XXXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (7 de novembro de 2015)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

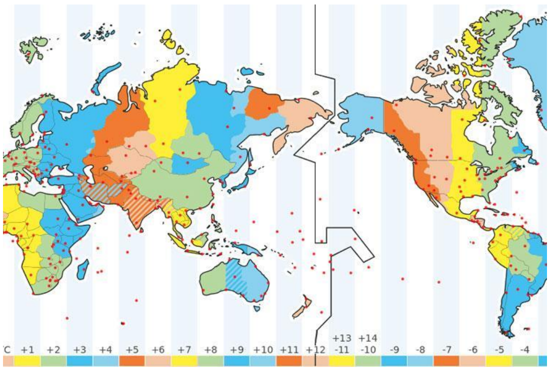
Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

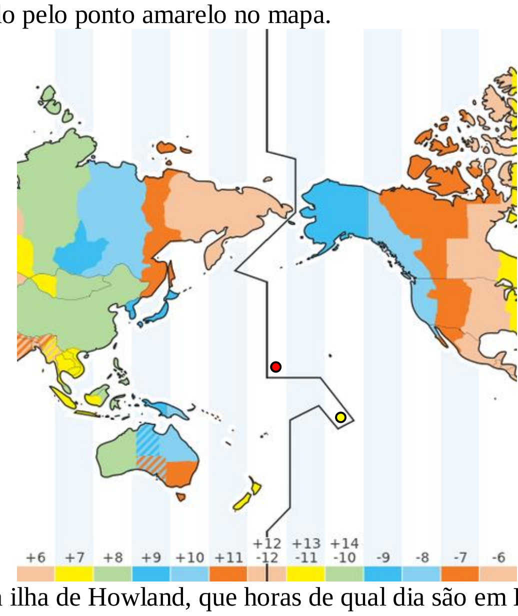
PROBLEMA 1

Hoje no horário da premiação, às 16:30 em São Paulo, será 3:30 do dia 8 de novembro em Tóquio. Por isso não faz sentido todos do mundo usarmos o mesmo horário. Para isso, existem os *fusos horários*, que indicam como calcular a hora. O horário de verão, que adianta uma hora, pode influenciar essa conta. Por exemplo, a diferença de horário entre o São Paulo e Londres, no Reino Unido, é de três fusos horários, mas aqui temos o horário de verão. Se em São Paulo são 8 horas, descontado o horário de verão são 7 horas, e no Reino Unido são 7 + 3 = 10 horas.

Com as diferenças de horário, como saber em que dia estamos? Para isso, usamos a *linha internacional da data*, que indica em que dia estamos. A linha internacional de data é independente dos fusos horários, ou seja, não coincide com algum fuso horário. No mapa a seguir, os fusos são as faixas coloridas e a linha internacional da data é a linha preta que corta o mapa em duas regiões, começando e terminando no fuso +12, que coincide com o fuso –12.



O lugar mais próximo da linha internacional da data ao leste é a ilha de Howland, um território dos EUA, na Oceania, representado pelo ponto vermelho no mapa, e o lugar mais próximo da linha internacional da data a oeste é a cidade de Kiritimati, no país de Kiribati, também na Oceania, representado pelo ponto amarelo no mapa.



a) Se é meio-dia do dia 7 de novembro na ilha de Howland, que horas de qual dia são em Kiritimati?

b) Se iniciarmos um cronômetro (que mede qualquer quantidade de horas possível) na hora 00:00:00 do dia 7 de novembro em Kiritimati, quanto tempo ele estará marcando na hora 00:00:00 do dia 8 de novembro na ilha de Howland, ou seja, por quanto tempo é dia 7 de novembro em algum lugar do mundo?

PROBLEMA 2

O *rating Elo* é uma maneira de calcular a força relativa entre enxadristas. Esse sistema, criado pelo físico Arpad Elo, é usando na organização dos principais torneios de xadrez em todo o mundo.

Dizemos que a *pontuação esperada* de um enxadrista em uma partida é igual a sua probabilidade de vitória mais metade da probabilidade de empate. Assim, sejam A e B enxadristas que tenham ratings, respectivamente, R_A e R_B. Utilizando o rating Elo, podemos estimar que a pontuação esperada de A é

$$E_A = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_B - R_A}{400}}}$$

e, analogamente, a pontuação esperada de B é

$$E_B = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_A - R_B}{400}}}$$

a) Prove que $E_A + E_B = 1$.

A Federação Internacional de Xadrez (FIDE) utiliza desde 1970 um ranking baseado nos ratings Elo. Para ter uma ideia dos valores dos ratings, podemos nos basear na tabela a seguir.

Rating	Título
Acima de 2700	Candidato a disputa do título mundial.
2500 a 2700	Grande Mestre Internacional (GMI)
2400 a 2500	Mestre Internacional (MI)
2300 a 2400	Mestre da FIDE
2200 a 2300	Candidato a Mestre
2000 a 2200	Expert
1800 a 2000	Classe A
1600 a 1800	Classe B
1400 a 1600	Classe C
1200 a 1400	Iniciante Forte
1000 a 1200	Iniciante

b) Pode-se estimar o rating de computadores e de antigos jogadores de xadrez. Por exemplo, Komodo 9.2, um dos melhores programas da atualidade tem um rating estimado de (uau!!) 3300. O enxadrista e matemático Edward Lasker, um dos melhores jogadores do início do século 20, teve o rating estimado em 2470. Verifique que a pontuação esperada de Lasker em jogo contra Komodo é menor do que 1%.

c) É claro que o rating de um jogador muda dependendo de seu desempenho. Suponha que um jogador tenha pontuação esperada E, porém tenha obtido S pontos. Então, sendo R o seu antigo rating, o seu novo rating R' será

$$R' = R + K(S - E)$$

Em que podemos adotar $K = 10$, para jogadores com rating acima de 2400 e pelo menos 30 jogos oficiais.

O jogador brasileiro melhor rankeado atualmente (novembro de 2015) é o GMI Rafael Leitão com rating 2633. O jogador alemão melhor rankeado é o GMI Liviu-Dieter Nisipeanu com rating 2683. Considere que em um match de 8 partidas Leitão vença Nisipeanu por 7 a 1. Qual seria o novo rating do GMI brasileiro?

PROBLEMA 3

Provavelmente você já ouviu falar sobre o Oscar de melhor filme, mas você sabe como é feita a votação que elege o melhor filme? O método usado é chamado voto preferencial. Nesse método, há cinco indicados para o melhor filme. Cada um dos membros da Academia de Artes e Ciências Cinematográficas deve ordenar os cinco filmes em sua ordem de preferência. Então ele deve colocar $\mathbf{1}$ ao lado do filme que ele considera o melhor, $\mathbf{2}$ ao lado do filme que considera o segundo melhor e assim por diante. Primeiro, são contados os votos apenas com número $\mathbf{1}$. Se algum filme possuir mais que $\mathbf{50\%}$ do total de votos, ele é eleito o melhor filme. Caso contrário, o filme com menor quantidade de votos $\mathbf{1}$ é eliminado da disputa e cada um de seus votos é passado para a próxima preferência, ou seja, os filmes que estão com número $\mathbf{2}$. Após os votos serem redistribuídos, se algum filme possuir mais que $\mathbf{50\%}$ dos votos ele é eleito. Caso contrário, o filme com menor quantidade de votos é eliminado e cada voto daquele filme passa para o filme preferido do eleitor que ainda não foi eliminado. O processo segue até que um filme seja eleito com mais que $\mathbf{50\%}$ das preferências dos votos entre os filmes que restaram.

Suponha que os candidatos ao Oscar $\mathbf{2016}$ de melhor filme são:

A – Cheirosos e Curiosos $\boldsymbol{\pi}$;
B – Straw Wars: o despertar na roça;
C – Atividade para Aderbal: diversão com asma;
D – Os Jengadores: a era do Cupom;
E – Bonde dos Espiões.

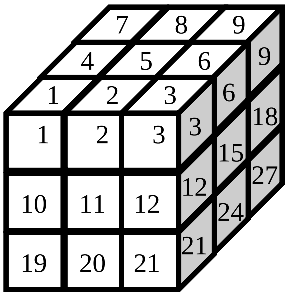
Usaremos as letras A, B, C, D e E antes do nome de cada filme para apresentar a contagem dos votos. A tabela a seguir mostra a primeira e a segunda opção dos votos de cada um dos 5783 eleitores. Na coluna (fileira vertical) "A" estão os votos em que o filme A foi o preferido dos eleitores. Na linha (fileira horizontal) "B" estão os votos em o segundo filme preferido para ganhar o Oscar de melhor filme. Por exemplo, para 85 membros o melhor filme foi A e o segundo melhor filme foi B e para 185 membros o melhor filme foi D e o segundo melhor filme foi E.

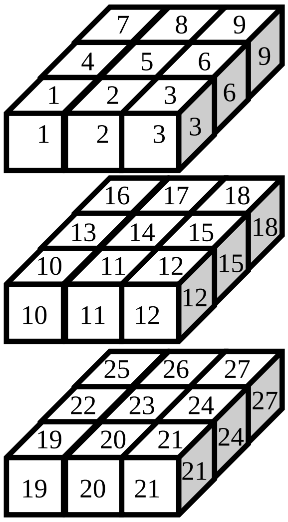
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A		259	14	73	98
B	85		151	91	1503
C	9	436		80	136
D	7	704	3		162
E	255	1349	183	185	

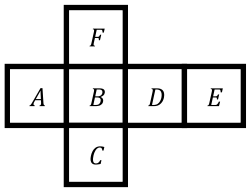
a) Qual o filme será eliminado após a primeira contagem dos votos 1?
b) Após redistribuir os votos do filme eliminado na primeira contagem dos votos 1, haverá um eleito como melhor filme? Se sim, qual filme e com quantos votos ele ficou? Caso não haja filme eleito, justifique.
c) Em outra votação (também iniciada com cinco filmes), após a primeira contagem dos votos 1**,** o filme "Lembraram de mim" foi o mais votado, mas não obteve 50% e, por isso, não foi eleito. O filme "O estiloso caso de Wesley S." foi o segundo mais votado. O filme com menos votos 1 foi "O apagado" e, portanto, ele foi eliminado. Após a redistribuição usando os votos 2 do filme eliminado, o filme "O estiloso caso de Wesley S." superou a quantidade de votos do filme "Lembraram de mim".
Mostre que ainda não haverá conclusão da eleição do melhor filme, ou seja, que será necessário fazer pelo menos mais uma eliminação para que seja eleito o melhor filme.

PROBLEMA 4
Considere um cubo $n \times n \times n$ formado por n^3 cubinhos unitários. Nesse problema, iremos verificar como podemos pintar todas as faces dos cubinhos unitários pintando algumas vezes as faces do cubo maior que podemos montar com todos eles.
Em cada vez, é claro, mudaremos os cubinhos de posição para garantir que pintaremos faces que não tinham sido pintadas anteriormente.

a) Ao pintarmos as faces do cubo $n \times n \times n$, ao todo quantas faces dos cubinhos unitários são pintadas?
b) Utilizando a resposta do item anterior, prove que devemos pintar as faces do cubo maior pelo menos n vezes para pintar todas as faces dos cubinhos unitários.
c) Nesse item iremos mostrar como pintar todas as faces de 27 cubinhos unitários pintando 3 vezes um cubo $3 \times 3 \times 3$.
Para descrever o processo, iremos numerar os cubinhos de 1 a 27 e denominar as suas faces A, B, C, D, E, F como nos desenhos abaixo:







Assim, quando escrevermos $8E$, estaremos nos referindo à face E do cubo 8.

Podemos observar que os cubinhos que são colocados nos vértices do cubo maior têm 3 de suas faces pintadas; os cubinhos que são colocados nas arestas do cubo maior, mas não nos vértices, têm 2 faces pintadas; os cubinhos que são colocados nas faces, mas não nas arestas, têm 1 face pintada.
Com as considerações feitas anteriormente, iremos representar as faces pintadas em cada vez através de tabelas. A tabela correspondente à Pintura 1 já está preenchida para você (de nada!).

	Pintura 1
Vértices	1A, 1B, 1C; 3A, 3B, 3C; 7A, 7B, 7C; 9A, 9B, 9C; 19A, 19B, 19C; 21A, 21B, 21C; 25A, 25B, 25C; 27A, 27B, 27C.
Arestas (Não Vértices)	2A, 2B; 4A, 4B; 6A, 6B; 8A, 8B; 10A, 10B; 12A, 12B; 16A, 16B; 18A, 18B; 20A, 20B; 22A, 22B; 24A, 24B; 26A, 26B.
Faces (Não Arestas)	5A; 11A; 13A; 15A; 17A; 23A.

Faça uma tabela similar – indicando vértices, arestas e faces – em seu *Bloco de Resoluções*. Essa tabela corresponderá à Pintura 2. Você deve preenchê-la de modo que, após a terceira pintura do cubo maior (você não precisa indicá-la!), todas as faces dos cubinhos unitários estejam pintadas. Observe que na Pintura 1 nenhuma face do cubo 14 foi pintada, pois ele está no centro do cubo maior.

Agora vamos ver como fazer o mesmo para cubos maiores, em especial, para o cubo $7 \times 7 \times 7$. Não se desespere! Não iremos pedir para preencher tabelas como a do item anterior (são $6 \times 7^3 = 2058$ faces dos cubinhos unitários). Faremos algumas perguntas que consideramos que, se você conseguir responder, você sabe completar a tarefa para qualquer cubo não importando o tamanho.
d) Em 6 pinturas das faces do cubo $7 \times 7 \times 7$ qual é o número máximo de cubinhos unitários que podem ser pintados inteiramente, ou seja, ter todas as faces pintadas? Não esqueça de justificar a sua resposta.
e) Para ser possível concluir a pintura das faces dos cubinhos unitários em 7 pinturas após a *Pintura 6* o número de cubinhos unitários pintados inteiramente deve "caber" no interior do cubo maior (você vai observar que não é uma boa ideia o que fizemos no item d). No nosso caso, exatamente quantos cubinhos unitários devem estar "prontos" após a *Pintura 6*?
f) Considerando que completaremos a nossa tarefa em 7 pinturas, qual é o número mínimo de pinturas para deixarmos prontos os cubinhos unitários que na última delas estarão no interior do cubo?

PROBLEMA 5
Charles Babbage (1791-1871) foi um inventor que idealizou e projetou um protótipo do computador moderno, a *Máquina Analítica*, para o qual Ada Lovelace (1815-1852), filha do poeta Lord Byron, escreveu o que muitos consideram o primeiro programa de computador, em 1843. No lugar de microchips, a Máquina Analítica de Babbage usava engrenagens.
Um dos componentes para cálculos da Máquina Analítica faz a soma de dois números. Cada algarismo é uma engrenagem, e os números são formados empilhando as engrenagens, com as unidades embaixo das dezenas, as dezenas embaixo das centenas, e assim por diante. O dispositivo funciona em três partes: na primeira, após serem dispostos os números A e B nas engrenagens, giramos a engrenagem A até ela chegar ao 0, assim o número que antes era A passa a ser $A + B$.

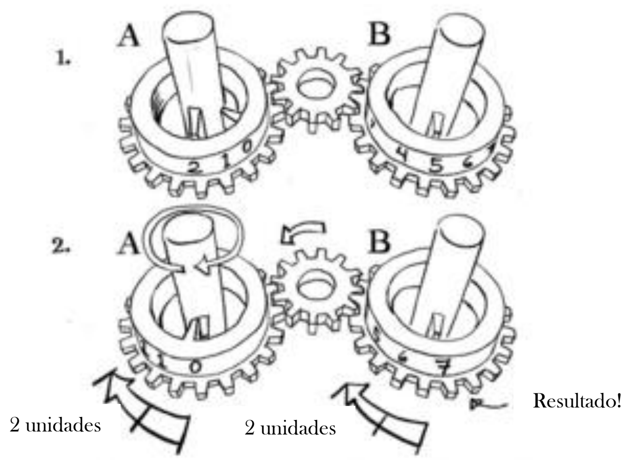


Figura 1: somando 2 *e* 5. *O resultado aparece na engrenagem* B.
O problema ocorre quando $A + B$ ultrapassa 10 e há um "vai um" para a próxima casa decimal. Para resolver isto, na segunda parte, toda vez que a engrenagem B ultrapassa o 9, ela empurra uma alavanca C através de um dente (observe a figura 2), que posiciona um dente em D logo abaixo do chanfro E (detalhe I na figura 3). Após todas as engrenagens em A serem zeradas, a haste H é levantada, levantando junto com ela todos os chanfros correspondentes aos "vai um" e encaixando as engrenagens G correspondentes em A. Um giro de G faz girar A uma vez, que faz B também girar uma vez, adicionando todos os "vai uns" de uma vez. Ainda há um segundo problema a ser resolvido, quando ao adicionar um "vai um", obtemos um segundo "vai um" que não havia sido contado antes. Para isto, na terceira parte, um dispositivo F acoplado em B se encaixa num chanfro toda vez que B está parado em 9 (detalhe II na figura 3). Assim, se um "vai um" é somado a esse 9, então ele também gerará um "vai um" e o próximo chanfro também será levantado. Mas se não há "vai um" a ser somado ao 9, então não haverá "vai um" para o próximo chanfro, assim ele não será levantado.

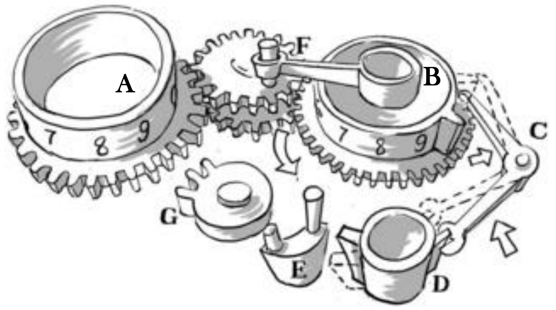


Figura 2: como cada algarismo da soma é encontrado.

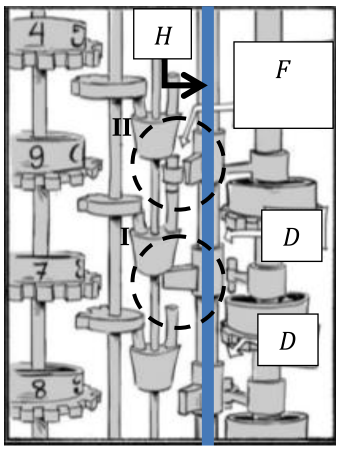


Figura 3: gerenciando os "vai-uns".

(todas as figuras são de Sydney Padua, *The Thrilling Adventures of Lovelace and Babbage*.)
a) Indique quais dispositivos, D ou F, são acionados em cada algarismo na soma $1458956 + 2593049$.
b) Um potencial problema seria os dispositivos D e F serem acionados ao mesmo tempo, encavalando os chanfros. Mas isso nunca acontece. Explique por quê.
c) Suponha que cada movimento de engrenagem gaste um segundo por dente na Máquina Analítica (por exemplo, uma engrenagem demora 4 segundos para girar do 1 para o 5). Considerando que engrenagens são giradas ao mesmo tempo, mostre que a máquina demora no máximo 10 segundos para efetuar a soma.

XXXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (7 de novembro de 2015)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Charles Ponzi foi um italiano que ficou famoso por um mau motivo nos Estados Unidos. Ele foi o criador de um tipo de esquema que ficou conhecido como *pirâmide*. Nesse tipo de esquema, as pessoas investem dinheiro visando um rendimento muito alto, mas não há aumento real da riqueza. O dono do esquema algumas vezes usa o dinheiro de novos investidores para pagar os rendimentos dos investidores anteriores, além de enriquecer com parte do dinheiro do esquema. Como em algum momento não haverá novos investidores, torna-se impossível sustentar o esquema por muito tempo.

A ideia inicial de Ponzi era um negócio de importação da Itália de selos internacionais de correspondência, chamados de IRC. Cada selo IRC comprado na Itália custava 2 liras e podia ser vendido em Boston nos Estados Unidos por 0,5 dólares.

a) Suponha que Ponzi possui 100 dólares para investir em selos IRC. Suponha que ele gasta 70 dólares no transporte dos selos e outros gastos na manipulação dos selos. Na época cada dólar podia ser trocado por 44 liras. Quantos dólares Ponzi ganharia após a venda dos selos IRC importados?

Infelizmente para Ponzi, esse negócio foi proibido pelo governo, pois o preço dos selos IRC eram mantidos por acordos internacionais e não podiam ser usados para lucrar. Mas Ponzi já havia conseguido muitos investidores para o seu negócio. Enquanto Ponzi conseguia novos investidores ele conseguia pagar os rendimentos dos primeiros investidores. Começando em janeiro de 1920, ele conseguia dobrar seus investidores a cada mês. Em julho de 1920, por complicações jurídicas houve uma corrida dos investidores para reaver o dinheiro que estaria com Ponzi. O esquema de Ponzi chegou ao fim por não conseguir pagar suas obrigações com os investidores e ele foi preso por fraude postal.

b) Wesley S. decide iniciar um esquema de pirâmide. Cada pessoa que entra no esquema de Wesley S. investe 10 dólares. Suponha que no mês um do esquema Wesley S. atraiu 100 investidores e que, a cada mês, Wesley S. consegue dobrar a quantidade total de investidores no seu esquema – ou seja, no mês dois haverá 200 investidores, no mês três 400 e assim por diante. Usando que 2^{10} é aproximadamente 1000, mostre que em dois anos o dinheiro no esquema de Wesley S. será superior à fortuna de Tony Stark, estimada em $12{,}4$ bilhões de dólares.

PROBLEMA 2

O *rating Elo* é uma maneira de calcular a força relativa entre enxadristas. Esse sistema, criado pelo físico Arpad Elo, é usando na organização dos principais torneios de xadrez em todo o mundo.

Dizemos que a *pontuação esperada* de um enxadrista em uma partida é igual a sua probabilidade de vitória mais metade da probabilidade de empate. Assim, sejam A e B enxadristas que tenham ratings, respectivamente, R_A e R_B. Utilizando o rating Elo, podemos estimar que a pontuação esperada de A é

$$E_A = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_B - R_A}{400}}}$$

e, analogamente, a pontuação esperada de B é

$$E_B = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_A - R_B}{400}}}$$

a) Prove que $E_A + E_B = 1$.

A Federação Internacional de Xadrez (FIDE) utiliza desde 1970 um ranking baseado nos ratings Elo. Para ter uma ideia dos valores dos ratings, podemos nos basear na tabela a seguir.

Rating	Título
Acima de 2700	Candidato a disputa do título mundial.
2500 a 2700	Grande Mestre Internacional (GMI)
2400 a 2500	Mestre Internacional (MI)
2300 a 2400	Mestre da FIDE
2200 a 2300	Candidato a Mestre
2000 a 2200	Expert
1800 a 2000	Classe A
1600 a 1800	Classe B
1400 a 1600	Classe C
1200 a 1400	Iniciante Forte
1000 a 1200	Iniciante

b) Pode-se estimar o rating de computadores e de antigos jogadores de xadrez. Por exemplo, Komodo 9.2, um dos melhores programas da atualidade tem um rating estimado de (uau!!) 3300. O enxadrista e matemático Edward Lasker, um dos melhores jogadores do início do século 20, teve o rating estimado em 2470. Verifique que a pontuação esperada de Lasker em jogo contra Komodo é menor do que 1%.
c) É claro que o rating de um jogador muda dependendo de seu desempenho. Suponha que um jogador tenha pontuação esperada E, porém tenha obtido S pontos. Então, sendo R o seu antigo rating, o seu novo rating R' será

$$R' = R + K(S - E)$$

Em que podemos adotar $K = 10$, para jogadores com rating acima de 2400 e pelo menos 30 jogos oficiais.
O jogador brasileiro melhor rankeado atualmente (novembro de 2015) é o GMI Rafael Leitão com rating 2633. O jogador alemão melhor rankeado é o GMI Liviu-Dieter Nisipeanu com rating 2683. Considere que em um match de 8 partidas Leitão vença Nisipeanu por 7 a 1. Qual seria o novo rating do GMI brasileiro?

PROBLEMA 3

Uma das sequências mais famosas do mundo é a *sequência de Fibonacci*. Os dois primeiros termos são $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Para obter o terceiro termo você deve somar o segundo e o primeiro termos, ou seja, $F_3 = 1 + 1 = 2$. Para obter o quarto termo somam-se o terceiro e o segundo termos, realizando a operação $F_4 = 2 + 1 = 3$. E assim por diante. Desse modo, os dez primeiros termos da sequência de Fibonacci são descritos a seguir.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Sequências que começam com dois termos inteiros positivos e cada termo é a soma dos dois anteriores são conhecidas como *sequências Gibonacci*. Vamos usar a notação G_n para representar o termo na posição n de uma sequência Gibonacci. Por exemplo, se começarmos com $G_1 = 15$ e $G_2 = 11$, teremos a seguinte sequência Gibonacci.

$$15, 11, 26, 37, 63, 100, 163, 263, 426, 689, \ldots$$

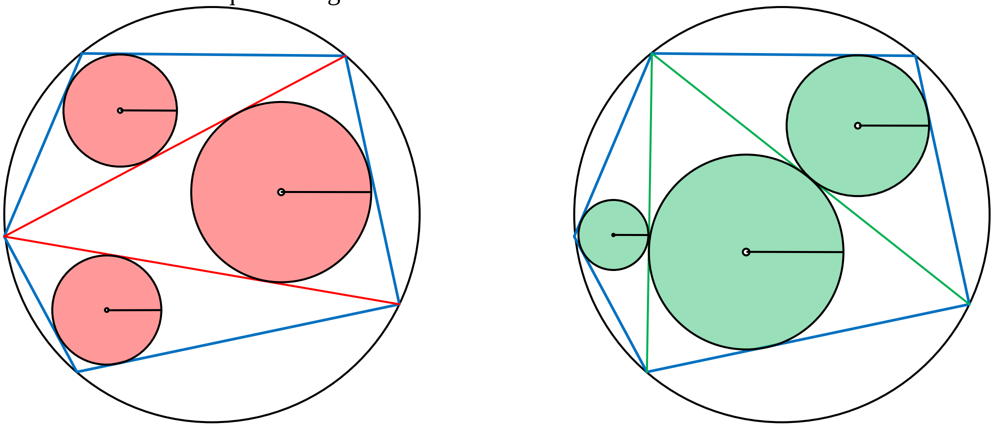
Note que, para essa sequência, temos $G_7 = 163$.
Vale lembrar que a sequência de Fibonacci é também uma sequência Gibonacci, basta considerar $G_1 = 1$ e $G_2 = 1$.
a) Determine termos iniciais G_1 e G_2 de uma sequência Gibonacci de modo que $G_7 = 26$. Mostre que esses são os únicos valores possíveis.
b) Sejam q e r inteiros positivos. Uma sequência Gibonacci foi construída de modo que $G_6 = 8q$ e $G_7 = 13q + r$. Determine, em função de q e r, os termos G_1 e G_2.
c) Determine termos iniciais G_1 e G_2 de uma sequência Gibonacci de modo que $G_7 = 2016$.

PROBLEMA 4

No Japão, durante o período Edo (1603–1867), havia, pendurados em templos, tábuas com teoremas de geometria, chamados *sangaku* ("tábua matemática", em japonês). Um deles, desenvolvido perto de 1800, tinha o seguinte teorema:

Se um polígono inscrito em um círculo é dividido em triângulos por diagonais, então a soma dos raios das circunferências inscritas nos triângulos é uma constante, independente da divisão em triângulos.

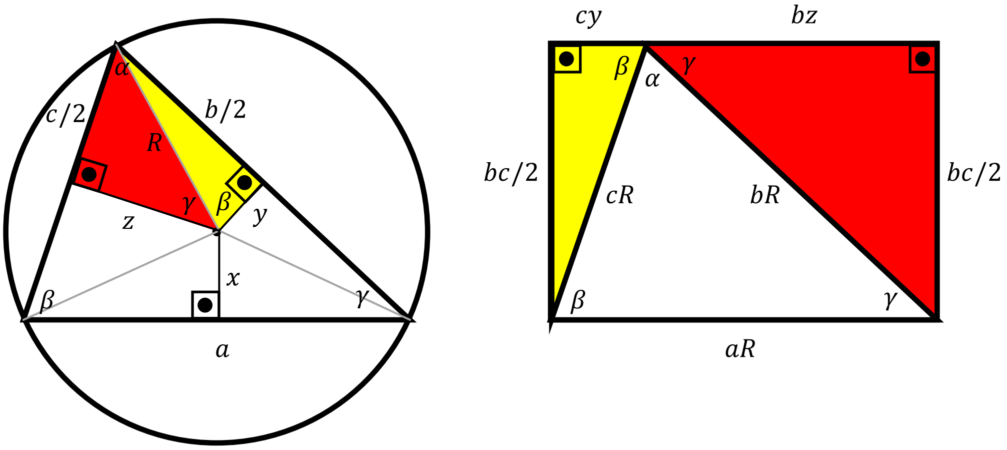
Nesse problema, demonstraremos o teorema para o caso particular do pentágono. Por exemplo, a soma dos raios das três circunferências inscritas da divisão da esquerda é igual à soma dos raios das três circunferências inscritas da divisão da direita.



O ingrediente principal da demonstração desse sangaku é o *teorema de Carnot*:

A soma das distâncias x, y e z do centro da circunferência circunscrita a um triângulo acutângulo aos seus lados é igual à soma dos raios R e r das circunferências circunscrita e inscrita, respectivamente. Simbolicamente, $x + y + z = R + r$.

Vamos provar esse teorema.



Observando as figuras acima, temos $aR = bz + cy$. Analogamente, temos também $bR = az + cx$ e $cR = ay + bx$. Somando as equações, obtemos

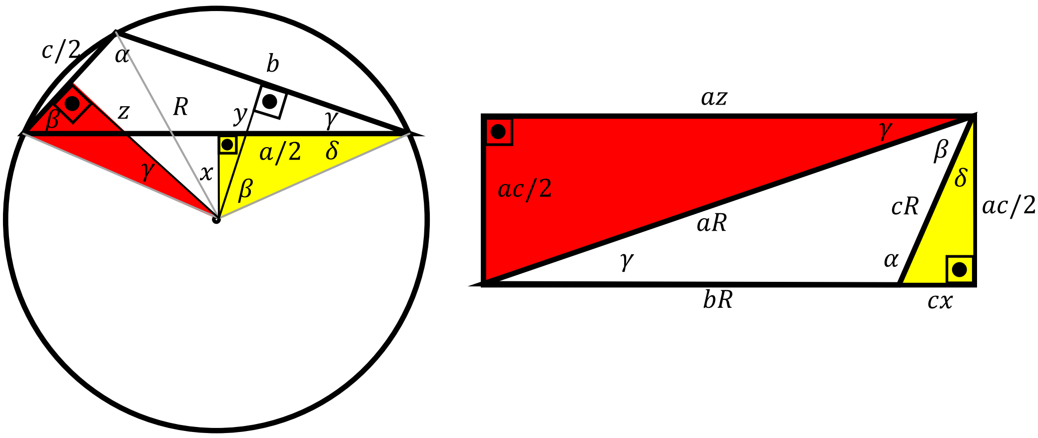
$$aR + bR + cR = bz + cy + az + cx + ay + bx \Leftrightarrow (a+b+c)R + ax + by + cz = (a+b+c)(x+y+z).$$

Mas sabemos também que $ax + by + cz = 2S$, em que S é a área de ABC, e que $S = pr = \frac{(a+b+c)r}{2}$. Logo

$$(a+b+c)R + (a+b+c)r = (a+b+c)(x+y+z) \Leftrightarrow R + r = x + y + z,$$

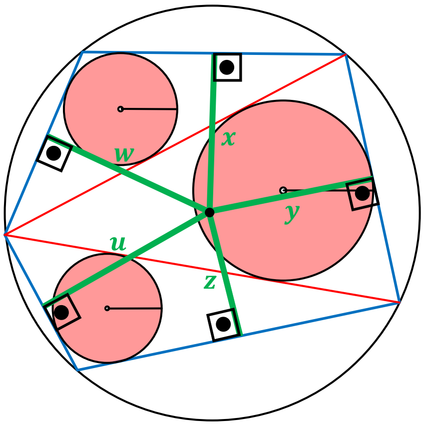
e provamos o teorema de Carnot. Pode-se verificar que essa demonstração também funciona para o triângulo retângulo.

a) Para triângulos obtusângulos, o centro da circunferência circunscrita fica fora do triângulo e o teorema de Carnot pode ser generalizado: se x é a distância ao maior lado, temos $-x + y + z = R + r$.



Prove essa versão do teorema de Carnot. *Dica: veja as figuras acima!*

b) Agora provaremos o caso particular do sangaku para o pentágono. Isto é, prove que a soma dos raios das três circunferências inscritas é igual a $x + y + z + w + u - 3R$, em que x, y, z, w e u são as distâncias do centro da circunferência circunscrita aos lados do pentágono e R é o raio da circunferência circunscrita.



PROBLEMA 5

Como os computadores fazem para procurar palavras em um texto? Um procedimento para busca de padrões é o *algoritmo KMP* (de Knuth-Morris-Pratt), desenvolvido em 1974 por Donald Knuth e Vaughan Pratt e, independentemente, por James H. Morris. Ele funciona da seguinte forma: seja p um padrão procurado e t um texto onde p deve ser procurado.

A título de exemplo, seja p o padrão "`abcdabd`" e t o texto "`abc abcdab abcdabcdabde`".

i) Primeiro, uma sequência q de números inteiros considerando as repetições de letras de p é elaborada e guardada; o primeiro número q_1 é sempre -1; para $i \geq 2$, o i-ésimo número q_i é obtido da seguinte forma: considere o padrão p_{i-1} formado pelas primeiras $i-1$ letras de p. O número q_i é a maior quantidade, menor do que $i-1$, dos caracteres finais de p_{i-1} que coincidem com os primeiros caracteres de p_{i-1}. No nosso exemplo, sendo p "`abcdabd`", $q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7) = (-1,0,0,0,0,1,2)$, de "**a**bcd**a**" ($q_5 = 1$) e "**ab**cd**ab**" ($q_6 = 2$).

ii) Procuramos a palavra p em t. Para isso, o computador usa uma variável m, indicando a posição do caracter em t onde a busca atual por p se inicia, e uma variável j, que indica qual caracter de p está sendo comparado. Inicialmente, $m = 1$ e $j = 1$ (ou seja, vamos comparar o primeiro caracter de p com o primeiro caracter de t). O computador compara cada caracter de p com o caracter de t da seguinte forma:

- Comparamos o j-ésimo caracter de p com o $(m+j-1)$-ésimo caracter de t. Se eles são iguais, j aumenta em 1, e continuamos a comparação, indo para a próxima letra de p. Se cobrirmos todo o padrão p, temos a ocorrência, pela primeira vez, na posição m de t.
- Se eles não são iguais, olhamos q_j. Aumentamos m para $m + j - q_j - 1$ e mudamos j para $q_j + 1$; se $q_j = -1$, resetamos j para 1. Voltamos para o passo anterior.

No nosso exemplo, começamos com $m = 1$ e as comparações dão certo até $j = 3$:

abc abcdab abcdabcdabde **abcd**abd	$m = 1$ $j = 4$

Quando $j = 4$, são comparados o espaço de t e **d** de p. A comparação dá errado, ou seja, não encontramos p. Poderíamos avançar m em 1, mas o j-ésimo termo da sequência q nos diz que $q_j = 0$. Então, avançamos m de 1 para $m + j - q_j - 1 = 1 + 4 - 1 - 0 = 4$ e resetamos j para 1.

abc abcdab abcdabcdabde **a**bcdabd	$m = 4$ $j = 1$

Deu errado de novo, e avançamos m para $m + 1 - (-1) - 1 = 5$. Para esse m conseguimos uma coincidência, e j avança de 1 até 6. Na sétima e última tentativa, dá errado. Quase!

abc abcdab abcdabcdabde **abcdabd**	$m = 5$ $j = 7$

Agora, como a coincidência que temos contém `ab` no final (como o computador sabe disso? Ele nota que o j-ésimo termo da sequência q é $q_6 = 2$) para avançar m em $j - 1 - q_j = 7 - 1 - 2 = 4$ unidades, de 5 para 9; também não precisamos verificar o `ab` do final, e resetamos j para $q_j + 1 = 3$ no lugar de 1. Não dá certo, e, considerando que o j-ésimo termo de q é 0, só adiantamos m para $m + j - q_j - 1 = 11$.

abc abcdab abcdabcdabde ab**c**dabd	$m = 9$ $j = 3$

Dá errado para $m = 11$, mas dá certo para $m = 12$. Novamente dá quase tudo certo, com j indo de 1 até 6, mas dá errado para $j = 7$.

abc abcdab abcdabcdabde **abcdabd**	$m = 12$ $j = 7$

Novamente movemos m de 12 para 16 e resetamos para $j = 3$. As próximas 5 comparações dão certo, e o computador informa que existe uma ocorrência de p em t, começando na posição 16 de t.

No nosso exemplo, fizemos, além das comparações em azul e vermelho, mais 5 comparações, dando um total de $4 + 1 + 7 + 1 + 7 + 5 = 25$ comparações.

Agora é sua vez!

a) Construa a sequência q para p sendo "`nano`".

b) Sendo p o padrão "`nano`" e t, "`banananobano`", calcule a quantidade de comparações usadas pelo algoritmo KMP até a ocorrência de p em t.

c) Vamos mostrar que a etapa ii de comparação tem no máximo $2n$ comparações, sendo n a quantidade de caracteres do texto t.

c.1) Explique por que a posição m de t nunca diminui;

c.2) Justifique por que a posição $m + j - 1$ de t em que a comparação de caracteres é feita nunca diminui;

c.3) Conclua que a quantidade de comparações é menor ou igual a $2n$.

XXXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (7 de novembro de 2015)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Uma das sequências mais famosas do mundo é a *sequência de Fibonacci*. Os dois primeiros termos são $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Para obter o terceiro termo você deve somar o segundo e o primeiro termos, ou seja, $F_3 = 1 + 1 = 2$. Para obter o quarto termo somam-se o terceiro e o segundo termos, realizando a operação $F_4 = 2 + 1 = 3$. E assim por diante. Desse modo, os dez primeiros termos da sequência de Fibonacci são descritos a seguir.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Sequências que começam com dois termos inteiros positivos e cada termo é a soma dos dois anteriores são conhecidas como *sequências Gibonacci*. Vamos usar a notação G_n para representar o termo na posição n de uma sequência Gibonacci. Por exemplo, se começarmos com $G_1 = 15$ e $G_2 = 11$, teremos a seguinte sequência Gibonacci.

$$15, 11, 26, 37, 63, 100, 163, 263, 426, 689, \ldots$$

Note que, para essa sequência, temos $G_7 = 163$.

Vale lembrar que a sequência de Fibonacci é também uma sequência Gibonacci, basta considerar $G_1 = 1$ e $G_2 = 1$.

a) Determine termos iniciais G_1 e G_2 de uma sequência Gibonacci de modo que $G_7 = 26$. Mostre que esses são os únicos valores possíveis.

b) Sejam q e r inteiros positivos. Uma sequência Gibonacci foi construída de modo que $G_6 = 8q$ e $G_7 = 13q + r$. Determine, em função de q e r, os termos G_1 e G_2.

c) Determine termos iniciais G_1 e G_2 de uma sequência Gibonacci de modo que $G_7 = 2016$.

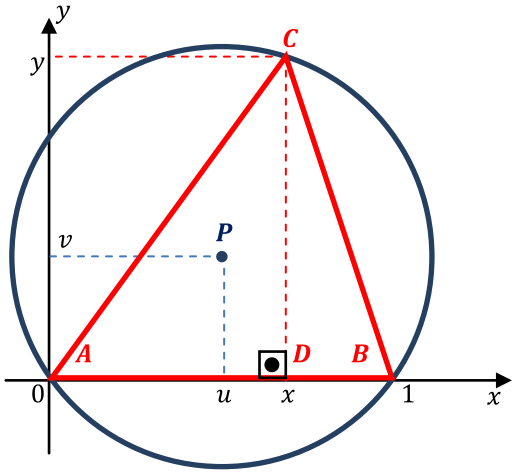
PROBLEMA 2

Nesse problema iremos apresentar algumas ideias e fatos da *Geometria Algébrica*, uma das áreas mais importantes da pesquisa Matemática na atualidade. Depois da prova, vocês poderão impressionar (ou assustar?) familiares e amigos com esses novos conhecimentos!

Consideramos o seguinte teorema de Geometria Plana, o qual iremos demonstrar com métodos da Geometria Algébrica:

O produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto da altura relativa ao terceiro lado pelo diâmetro da circunferência circunscrita.

Para começar vamos dar uma formulação algébrica para o problema. Para tal utilizaremos que a distância entre os pontos de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Pode-se observar que esse resultado é uma consequência imediata do Teorema de Pitágoras.



Sendo ABC o triângulo e P o centro de sua circunferência circunscrita. Podemos supor, sem perda da generalidade, que as coordenadas dos pontos são $A = (0;0)$, $B = (1;0)$, $C = (x;y)$ e $P = (u;v)$.

O fato de P ser o centro de uma circuferência que contém os pontos A, B e C pode ser equacionado a partir de que $PA = PB = PC$. Com efeito:

$$PA = PB \Leftrightarrow \sqrt{(u-0)^2 + (v-0)^2} = \sqrt{(u-1)^2 + (v-0)^2} \Leftrightarrow 2u - 1 = 0$$

Ou seja, sendo o polinômio h_1 tal que $h_1 = u - \frac{1}{2}$, temos que $PA = PB$ se, e somente se, $h_1 = 0$.

a) Encontre um polinômio h_2 (possivelmente nas variáveis x, y, u e v) tal que $PA = PC \Leftrightarrow h_2 = 0$.

b) Sendo R o raio da circunferência circunscrita, o teorema que desejamos demonstrar afirma que $AC \cdot BC = CD \cdot 2R$. Encontre um polinômio t tal que $AC \cdot BC = CD \cdot 2R \Leftrightarrow t = 0$.

Assim, pelos fatos verificados anteriormente, provar o teorema significa verificar que $\begin{vmatrix} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow t = 0$, ou seja, devemos provar que o conjunto das soluções do sistema de equações apresentado (nas variáveis x, y, u e v) contém as soluções da equação $t = 0$. Essa bela ideia está na essência de alguns métodos fundamentais da Geometria Algébrica.
Para concluir a demonstração, dois conceitos irão ajudar:

$\mathbb{Q}[x, y, u, v]$ - *anel dos polinômios nas variáveis x, y, u e v, com coeficientes racionais.*
Conjunto dos polinômios p que podem ser escritos como soma de parcelas, ou termos, da forma

$$c_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} u^{\alpha_3} v^{\alpha_4}$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ são números naturais e $c_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} \in \mathbb{Q}$. Vale a pena observar que para escrever tal soma adotaremos a *ordem lexicográfica*. Isto significa que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ se, e somente se: $\alpha_1 > \beta_1$ ou, para algum $1 \le k \le 4$, temos que $\alpha_i = \beta_i$ para $1 \le i < k$, porém $\alpha_k > \beta_k$. Assim, um polinômio p composto pelos monômios x^4yu^2, $2x^4yv^2$ e $-x^5uv$ será apresentado como $p = -x^5uv + x^4yu^2 + 2x^4yv^2$.

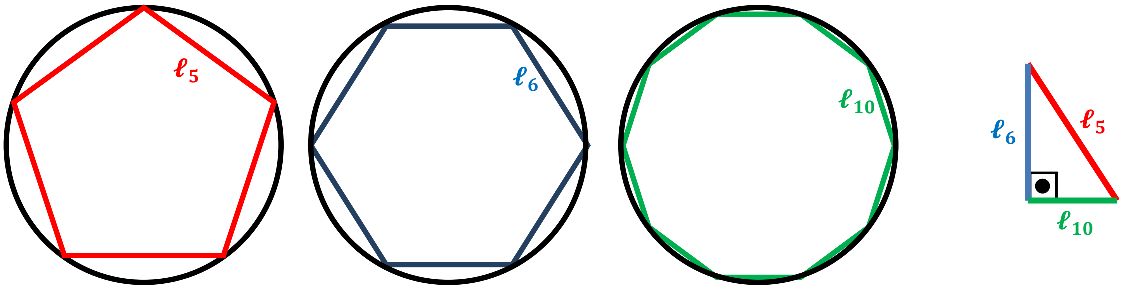
Ideal I do anel $\mathbb{Q}[x, y, u, v]$
Um ideal I de $\mathbb{Q}[x, y, u, v]$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}[x, y, u, v]$ que satisfaz todas as seguintes propriedades:
i) $0 \in I$
ii) Se $a, b \in I$, então $a + b \in I$
iii) Se $a, b \in I$, então $a \cdot b \in I$
(Podemos observar que o conceito de Ideal generaliza a ideia de conjunto de múltiplos.)

c) Considere o conjunto de polinômios $P \subset \mathbb{Q}[x, y, u, v]$ tal que $p \in P$ se, e somente se $\begin{vmatrix} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow p = 0$. Prove que P é um ideal de $\mathbb{Q}[x, y, u, v]$.

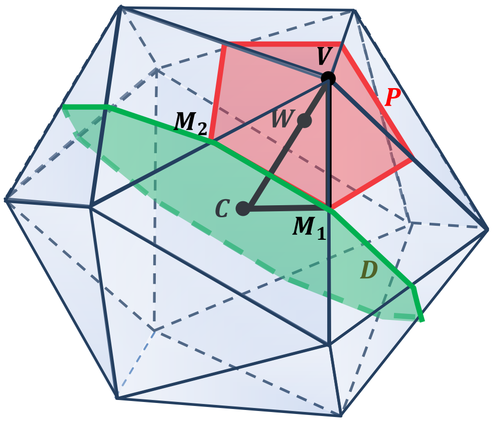
Com o resultado demonstrado no item c, basta provarmos que $t \in P$. Faremos isso com divisões sucessivas!

d) Elimine a variável u de h_2 obtendo um polinômio $\hat{h}_2$, que não dependa de u, tal que $\begin{vmatrix} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} h_1 = 0 \\ \hat{h}_2 = 0 \end{vmatrix}$. Então, divida t por $\hat{h}_2$ e depois divida o resto por h_1. Utilize a ordem lexicográfica para efetuar tais divisões.
Observe que o resto dessa segunda divisão é zero e conclua que $t \in P$, demonstrando o teorema inicial (observe que isso poderia – e é – feito mais rapidamente por um computador!).

PROBLEMA 3
Nesse problema, mostraremos, com o auxílio da geometria espacial, a *identidade pentágono-hexágono-decágono*, que diz que, sendo ℓ_n o lado do n-ágono regular inscrito em um círculo de raio 1, então $\ell_5^2 = \ell_{10}^2 + \ell_6^2$.



a) Seja ABC um triângulo retângulo em A, sendo AH a altura relativa à hipotenusa. Prove que
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$
b) Na figura a seguir, temos um icosaedro regular (cujas faces são triângulos equiláteros) de centro C. Construímos, ligando pontos médios de arestas, um pentágono regular P e um decágono regular D.



Sendo $M_1M_2 = \ell_6$, calcule, em função de ℓ_5, ℓ_6 e ℓ_{10}, os raios dos círculos circunscritos ao pentágono P e ao decágono D.
c) Sejam V um vértice e W o centro de P. Mostre que as retas WM_1 e CV são perpendiculares.
d) Utilizando o icosaedro, prove a identidade pentágono-hexágono-decágono, ou seja, sem usar trigonometria, demonstre que $\ell_5^2 = \ell_{10}^2 + \ell_6^2$.

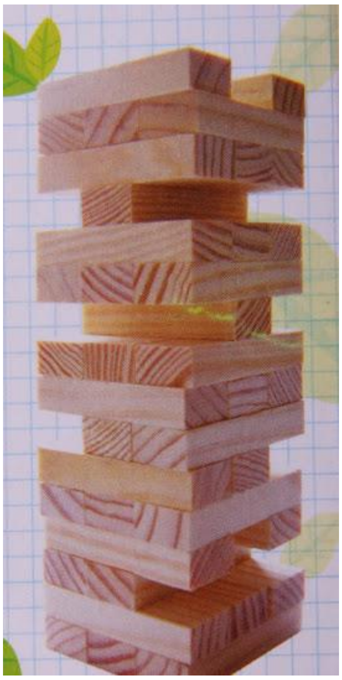
PROBLEMA 4
Nesse problema discutiremos a *Desigualdade de Bell*, apresentada em um artigo publicado em 1964 pelo físico irlandês John Stewart Bell (1928-1990). Um resultado tão importante para a consolidação da Mecânica Quântica que permitiu que o importante pesquisador Noson Yanofsky afirmasse: “Esse resultado demonstra que a superposição é um fato do universo e aquela nossa noção de espaço precisa ser ajustada.” A versão que apresentaremos não é a o do artigo original de Bell, mas uma variação devida a Bernard d’Espagnat.

Inicialmente, vamos precisar de uma desigualdade de probabilidades. Lembre-se que $\bar{X}$ é o complementar do conjunto X, isto é, sendo S o universo, $\bar{X} = S - X$.
a) Sejam A, B e C eventos de um Espaço Amostral S. Prove que $p(A \cap \bar{C}) = p(A \cap \bar{C} \cap B) + p(A \cap \bar{C} \cap \bar{B})$ e conclua que $p(A \cap \bar{C}) \leq p(\bar{C} \cap B) + p(A \cap \bar{B})$.

Agora é a hora da Mecânica Quântica! Suponha que as partículas P_1 e P_2 estão emaranhadas (o que é isso? Você não vai precisar saber agora, mas vale a pena pesquisar!). A Mecânica Quântica diz que, se medirmos os seus spins, a probabilidade de termos o mesmo resultado (digamos, cima-cima ou baixo-baixo) é dada por $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}$, em que φ é o ângulo entre as medidas.
b) O que ocorre com os spins das partículas se $\varphi = 0$? (Esse é o principal significado de elas estarem emaranhadas e tal fato não depende da distância entre elas! Estranho!!)

Considere os eventos:
A – o spin da partícula P_1 medido em 0° é cima.
B – o spin da partícula P_1 medido em 45° é cima.
C – o spin da partícula P_1 medido em 90° é cima.
O *Princípio da Incerteza de Heisenberg* mostra que é impossível determinarmos os spins de P_1 em duas direções (ângulos) diferentes. Porém podemos aproveitar o emaranhamento entre P_1 e P_2 e calcular, por exemplo, $p(A \cap \bar{C})$.
c) Explique por que $\bar{C}$ é equivalente ao spin da partícula P_2 medido em 90° ser cima e calcule $p(A \cap \bar{C})$.
d) Mostre que $p(A \cap \bar{C}) > p(\bar{C} \cap B) + p(A \cap \bar{B})$. (Não pense no significado disso agora. Sua cabeça pode explodir!)

PROBLEMA 5



Jenga é um jogo de bloquinhos muito famoso. São usados $3n$ bloquinhos de madeira, cada um com dimensões $3 \times 1 \times 1$. Na versão mais conhecida do jogo, usa-se $n = 18$. Monta-se uma torre com dimensões $3 \times 3 \times n$. Cada camada da torre consiste inicialmente de três bloquinhos em posição perpendicular aos bloquinhos da camada imediatamente abaixo. Uma camada é dita *cheia* quando contém todos os seus três bloquinhos. Duas pessoas jogam alternadamente. Cada jogador, em sua vez, deve remover um bloquinho de qualquer camada abaixo da camada cheia mais alta e colocá-lo no topo da torre, em posição perpendicular aos bloquinhos da camada cheia mais alta. O bloquinho colocado não pode iniciar uma nova camada a não ser que a camada do topo fique cheia. O jogador que derrubar a torre perde o jogo.

Em um jogo real, quando um jogador tenta retirar um bloquinho e colocá-lo no topo ele acaba alterando levemente as posições dos bloquinhos adjacentes. Neste problema, vamos considerar que o jogador realiza o movimento perfeitamente sem alterar a posição dos blocos adjacentes.

Vamos caracterizar uma torre de altura k que se mantém estável por uma k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, onde $a_i = a_{i1}a_{i2}a_{i3} \in \{111,110,101,010\}$, para $1 \leq i < k$. Se $a_{ij} = 1$ então existe um bloquinho na posição j da camada i; não faremos distinção entre 110 e 011, e 100 e 001 fazem com que a torre caia. No exemplo ao lado, temos a torre

$$(111,111,110,101,111,110,110,111,111,010,111,111,010,111,111,101).$$

No início do jogo, temos $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 111$. Veja que uma torre obtida após jogadas válidas terá $a_{k-1} = 111$ ou $a_k = 111$.

Há apenas três tipos de movimentos:

- $M101$ – ao remover o bloquinho central de um camada tipo 111.
- $M110$ – ao remover um bloquinho lateral de um camada tipo 111.
- $M010$ – ao remover o bloquinho lateral que sobrou em uma camada tipo 110.

Vale ressaltar que jogadores não poderão jogar nas camadas 101 e 010, pois a torre desmoronaria. Vamos caracterizar cada posição do jogo por uma tripla (x, y, z), onde x e y são inteiros não negativos e $z \in \{0,1,2\}$ tais que:

- x – número de camadas do tipo 111 abaixo da camada cheia mais alta.
- y – número de camadas do tipo 110 abaixo da camada cheia mais alta.
- z – número de bloquinhos acima da camada cheia mais alta.

Veja que ao fazer um movimento tipo $M101$ a posição do jogo vai de (x, y, z) para $(x-1, y, z+1)$, para $z = 0$ ou $z = 1$ e de $(x, y, 2)$ para $(x, y, 0)$, quando $z = 2$.

a) Para cada um dos outros dois tipos de movimentos, $M110$ e $M010$, determine a variação da posição (x, y, z) resultante.

Seja $v(x, y, z)$ o *valor* da posição (x, y, z), onde o valor da posição é 1 se o primeiro jogador pode forçar sua vitória partindo dessa posição e 0 caso contrário. É possível montar uma recorrência para o valor de cada posição. Por exemplo, se $x > 0$, $y = 0$ e $z = 0$ ou $z = 1$, tem-se

$$v(x, y, z) = 1 - \min\{v(x-1, 0, z+1), v(x-1, 1, z+1)\},$$

e se $x > 0$, $y = 0$ e $z = 2$, tem-se

$$v(x, y, z) = 1 - \min\{v(x, 0, 0), v(x, 1, 0)\}.$$

b) Em uma posição em que $x > 0$ e $y > 0$, determine equações de recorrência para o valor dessa posição.

Considere as matrizes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nós chamaremos de $a(x, y, z)$, onde $x, y, z \in \{0,1,2\}$, a posição $(x+1, y+1)$ da matriz A_z, ou seja, $a(x, y, z) = (a_z)_{x+1,y+1}$. Por exemplo, $a(0,1,2) = 0$ enquanto $a(2,1,0) = 1$.

Sendo n mód 3 o resto da divisão de n por 3, pode-se provar que

$$v(x, y, z) = \begin{cases} a(x \text{ mód } 3, y \text{ mód } 3, z), \text{se } x > 0 \text{ ou } z > 0 \\ 1, \text{se } x = z = 0 \text{ e } y \text{ mód } 3 = 1 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

c) Wesley Jengadão recebeu a posição dada na torre apresentada na questão. Qual é o valor dessa posição?

d) Das jogadas permitidas nessa situação, se existirem, determine qual tipo de movimento Wesley Jengadão deve fazer (não é rebolar com a Banda Garota Jengada!) para garantir sua vitória. Justifique sua resposta usando os valores de cada posição.