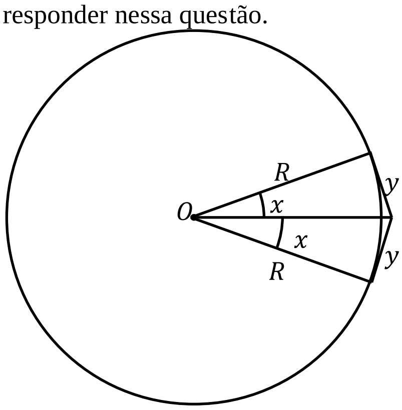
i) Não usa a esteira e amarra o cadarço antes de iniciar o trajeto.
ii) Usa a esteira e amarra o cadarço quando não está sobre a esteira.
iii) Usa a esteira e amarra o cadarço quando está sobre a esteira.

Para cada uma das três opções, calcule o tempo necessário para Terencetaldo ir do portão A até o portão B. Usando qual das opções ele chegará em menos tempo no portão B?

PROBLEMA 2

Vamos supor nesse problema que a linha do Equador é uma circunferência C.

Imagine que iremos envolver a linha do Equador com uma corda cuja medida é 2 metros maior do que a medida de C. Em um determinado ponto iremos puxar essa corda o máximo que pudermos, como mostra a figura a seguir. Qual será a altura h que atingiremos? Essa é a pergunta que desejamos responder nessa questão.



a) Determine a medida de y, indicado na figura, em função de R e x, em que R está em metros e x em radianos.

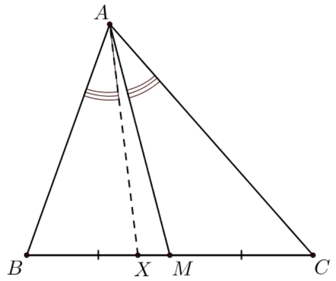
b) Mostre que $\operatorname{tg} x - x = \frac{1}{R}$.

c) Verifique que $h = \frac{R(1-\cos x)}{\cos x}$.

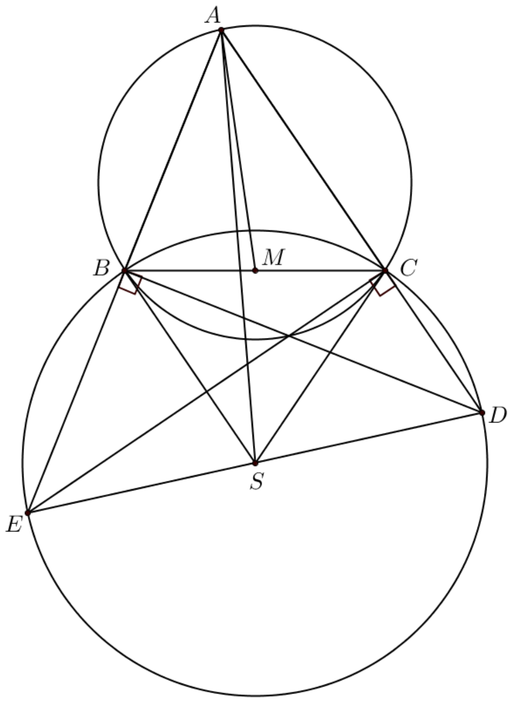
d) É claro que x será bastante pequeno. Assim, podemos adotar as aproximações $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ e $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Adotando $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, determine h em metros.

PROBLEMA 3

Considere um triângulo ABC e M o ponto médio do lado BC. O segmento AM é conhecida como *mediana* do triângulo relativa ao vértice A. A *simediana* relativa ao vértice A é a reta que também passa pelo ponto A e que forma os mesmos ângulos que a mediana, mas trocando a ordem dos ângulos. Na figura a seguir, temos as representações da mediana AM e da simediana AX. Observe a igualdade de ângulos $\angle BAX = \angle MAC$.



Nesse problema, vamos estudar mais sobre a simediana e como construí-la.



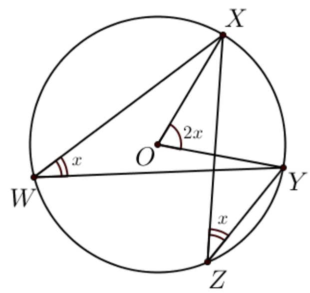
Considere o triângulo acutângulo ABC, o ponto médio M do lado BC e a circunferência Γ que passa pelos pontos A, B e C. Pelo vértice B traçamos a reta perpendicular ao lado AB intersectando o prolongamento do AC no ponto D. De maneira análoga, traçamos a perpendicular ao lado AC pelo vértice C intersectando a reta AB em E. Seja S o ponto médio do segmento DE.

a) Mostre que existe uma circunferência de centro S que passa pelos pontos B, C, D e E, ou seja, que $SB = SC = SD = SE$.
b) Mostre que os triângulos ABC e ADE são semelhantes.
c) Explique por que AS é a simediana do vértice A, ou seja, por que $\angle BAS = \angle CAM$.
d) Mostre que $\angle SBC = \angle BAC = \angle SCB$.

Como consequência, se tomarmos um triângulo ABC, sua circunferência circunscrita Γ e o ponto S de encontro das tangentes Γ pelos pontos B e C, então AS é simediana do triângulo ABC. (você já pode usar esse fato conhecido nas próximas competições!)

Você pode querer utilizar os seguintes fatos conhecidos:
Fato 1: a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo possui comprimento igual à metade do comprimento da hipotenusa.
Fato 2: Dados 4 pontos X, Y, Z e W sobre uma circunferência de centro O com Z, W e O no mesmo lado em relação à reta XY (como na figura a seguir) podemos afirmar que

$$\angle XZY = \angle XWY = \frac{1}{2}\angle XOY .$$



PROBLEMA 4

Dizemos que um número é *algébrico* quando ele é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Por exemplo: 1 é algébrico, pois é raiz de $x - 1$; $\sqrt{2}$ é algébrico, pois é raiz de $x^2 - 2$.
Quando um número não é algébrico, dizemos que ele é *transcendental*. As demonstrações de transcendência são, em geral, bem difíceis. As famosas constantes $\pi \approx 3{,}14$ e $e \approx 2{,}72$ são números transcendentais.
Assim, podemos entender porque um dos resultados mais celebrados da Matemática no século passado foi o *Teorema de Gelfond-Schneider*. Ele foi demonstrado independentemente por esses dois matemáticos em 1934.
Seja a um número algébrico, a diferente de 0 *e* 1, *e b um número algébrico irracional. Então a^b é um número transcendental.*

Iremos provar a transcendência de um número utilizando Gelfond-Schneider.

a) Prove que a razão áurea, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, é um número algébrico. Ou seja, apresente um polinômio com coeficientes inteiros que tem φ como uma de suas raízes.

b) Mostre que, para todo n inteiro positivo, φ^n é irracional. Nesse item, basta mostrar que $\varphi^n = r \cdot \sqrt{5} + s$, em que r e s são números racionais.
Você pode desejar utilizar o Binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

c) A partir do item b, demonstre que $\log \varphi$ é um número irracional.
d) Utilizando o Teorema de Gelfond-Schneider, conclua que $\log \varphi$ é um número transcendental.

PROBLEMA 5

Uma ferramenta bastante útil em Combinatória é o *grafo*, que é definido como o par ordenado $G = (V, A)$, em que V é o conjunto de *vértices* e A é um conjunto de pares $\{v, w\}$ de vértices, denominados *arestas* (também dizemos que v e w estão *ligados*). A maneira mais usual de representar um grafo é fazer um desenho com pontos representando vértices e curvas ou segmentos ligando dois pontos representando arestas:

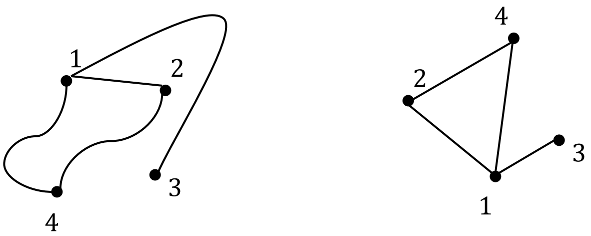


Figura 1: duas maneiras de desenhar o mesmo grafo

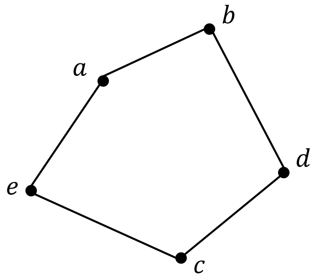


Figura 2: ciclo

Alguns grafos são especiais e recebem nomes. Um *ciclo* é uma sequência de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tais que v_i e v_{i+1} estão ligados, para $i = 1,2, \ldots, n-1$ e v_n e v_1 estão ligados (veja a figura 2 acima).

O objeto de estudo desse problema são as *florestas*. Uma floresta é um grafo que não contém ciclos. Cada parte conectada de uma floresta é uma *árvore*. Árvores são muito utilizadas em computação; por exemplo, em buscas de websites. Uma definição que ajuda nesse sentido é definir um vértice como ponto inicial da busca; denominamos tal vértice a *raiz* da árvore. Na figura 3 exibimos uma floresta, com cada árvore tendo uma raiz.

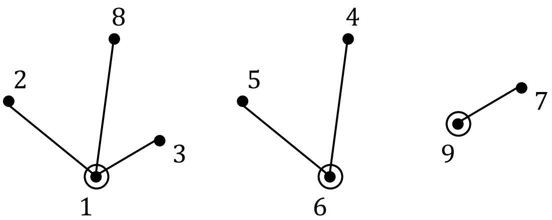


Figura 3: floresta com $n = 9$ vértices e $k = 3$ árvores com raiz

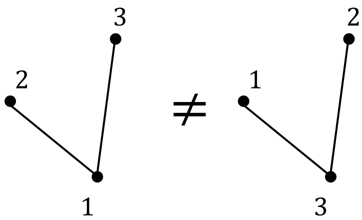


Figura 4: essas duas árvores são diferentes!

Nesse problema, calcularemos o número de maneiras de formar árvores com vértices rotulados de 1 a n. Em particular, árvores com o mesmo formato, mas com vértices numerados em outra ordem serão consideradas diferentes.

Seja $F_{n,k}$ a quantidade de florestas com n vértices divididos em k árvores, todas com raiz (ou seja, precisamos montar as árvores e escolher um vértice de cada árvore para ser sua raiz).

a) Calcule $F_{n,n}$.

b) Vamos contar o número de maneiras T de escolher uma floresta com n vértices em k árvores, todas com raiz, e depois escolher um de seus vértices que não é raiz. Explique por que $T = (n-k)F_{n,k}$.

c) Mostre que $T = n \cdot k \cdot F_{n,k+1}$.

d) Verifique que $F_{n,1} = \frac{1}{n-1} \cdot n \cdot F_{n,2}$.

e) A partir dos resultados dos itens b e c, mostre que $F_{n,1} = n^{n-1}$, e prove que o número de maneiras de formar árvores com vértices rotulados de 1 a n é n^{n-2}.