XXXVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (1º de novembro de 2014)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

De acordo com a Wikipédia, aproximadamente 98% da Antártica está coberta por um manto de gelo, que possui em média dois quilômetros de espessura. Essa cobertura de gelo tem um volume estimado em 25,4 milhões de quilômetros cúbicos, contendo 70% de toda a água doce do planeta.

O Brasil apresenta 14% da água doce do planeta e desse volume, 80% encontra-se na região amazônica.

a) Baseando-se nesses dados, pode-se afirmar que mais de 10% da água doce do planeta está na região amazônica? Não se esqueça de justificar sua resposta.

b) Calcule o volume estimado de água doce na região amazônica.

PROBLEMA 2

As eleições para alguns cargos legislativos (vereador e deputados estaduais e federais) são feitas no Brasil usando o *sistema proporcional* de votos. A ideia é contar os votos para cada partido (ou coligação), independente do candidato, e dividir as vagas de modo que cada partido tenha uma quantidade de cadeiras aproximadamente proporcional ao total de votos. Só então se considera as votações individuais dos candidatos: as vagas são preenchidas pelos candidatos mais votados de cada partido.

Mas as contas ficam um pouco mais elaboradas quando consideramos as sobras. Como essas vagas são determinadas?

- Primeiro, calcula-se o *quociente eleitoral* Q, que é o total de votos válidos dividido pelo total de vagas.
- Depois, calcula-se o número de vagas para cada partido dividindo-se o número de votos de cada partido por Q. Os algarismos depois da vírgula são desprezados (mesmo se forem iguais a 5 ou mais).
- Geralmente sobram vagas para serem preenchidas, e fazemos isso preenchendo uma vaga de cada vez: divide-se o total de votos de cada partido pela quantidade de vagas obtidas por cada partido mais 1. O maior número fica com a primeira vaga. Fazemos o mesmo para a próxima vaga, tomando o cuidado de atualizar as quantidades de vagas a cada passo.

Por exemplo, suponha que na cidade de Matemopolina 4 partidos, PPM (Partido Paulista de Matemática), PBM (Partido Brasileiro da Matemática), PM (Partido da Matemática) e MAT (Matemáticos), estejam concorrendo a 16 vagas na Assembleia Matemática. Nessa eleição, os 8.890 votos válidos foram distribuídos da seguinte forma:

PPM	PBM	PM	MAT
1.618	3.140	2.718	1.414

O quociente eleitoral é

$$Q = \frac{8890}{16} = 555{,}625$$

Deste modo, as quantidades de vagas são

PPM	PBM	PM	MAT
$\frac{1.618}{555{,}625} \approx \boxed{2}{,}91$	$\frac{3.140}{555{,}625} \approx \boxed{5}{,}65$	$\frac{2.718}{555{,}625} = \boxed{4}{,}89$	$\frac{1.414}{555{,}625} = \boxed{2}{,}54$

Com isso, preenchemos $2 + 5 + 4 + 2 = 13$ vagas. Faltam $16 - 13 = 3$. A seguinte tabela indica como as duas vagas seguintes são atribuídas:

PPM	PBM	PM	MAT	Dono da vaga
$\frac{1.618}{2+1} \approx 539{,}3$	$\frac{3.140}{5+1} \approx 523{,}3$	$\frac{2.718}{4+1} = 543{,}6$	$\frac{1.414}{2+1} = 471{,}3$	PM
$\frac{1.618}{2+1} \approx 539{,}3$	$\frac{3.140}{5+1} \approx 523{,}3$	$\frac{2.718}{5+1} = 453$	$\frac{1.414}{2+1} = 471{,}3$	PPM

a) Para que partido é atribuída a última vaga dessa eleição?

b) Ocorreu outra eleição, agora para a Câmara dos Matemadores na cidade de Matemalinos. São somente 9 vagas, e os resultados foram os seguintes:

PPM	PBM	PM	MAT
1.900	1.350	550	2.250

Quantas vagas ficaram para cada partido nessa eleição? Não se esqueça de mostrar os seus cálculos.

PROBLEMA 3

Dominó é um jogo formado por peças de dimensões 1×2, cada uma tendo dois números, ambos entre 0 e 6. Há exatamente 28 peças, que são todos os pares possíveis de dois números de 0 a 6, cada par exatamente uma vez. Um passatempo criado utilizando as peças do dominó é formar um tabuleiro 7×8 de números variando de 0 a 6 e cobri-lo usando exatamente uma vez cada um dos 28 dominós.

a) Considere o tabuleiro de números abaixo em que alguns dominós já estão marcados.

6	2	5	3	6	6	3	1
2	1	1	2	1	6	2	5
3	0	5	2	6	3	0	4
4	3	6	0	4	3	5	6
3	6	5	1	0	0	4	1
2	0	3	0	2	4	0	4
5	1	4	4	5	5	1	2

Alguns dos dominós em princípio só têm um lugar para serem marcados no tabuleiro (por exemplo, o 4-4, que já está marcado), e outros não, como o 2-1 (só na segunda linha há dois possíveis lugares para ele).

Preencha o tabuleiro na *Folha de Respostas* com os 28 dominós. Não se esqueça: não pode ter dominó repetido!

b) Considere agora o tabuleiro a seguir e determine uma maneira de cobri-lo com dominós.

0	5	4	6	3	5	6	6
3	1	6	1	0	0	1	2
6	0	2	4	4	2	2	3
3	3	2	6	5	0	4	2
1	5	6	3	4	1	2	6
4	1	0	1	3	0	4	5
5	1	3	4	0	5	5	2

c) Existem quantas maneiras diferentes de cobrir o tabuleiro do item b usando os dominós?

PROBLEMA 4

Nessa questão estudaremos uma aplicação de identidades polinomiais à fatoração de números grandes, bem grandes!

Em 1871, Léon François Antoine Aurifeuille obteve a fatoração $2^{58} + 1 = 536838145 \cdot 536903681$ a partir da observação de que, quando substituímos $x = 2^{29}$ na identidade $x^2 + 1 = (x + 1)^2 - 2x$, teremos

$$2^{58} + 1 = (2^{29} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{29} = (2^{29} + 1)^2 - (2^{15})^2 = (2^{29} + 1 - 2^{15}) \cdot (2^{29} + 1 + 2^{15})$$

(*no desenvolvimento acima, utilizamos também a identidade* $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.)

Vale a pena citar que, de fato, a fatoração em primos de $2^{58} + 1$ é $5 \cdot 107367629 \cdot 536903681$.

Tal abordagem deu origem às denominadas *Fatorações Aurifeullianas* um ramo bastante rico da Teoria dos Números.

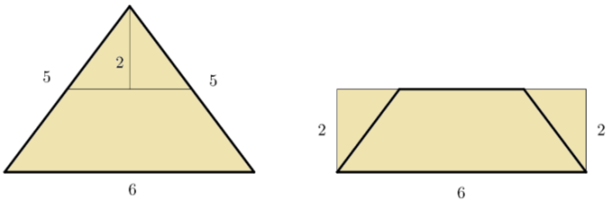
a) Desenvolva a expressão $(x + 1)((x + 1)^2 - 3x)$.

b) Utilizando a identidade (*Fatoração Aurifeulliana*) obtida no item a, apresente a fatoração em primos de 27000001.

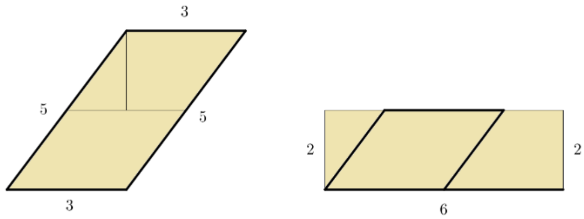
PROBLEMA 5

Duas figuras são chamadas de *isoparamétricas* quando têm o mesmo perímetro e a mesma área. Uma propriedade surpreendente das figuras isoparamétricas é que podemos cortar uma delas e rearranjar os pedaços para montar a outra.

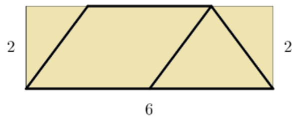
Por exemplo, o triângulo e o retângulo a seguir são isoparamétricos, pois as duas figuras têm mesmo perímetro 16 e mesma área 12. Note também que o triângulo pode ser recortado, como indicado, para montar o retângulo ao lado.



A seguir mostramos como um paralelogramo pode ser recortado para montar o mesmo retângulo:



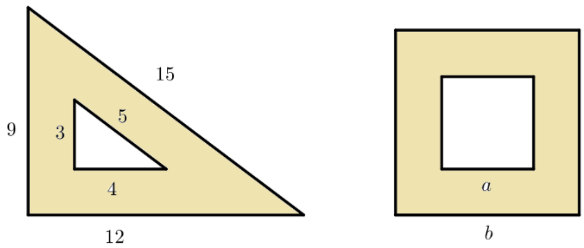
Veja que sobrepondo os dois recortes do retângulo podemos dividi-lo em quatro pedaços que podem montar tanto o triângulo da primeira figura quanto o paralelogramo da segunda.



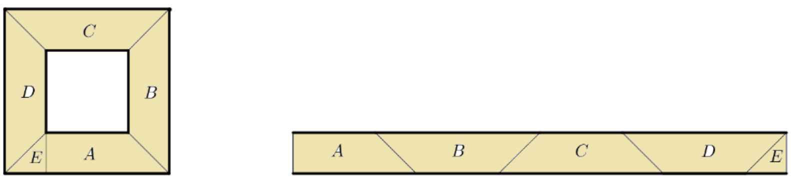
a) Um *anel* é a figura formada quando um polígono P tem um polígono menor P' semelhante a ele cortado em seu interior. Por exemplo, um anel quadrado é formado quando se corta um quadrado menor de dentro de um quadrado maior.

O conceito de figuras isoparamétricas não se aplica apenas aos polígonos: podemos ter *anéis isoparamétricos*; nesse caso o perímetro do anel é a soma dos perímetros interno e externo da figura formada. Por exemplo, o perímetro do anel triangular abaixo é $(9 + 12 + 15) + (3 + 4 + 5) = 48$.

Determine as medidas a e b dos lados interno e externo do anel quadrado que é isoparamétrico ao anel triangular.



b) Nos anéis da figura do item a, vamos supor que os vértices internos estão nas bissetrizes dos polígonos externos e que cada lado interno tem distância fixa para o lado externo correspondente. Veja que é possível recortar o quadrado em 5 pedaços para montar um retângulo cujos lados superior e inferior são os segmentos do perímetro do anel quadrado.



Mostre uma maneira de cortar o anel triangular em **quatro** pedaços que podem ser usados para montar um retângulo congruente ao retângulo montado acima.

c) Mostre como cortar o anel triangular em 10 pedaços e rearranjando esses 10 pedaços montar o anel quadrado, de modo que os segmentos que formavam o perímetro do anel triangular passem a formar o perímetro do anel quadrado.

XXXVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (1º de novembro de 2014)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

As eleições para alguns cargos legislativos (vereador e deputados estaduais e federais) são feitas no Brasil usando o *sistema proporcional* de votos. A ideia é contar os votos para cada partido (ou coligação), independente do candidato, e dividir as vagas de modo que cada partido tenha uma quantidade de cadeiras aproximadamente proporcional ao total de votos. Só então se considera as votações individuais dos candidatos: as vagas são preenchidas pelos candidatos mais votados de cada partido.

Mas as contas ficam um pouco mais elaboradas quando consideramos as sobras. Como essas vagas são determinadas?

- Primeiro, calcula-se o *quociente eleitoral* Q, que é o total de votos válidos dividido pelo total de vagas.
- Depois, calcula-se o número de vagas para cada partido dividindo-se o número de votos de cada partido por Q. Os algarismos depois da vírgula são desprezados (mesmo se forem iguais a 5 ou mais).
- Geralmente sobram vagas para serem preenchidas, e fazemos isso preenchendo uma vaga de cada vez: divide-se o total de votos de cada partido pela quantidade de vagas obtidas por cada partido mais 1. O maior número fica com a primeira vaga. Fazemos o mesmo para a próxima vaga, tomando o cuidado de atualizar as quantidades de vagas a cada passo.

Por exemplo, suponha que na cidade de Matemopolina 4 partidos, PPM (Partido Paulista de Matemática), PBM (Partido Brasileiro da Matemática), PM (Partido da Matemática) e MAT (Matemáticos), estejam concorrendo a 16 vagas na Assembleia Matemática. Nessa eleição, os 8.890 votos válidos foram distribuídos da seguinte forma:

PPM	PBM	PM	MAT
1.618	3.140	2.718	1.414

O quociente eleitoral é

$$Q = \frac{8890}{16} = 555{,}625$$

Deste modo, as quantidades de vagas são

PPM	PBM	PM	MAT
$\frac{1.618}{555{,}625} \approx \boxed{2}{,}91$	$\frac{3.140}{555{,}625} \approx \boxed{5}{,}65$	$\frac{2.718}{555{,}625} = \boxed{4}{,}89$	$\frac{1.414}{555{,}625} = \boxed{2}{,}54$

Com isso, preenchemos $2 + 5 + 4 + 2 = 13$ vagas. Faltam $16 - 13 = 3$. A seguinte tabela indica como as duas vagas seguintes são atribuídas:

PPM	PBM	PM	MAT	Dono da vaga
$\frac{1.618}{2+1} \approx 539{,}3$	$\frac{3.140}{5+1} \approx 523{,}3$	$\frac{2.718}{4+1} = 543{,}6$	$\frac{1.414}{2+1} = 471{,}3$	PM
$\frac{1.618}{2+1} \approx 539{,}3$	$\frac{3.140}{5+1} \approx 523{,}3$	$\frac{2.718}{5+1} = 453$	$\frac{1.414}{2+1} = 471{,}3$	PPM

a) Para que partido é atribuída a última vaga dessa eleição?

b) Ocorreu outra eleição, agora para a Câmara dos Matemadores na cidade de Matemalinos. São somente 9 vagas, e os resultados foram os seguintes:

PPM	PBM	PM	MAT
1.900	1.350	550	2.250

Quantas vagas ficaram para cada partido nessa eleição? Não se esqueça de mostrar os seus cálculos.

PROBLEMA 2

Nessa questão estudaremos uma aplicação de identidades polinomiais à fatoração de números grandes, bem grandes!

Em 1871, Léon François Antoine Aurifeuille obteve a fatoração $2^{58} + 1 = 536838145 \cdot 536903681$ a partir da observação de que, quando substituímos $x = 2^{29}$ na identidade $x^2 + 1 = (x+1)^2 - 2x$, teremos

$$2^{58} + 1 = (2^{29} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{29} = (2^{29} + 1)^2 - (2^{15})^2 = (2^{29} + 1 - 2^{15}) \cdot (2^{29} + 1 + 2^{15})$$

(*no desenvolvimento acima, utilizamos também a identidade* $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.)

Vale a pena citar que, de fato, a fatoração em primos de $2^{58} + 1$ é $5 \cdot 107367629 \cdot 536903681$.

Tal abordagem deu origem às denominadas *Fatorações Aurifeullianas* um ramo bastante rico da Teoria dos Números.

a) Desenvolva a expressão $(x+1)((x+1)^2 - 3x)$.

b) Utilizando a identidade (*Fatoração Aurifeulliana*) obtida no item a, apresente a fatoração em primos de 27000001.

PROBLEMA 3

O programa de TV *Futurama*, no episódio “O Prisioneiro de Benda”, apresenta um *trocador de mentes* que permite que dois seres troquem de corpo. Todavia, as trocas de corpo não têm volta, ou seja, se dois seres (mentes) trocam de corpo, não podem trocar novamente, mesmo que estejam em outros corpos. No episódio, várias trocas acontecem, e não parece fácil desfazê-las.

Acontece que, não importando como estejam trocados os corpos de n seres, é possível fazer com que todos voltem ao normal envolvendo dois seres adicionais. O autor desse episódio é o escritor de séries Ken Keeler, que é doutor em Matemática em Harvard e resolveu esse problema especialmente para o programa.

a) No começo do episódio, Amy e o Professor Farnsworth trocam de corpo, e ele sugere que Bender os ajude a desfazer a troca de corpos. Em seguida, o próprio professor percebe que não é possível que os três voltem ao normal. Explique o porquê.

O item anterior mostra que um ser a mais não permite desfazer as trocas. Veremos agora como desfazer as trocas com dois seres a mais.

No episódio, nove personagens trocaram de corpos, e imediatamente antes da resolução do problema, estão trocados da seguinte forma:

Mente	Fry (1)	Zoidberg (2)	Leela (3)	Professor (4)	Bender (5)	Imperador (6)	Balde d’Água (7)	Amy (8)	Hermes (9)
Corpo	Zoidberg (2)	Fry (1)	Professor (4)	Bender (5)	Imperador (6)	Balde d’Água (7)	Amy (8)	Hermes (9)	Leela (3)

(Sim, o Balde d’Água é um ser e tem mente e corpo.)

A partir de agora, usaremos os números no lugar dos personagens:

Mente	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Corpo	**2**	**1**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**3**

b) Descreva uma maneira de desfazer a troca entre Fry e Zoidberg:

Mente	**1**	**2**
Corpo	**2**	**1**

usando também os seres x e y, que nunca passaram por trocas. Considere que x e y só podem trocar entre si no máximo uma vez, e que Fry (1) e Zoidberg (2) não podem mais trocar entre si.

c) Mostre uma maneira de desfazer as trocas dos personagens do episódio, sabendo que os dois seres extras são Ethan (10) e Clyde (11). Lembre-se: os personagens de 1 a 9 não podem mais trocar entre si e 10 e 11 trocam no máximo uma vez.

PROBLEMA 4

Dizemos que um número inteiro positivo é *perfeito* se a soma de seus divisores positivos é igual ao dobro do número. Por exemplo, 6 e 28 são números perfeitos, pois:

$$1+2+3+6=2\cdot 6 \text{ e } 1+2+4+7+14+28=2\cdot 28.$$

Euler demonstrou que todos os números perfeitos pares são da forma $2^n(2^{n+1}-1)$, $n\in\mathbb{N}$, em que $2^{n+1}-1$ é primo. Um dos problemas em aberto (ou seja, que até hoje não foram resolvidos) mais antigos de toda a Matemática é relativo à existência de números perfeitos ímpares. Atualmente, sabe-se que, caso exista um número perfeito ímpar, ele é maior do que 10^{300} (verificado por Brent e colaboradores em 1991) e tem pelo menos 75 fatores primos (demonstrado por Hare em 2005).

Nessa questão estudaremos uma generalização do conceito de número perfeito. Para tal, necessitaremos de algumas fórmulas (que – oba! – também poderão ser usadas para resolver o problema).

- *Média Harmônica*: A média harmônica dos números reais positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ é dada por

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

Para as próximas definições, considere que $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração em primos do número inteiro n, $n>1$.

- *Número de divisores positivos*: $d(n)=(\alpha_1+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha_k+1)$
- *Soma dos divisores positivos*: $\sigma(n)=(1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})\cdot\cdots\cdot(1+p_k+\cdots+p_k^{\alpha_k})$

Por exemplo, para $28=2^2\cdot 7$, $d(28)=(2+1)(1+1)=6$, ou seja, 28 tem 6 divisores positivos, e $\sigma(28)=(1+2+2^2)\cdot(1+7)=56$, ou seja, a soma dos divisores positivos de 28 é 56.

Em 1948, Oysten Ore criou um conceito que generaliza o conceito de número perfeito: dizemos que um número inteiro positivo é *harmônico* se a média harmônica de seus divisores é um número inteiro. Por exemplo, 6 e 28 são números harmônicos, pois:

$$\frac{4}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2 \quad\text{e}\quad \frac{6}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}}=3.$$

a) Vejamos o que acontece quando multiplicamos 28 pela soma dos inversos de seus divisores:

$$28\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}\right)=28+14+7+4+2+1=\sigma(28).$$

Isso não é uma coincidência! Explique por que a soma dos inversos dos divisores de um número n é $\frac{\sigma(n)}{n}$ e conclua que a média harmônica dos divisores de n é igual a

$$\frac{n\cdot d(n)}{\sigma(n)}.$$

b) Como

$$\frac{n \cdot d(n)}{\sigma(n)} = \frac{p_1^{\alpha_1}(\alpha_1+1)}{(1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k}(\alpha_k+1)}{(1+p_k+\cdots+p_k^{\alpha_k})},$$

podemos descobrir inteiros harmônicos observando qual é a "colaboração" de cada número primo na igualdade acima.

Para exemplificar, digamos que desejamos obter um inteiro harmônico que possua o fator 5^2. Teremos, então, no cálculo da média harmônica o fator:

$$\frac{5^2 \cdot 3}{31}$$

O denominador 31 sugere que devemos ter esse número como fator primo do inteiro harmônico que estamos procurando. A fórmula até agora é:

$$\frac{5^2 \cdot 3}{31} \cdot \frac{31 \cdot 2}{32}$$

Há um fator 16 sobrando no denominador. Um 2^3 resolve a situação:

$$\frac{5^2 \cdot 3}{31} \cdot \frac{31 \cdot 2}{32} \cdot \frac{2^3 \cdot 4}{15}$$

Em resumo, sendo $n = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 31 = 6200$:

$$\frac{6200 \cdot d(6200)}{\sigma(6200)} = \frac{5^2 \cdot 3}{31} \cdot \frac{31 \cdot 2}{32} \cdot \frac{2^3 \cdot 4}{15} = 10.$$

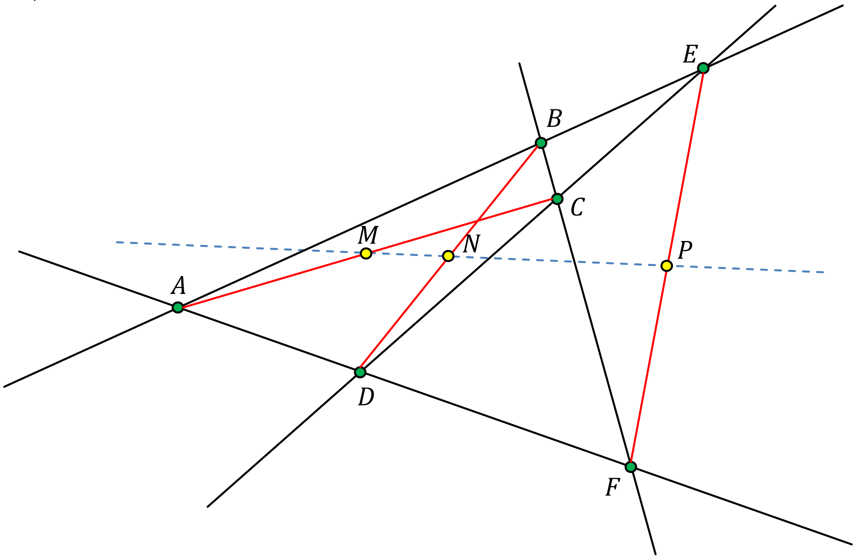
Ou seja, 6200 é um inteiro harmônico.

Agora é a sua vez: determine um inteiro harmônico que possua o fator 3^2.

c) Determine um inteiro positivo cuja média harmônica de seus divisores seja igual a 91.

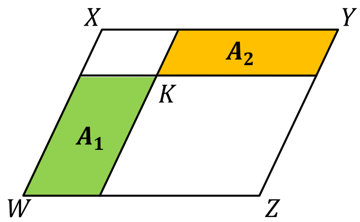
PROBLEMA 5

Um *quadrilátero completo* é uma modificação do conceito usual de quadrilátero: é a união de quatro *retas*. Se não houver retas paralelas entre essas quatro retas, elas determinam seis pontos: além dos pontos A, B, C e D, temos os pontos E e F, que são interseções dos prolongamentos de lados opostos de um quadrilátero usual. Com isso, um quadrilátero completo tem *três* diagonais, que na figura a seguir são AC, BD e EF.



O que são esses pontos M, N e P? Eles são os pontos médios das três diagonais. Nesse problema, provaremos o *teorema do quadrilátero completo*: **os pontos médios das três diagonais de um quadrilátero completo são colineares**.

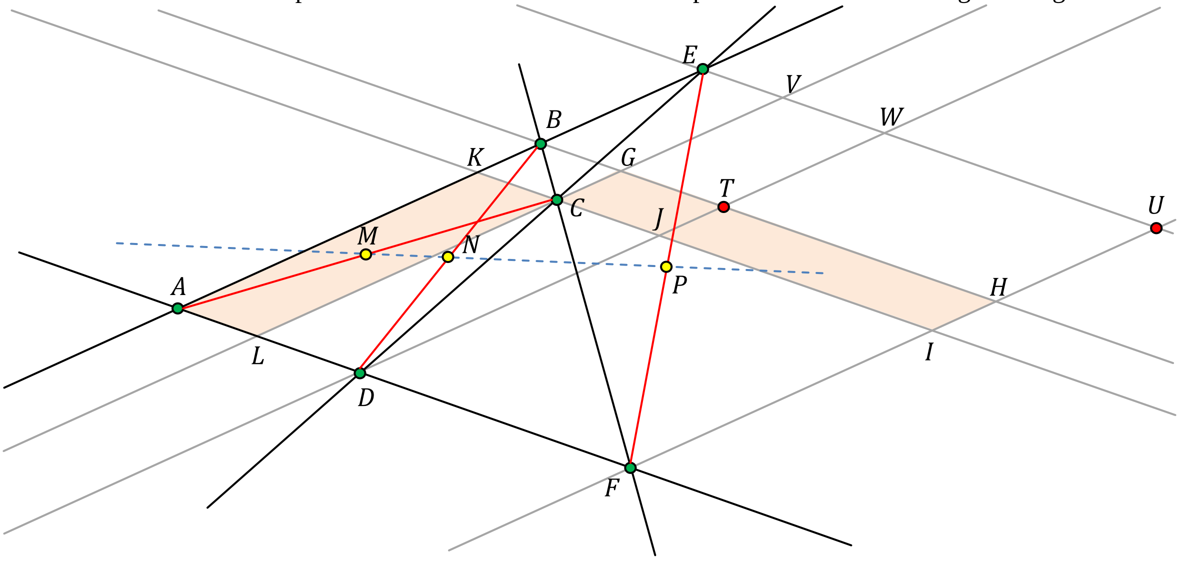
a) Começaremos com um lema envolvendo paralelogramos. Na figura a seguir, $XYZW$ é um paralelogramo e K é um ponto em seu interior. Traçamos por K duas paralelas a lados do paralelogramo.



Prove que as áreas coloridas A_1 e A_2 são iguais se, e somente se, K está sobre a diagonal XZ. Aqui, você precisa provar dois fatos:

- Se K está sobre XZ então $A_1 = A_2$;
- Se K não está sobre XZ então $A_1 \neq A_2$.

b) O que paralelogramos têm a ver com o teorema do quadrilátero completo? O elo é o fato conhecido de que as diagonais de paralelogramos se encontram nos seus pontos médios. Construímos as retas paralelas mostradas na figura a seguir:



Explique por que os paralelogramos $AKCL$ e $GCIH$, destacados na figura acima, têm a mesma área.

c) Mostre que as áreas de $TGVW$ e $JTHI$ são iguais e conclua que C, T e U são colineares.

d) Prove o teorema do quadrilátero completo.

XXXVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (1º de novembro de 2014)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Claude Shannon criou a *Teoria da Informação* para medir a quantidade de informação em uma mensagem. Um dos conceitos mais celebrados da Teoria da Informação é o de *entropia*, que mede exatamente essa quantidade de informação. Por exemplo, a Língua Inglesa tem entropia de cerca de 1,1 bit por caractere. Vamos supor que essa entropia seja a mesma para a Língua Portuguesa.

Como um caractere é um byte, que corresponde a 8 bits, um arquivo .txt com um texto em Português é tipicamente compactado pelos melhores algoritmos para $1{,}1/8$ de seu tamanho.

a) Considerando um *tweet* como uma sequência de 140 caracteres, cada um dos quais tendo 256 possibilidades (letras, números, símbolos etc), encontre a ordem de grandeza da quantidade M de tweets que podem ser feitos, ou seja, n tal que $10^{n-1} \le M < 10^n$.

b) A grande maioria dos tweets do item a não têm significado. Uma aplicação de entropia é calcular a quantidade de tweets que fazem algum sentido em Português. Ele pode ser estimado por 2 elevado à entropia total, que é 140 vezes a entropia por caractere. Estime a ordem de grandeza da quantidade de tweets que fazem algum sentido em Português.

Você pode querer usar: $\log_{10} 2 = 0{,}301$.

PROBLEMA 2

Os sistemas de sorteio das principais loterias do mundo são bastante similares. Em geral, sorteiam-se m números de um conjunto $\{1, 2, .., n\}$ em que, é claro, $n > m$. É usual chamar uma loteria com tais características de *loteria* m/n. A nossa *Mega-Sena*, por exemplo, é uma loteria $6/60$.

Algumas outras loterias importantes adotam pequenas variações. Na *Mega Millions* – loteria norte-americana que em março de 2012 pagou o maior prêmio da história, 656 milhões de dólares – são sorteados 5 números de um total de 75 e 1 número extra de um conjunto de 15 (a chamada *Mega Ball*). Dizemos que ela é uma loteria $5/75$ e $1/15$.

a) Calcule o número de resultados possíveis da loteria Mega Millions. *Você não precisa fazer as contas nesse item, basta deixar a resposta indicada.*

O número que você obteve no item a é gigantesco. Assim, os fatos que serão narrados a seguir poderão parecer surpreendentes.

A *Sport Toto*, loteria $6/49$ realizada pelo governo da Bulgária, teve os mesmos seis números $(4, 15, 23, 24, 35, 42)$ sorteados nos concursos de 6 e 10 de setembro de 2009. O Ministro dos Esportes, Svilen Neikov, ordenou uma investigação.

A Mifal HaPays, loteria $6/37$ e $1/7$ realizada pelo governo de Israel, teve os mesmos seis números $(13, 14, 26, 32, 33, 36)$ sorteados em 21 de setembro e 16 de outubro do mesmo ano de 2010. As pessoas ligaram em massa para as rádios locais reclamando que havia trapaça nos sorteios. Em seu livro, *The Improbability Principle*, David J. Hand, professor de Matemática e pesquisador do Imperial College de Londres, apresenta uma argumentação que mostra que tais resultados não são tão inesperados quanto podemos pensar.

Os dois resultados iguais na loteria búlgara ocorreram na mesma semana. Sem dúvida: uau! Os dois resultados iguais na loteria de Israel ocorreram no mesmo ano. De novo, uau! Porém existem muito pares de sorteios em um ano. Ficaríamos impressionados se quaisquer desses pares apresentassem resultados iguais. De fato, também não nos importamos com onde o fato ocorre. Ele é um milagre e ponto!

b) Os sorteios da Sport Toto são realizados duas vezes por semana durante todo o ano. Qual é a probabilidade de termos pelo menos dois resultados iguais em um mesmo ano? *Você não precisa fazer as contas nesse item, basta deixar a resposta indicada.*

c) A expressão que você obteve no item anterior (esperamos) é igual a, aproximadamente, 0,04%. Sabendo que existem por volta de 100 grandes loterias (similares à Sport Toto) em todo o mundo, calcule a probabilidade de que ocorram dois resultados iguais no ano de 2015 em uma mesma grande loteria.

Você pode querer adotar a aproximação $(1-x)^n \approx 1 - nx$.

d) Estime o número de anos necessários para que a probabilidade de que ocorram dois resultados iguais em um mesmo ano em uma mesma grande loteria do mundo seja maior do que $\frac{1}{2}$.

Você pode querer adotar a aproximação

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \approx \sum_{1 \le i \le n} p(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} p(A_i \cap A_j)$$

em que $p(E)$ *indica a probabilidade do evento* E.

PROBLEMA 3

Um polinômio não constante com coeficientes racionais é *irredutível* se não pode ser escrito como o produto de dois polinômios não constantes de coeficientes racionais.

Polinômios irredutíveis são os análogos dos números primos e, como no Teorema Fundamental da Aritmética, é possível demonstrar que todo polinômio não constante é o produto de polinômios irredutíveis.

Sendo $m > 1$, é possível escrever $x^m - 1$ como o produto de polinômios irredutíveis ($x - 1$ é um dos fatores). Demonstra-se que, para cada inteiro positivo m, $x^m - 1$ possui exatamente um fator irredutível $\Phi_m(x)$ que não divide $x^k - 1$ para $k < m$. Os polinômios $\Phi_m(x)$, $m \geq 1$, são chamados *polinômios ciclotômicos*. Os primeiros polinômios ciclotômicos são $\Phi_1(x) = x - 1$, $\Phi_2(x) = x + 1$, $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$, $\Phi_4(x) = x^2 + 1$.

Pode-se mostrar que

$$x^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d(x)$$

em que, como indicado, o produtório percorre todos os divisores positivos de m. Por exemplo,

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1) = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdot \Phi_4(x).$$

a) Determine $\Phi_{12}(x)$.

Antes de continuar a resolver a questão, vamos conhecer uma bela aplicação dos polinômios ciclotômicos à fatoração de números grandes, bem grandes!

Em 1871, Léon François Antoine Aurifeuille obteve a fatoração $2^{58} + 1 = 536838145 \cdot 536903681$ a partir da observação de que, quando substituímos $x = 2^{29}$ na identidade $\Phi_4(x) = x^2 + 1 = (x+1)^2 - 2x$, teremos

$$2^{58} + 1 = (2^{29} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{29} = (2^{29} + 1)^2 - (2^{15})^2 = (2^{29} + 1 - 2^{15}) \cdot (2^{29} + 1 + 2^{15})$$

Vale a pena citar que, de fato, a fatoração em primos de $2^{58} + 1$ é $5 \cdot 107367629 \cdot 536903681$.

Andrzej Schinzel, pesquisador do Instituto de Matemática da Academia de Ciências da Polônia, avançou muito com a ideia de Aurifeuille, encontrando todas as identidades desse tipo. Ele mostrou, por exemplo, que, sendo h ímpar, é possível encontrar polinômios $C(x)$ e $D(x)$ com coeficientes inteiros tais que

$$\Phi_{12}(6^h) = \left(C(6^h) - 6^{(h+1)/2} D(6^h)\right) \cdot \left(C(6^h) + 6^{(h+1)/2} D(6^h)\right).$$

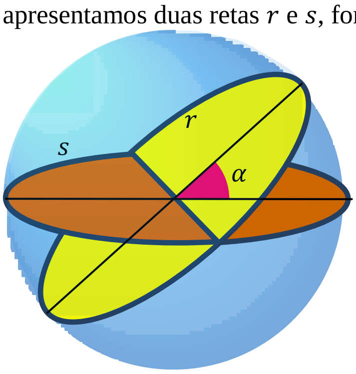
b) Encontre $C(x)$ e $D(x)$ que satisfaçam a identidade acima.

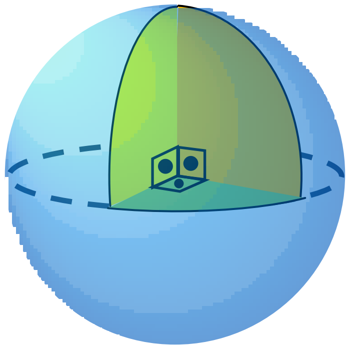
c) Apresente a fatoração em primos de $24^6 + 1$.

PROBLEMA 4

Existem outros tipos de geometria além da que estudamos regularmente. Por exemplo, ao considerarmos que vivemos em um planeta aproximadamente esférico, faz sentido utilizar a chamada *geometria esférica*, que considera o "plano" como sendo a superfície de uma esfera. Para simplificar, tomaremos o raio da esfera como 1.

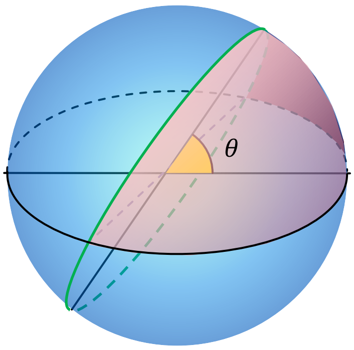
As "retas" da geometria esférica são as *grandes circunferências*, ou seja, as interseções da superfície esférica com planos que contêm o seu centro. Finalmente, definimos o "ângulo" entre duas retas como o ângulo entre os dois planos que as contêm. Na figura a seguir, à esquerda, apresentamos duas retas r e s, formando um ângulo α.





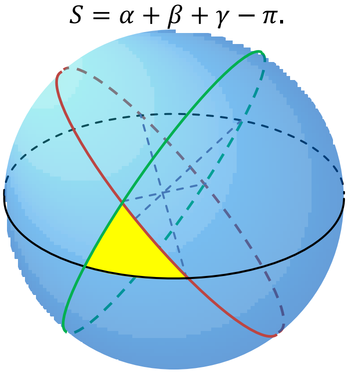
Em geometria esférica, a soma dos ângulos internos de um "triângulo esférico" (que é formado por três segmentos de retas) é maior do que 180°. Por exemplo, ao considerarmos o triângulo formado ao cortarmos a esfera em três planos perpendiculares dois a dois, obtemos um triângulo com os três ângulos internos iguais a 90° e, portanto, soma dos ângulos internos 270°.

a) Suponha que o ângulo entre as duas retas a seguir seja θ radianos. Prove que a região a seguir, que é uma das quatro regiões delimitadas pelas duas retas, tem área 2θ.



b) Observando a figura a seguir, mostre que a área de um triângulo esférico (que é o pedaço da superfície esférica delimitado pelos três planos correspondentes) com ângulos internos α, β e γ (em radianos) é

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$



c) Um *triângulo de Coxeter*, cujo nome vem do renomado geômetra Harold Coxeter, é um triângulo com ângulos internos da forma $\frac{\pi}{a}$ rad, $\frac{\pi}{b}$ rad e $\frac{\pi}{c}$ rad, com a, b e c inteiros maiores que 1 e não necessariamente distintos, para os quais existe N inteiro positivo tal que N cópias do triângulo cobrem a esfera, sem buracos nem sobreposições.
Prove que $\frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c} = N + 4$.
d) Sabe-se que todas as soluções $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ com $a, b, c > 1$ da equação $\frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c} = N + 4$ correspondem a triângulos de Coxeter. Resolva essa equação.

Você pode querer utilizar o fato de que a superfície de uma esfera de raio R é $4\pi R^2$.

PROBLEMA 5
Uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ é *antissimétrica* se, e somente se, satisfaz $a_{ji} = -a_{ij}$ para todos i, j, $1 \le i, j \le n$. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz antissimétrica, pois $a_{21} = -a_{12} = 1$ e $a_{11} = -a_{11} = a_{22} = -a_{22} = 0$. Nesse problema, mostraremos uma identidade envolvendo determinantes de matrizes antissimétricas de tamanho n par.
Pode-se mostrar, por exemplo, que

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2.$$

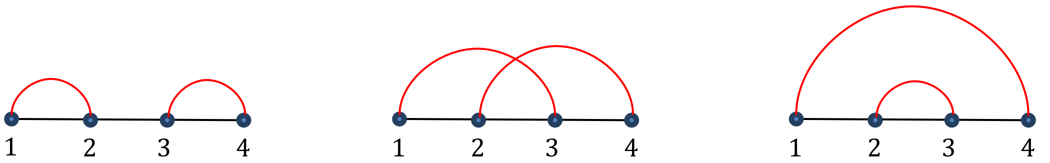
Na identidade anterior, obtemos o quadrado da soma de produtos da forma $\pm a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}$ em que $\{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}\}$ é uma partição de $\{1,2,3,4\}$, ou seja, dividimos $\{1,2,3,4\}$ em dois subconjuntos com dois elementos. Será coincidência? (Você não precisa responder a essa pergunta.)
Dizemos que toda partição de $\{1,2,3, \dots, n\}$ em $n/2$ subconjuntos com dois elementos é um *casamento* μ nesse conjunto, e denotamos, para simplificar,

$$\mu = i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_{\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}}, \quad i_k < j_k.$$

Também utilizaremos a notação

$$a_\mu = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_{\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}}}.$$

Finalmente, denotamos o *sinal* de μ por $\operatorname{sign}(\mu)$ e o definimos como $(-1)^{\#\mu}$, em que $\#\mu$ é a quantidade de cruzamentos obtidos quando desenhamos μ representando $1, 2, \dots, n$ por pontos alinhados, nessa ordem, e conectando i_k a j_k por semicircunferências traçadas acima do segmento. Por exemplo, os três casamentos de $\{1,2,3,4\}$ têm os seguintes sinais:



12,34: sinal $(-1)^0 = 1$ 13,24: sinal $(-1)^1 = -1$ 14,23: sinal $(-1)^0 = 1$

Olha só que "coincidência"! O nosso determinante deu o quadrado da soma dos $\operatorname{sign}(\mu) a_\mu$ sobre os casamentos de $\{1, 2, \dots, n\}$!

Dada uma matriz antissimétrica A, definimos tal soma como o *Pfaffiano* de A:

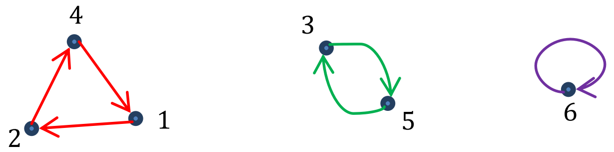
$$\operatorname{Pf}(A) = \sum_\mu \operatorname{sign}(\mu) a_\mu.$$

No nosso exemplo, $\operatorname{Pf}(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$.

a) A definição de determinante é

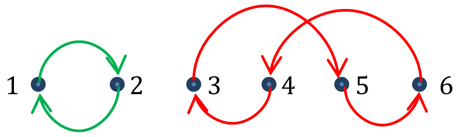
$$\det A = \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi) a_\pi \text{, onde } a_\pi = a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

em que a soma é sobre todas as permutações de $\{1,2,\ldots,n\}$ e o sinal da permutação $\text{sign}(\pi)$ é igual a $(-1)^k$, em que k é o número de transposições (trocas de duas posições da permutação) necessárias para chegar à permutação identidade $I=(1,2,\ldots,n)$. Todas as formas de fazer essas trocas resultarão na mesma paridade, portanto $\text{sign}(\pi)$ terá um valor único. Por exemplo, para determinar o sinal de $\pi=(3,2,1)$ observamos que trocando o 3 e o 1, chegamos em $I=(1,2,3)$. Então $\text{sign}(\pi)=(-1)^1=-1$.
Uma maneira útil de representar permutações é por *ciclos*, em que consideramos os pontos 1 a n, agora livres no plano, e ligamos por uma flecha i a $\pi(i)$. Por exemplo, a permutação $\pi=(2,4,5,1,3,6)$, em que $\pi(1)=2$, $\pi(2)=4$, $\pi(3)=5$, $\pi(4)=1$, $\pi(5)=3$ e $\pi(6)=6$, é representada por



Podemos então representar a permutação acima como $\pi=(124)(35)(6)=\pi_1\pi_2\pi_3$ com $\pi_1=(124)$, $\pi_2=(35)$ e $\pi_3=(6)$.
Seja A uma matriz antissimétrica. Suponha que $\pi=\pi_1\pi_2\ldots\pi_m$ seja uma permutação que contém um ciclo ímpar π_1. Veja que podemos escrever $a_\pi=a_{\pi_1}a_{\pi_2}\ldots a_{\pi_m}$. Se π_1 for um ciclo de tamanho 1 então $a_{\pi_1}=a_{kk}=0$, já que a matriz é antissimétrica, logo $a_\pi=0$. Caso π_1 seja um ciclo de tamanho ímpar maior que 1, mostre que as parcelas $\text{sign}(\pi)a_\pi$ e $\text{sign}(\pi')a'_\pi$ correspondentes a π e $\pi'=\pi_1^{-1}\pi_2\ldots\pi_n$, em que π_1^{-1} é o ciclo π_1 com as flechas invertidas, se cancelam no determinante.

b) Uma permutação pode ser representada com os pontos de 1 a n alinhados em ordem. Para as que só têm ciclos pares, a figura fica interessante: $(12)(3564)$ vira



e pode ser decomposta em dois casamentos $\mu=12{,}35{,}46$ e $\nu=12{,}34{,}56$.
Prove que toda permutação π formada somente de ciclos pares pode ser decomposta em dois casamentos μ e ν. Prove também que quaisquer dois casamentos μ e ν geram uma permutação π formada somente de ciclos pares. Conclua que $a_\mu a_\nu=a_\pi(-1)^{e(\pi)}$, em que $e(\pi)$ é a quantidade de elementos do conjunto $\{\, i \mid \pi(i)<i \,\}$.

c) Sejam $\#\mu$ e $\#\nu$ as quantidades de cruzamentos dos casamentos μ e ν de $\{1,2,\ldots,n\}$ e seja m a quantidade de ciclos, todos de tamanho par, da permutação π. Sabe-se que $\text{sign}(\pi)=(-1)^m$, logo:

$$\text{sign}(\mu)a_\mu\cdot\text{sign}(\nu)a_\nu=\text{sign}(\pi)a_\pi \Leftrightarrow (-1)^{\#\mu+\#\nu+e(\pi)}=(-1)^m.$$

Isso é equivalente a provar que $\#\mu+\#\nu+e(\pi)$ e m são ambos pares ou ambos ímpares.
Prove que a paridade de $\#\mu+\#\nu+e(\pi)$ não muda se trocarmos as posições de i e $i+1$ nos ciclos da permutação π. Por exemplo, a partir de $\pi=(12)(3564)$, dada acima, podemos trocar 4 e 5, obtendo $(12)(3465)$. Trocando 5 e 6 teremos $\tilde{\pi}=(12)(3456)$ sem alterar a paridade da expressão $\#\mu+\#\nu+e(\pi)$.

d) Utilizando as trocas das posições de i e $i+1$, a partir de uma permutação π podemos obter $\tilde{\pi}$ em que os seus ciclos apresentam os números em ordem crescente.
Mostre, dada qualquer permutação π, $\#\mu+\#\nu+e(\pi)$ tem a mesma paridade de $\#\tilde{\mu}+\#\tilde{\nu}+e(\tilde{\pi})$.
Conclua que $\#\mu+\#\nu+e(\pi)$ e m (veja o item anterior) têm a mesma paridade.

e) Demonstre que $\det A=\left(\text{Pf}(A)\right)^2$ para toda matriz antissimétrica A de tamanho par.