XXXVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (9 de novembro de 2013)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)
Em memória do Prof. Dr. Angelo Barone Netto

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1
A ponte aérea Rio de Janeiro – São Paulo é o terceiro trajeto aéreo mais procurado no mundo, sendo superado apenas pelo trecho Jeju – Seul (Coreia do Sul) e por Sapporo – Tóquio (Japão).
Em uma semana regular, 4 companhias aéreas oferecem voos entre o Rio de Janeiro e São Paulo. Veja os dados:

Empresa	Voos por semana	Quantidade semanal de passageiros transportados
Avianca	140	18480
Azul	2	236
Gol	396	72468
TAM	397	57168

a) Quantos voos são oferecidos na ponte aérea por semana?
b) Qual das companhias tem a maior média de passageiros transportados por voo?
c) Qual a porcentagem de pessoas transportadas pela companhia com o maior número de voos, em relação ao total de pessoas transportadas por semana?
d) Admitindo que 95% dos voos ocorrem entre 7h e 23h, a cada quantos minutos, em média, sai um voo da ponte aérea nesse intervalo?

PROBLEMA 2
Sitaram Asur e Bernardo Huberman, pesquisadores de mídias sociais, obtiveram, através de dados coletados no Twitter em 2010, uma equação que permite prever as vendas de bilheteria de filmes. A equação tinha uma precisão tão grande que superava as principais ferramentas de previsão na época. A equação tem a forma:

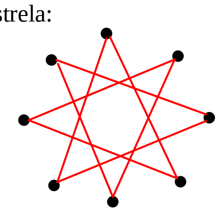
$$y = 0{,}015 \cdot A + 1{,}6 \cdot P + 0{,}003 \cdot N$$

em que
- y é a previsão de dinheiro ganho com a venda de ingressos do filme, em milhões;
- A é a *atenção* gerada pelo filme, em tweets (mensagens) por hora, ou seja, é a quantidade média de tweets que se referem ao filme por hora;
- P é a *polaridade*, que é a razão entre as quantidades de tweets positivos (de pessoas que gostaram do filme) e tweets negativos (de pessoas que não gostaram do filme): $P = \frac{\text{tweets positivos}}{\text{tweets negativos}}$;
- N é a quantidade de cinemas em que o filme está sendo exibido.

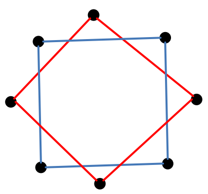
Por exemplo, *Crepúsculo: Lua Nova* estava em 4024 cinemas nos EUA, obtendo um total de aproximadamente 43 milhões de dólares na segunda semana. Nessa semana, esse filme teve atenção de 259360 tweets, dando $\frac{259360}{7 \cdot 24} \approx 1543{,}8$ tweets por hora. Destes, 216135 foram positivos e os demais $259360 - 216135 = 43225$ foram negativos, dando uma polaridade de $\frac{216135}{43225} \approx 5{,}0$. A equação previa $y = 0{,}015 \cdot 1543{,}8 + 1{,}6 \cdot 5{,}0 + 0{,}003 \cdot 4024 = 43{,}229$ milhões de dólares. Nada mal!
a) O filme *Avatar*, na sua segunda semana em cartaz, estava em 3456 cinemas norte-americanos. Na Internet, 713195 tweets falavam sobre o filme nessa semana, dos quais 475463 foram positivos. Considerando o modelo, quantos milhões de dólares o filme arrecadou?
b) Um filme que melhorou muito sua arrecadação foi *Um Sonho Possível*. Ele estava em 3110 cinemas nos EUA na sua segunda semana. Se ele mantivesse sua polaridade inicial de 5, conseguiria $32{,}33$ milhões de dólares segundo o modelo. Porém a reação ao filme foi muito positiva, e sua polaridade foi para $9{,}65$. Para quanto foi sua arrecadação, de acordo com o modelo?

PROBLEMA 3
Há várias maneiras de desenhar estrelas. Uma é:
Passo 1: Desenhar n pontos em roda;
Passo 2: Começar de um ponto qualquer, contar k pontos no sentido horário, e ligar ao próximo ponto. Repetir até voltar a um ponto já visitado;
Passo 3: Caso haja pontos sem ligar, escolher outro ponto qualquer e executar o passo anterior novamente, com o mesmo valor de k.
Com isso, obtemos uma $[n/k]$-estrela.

Observe uma $[8/3]$-estrela e uma $[8/2]$-estrela:



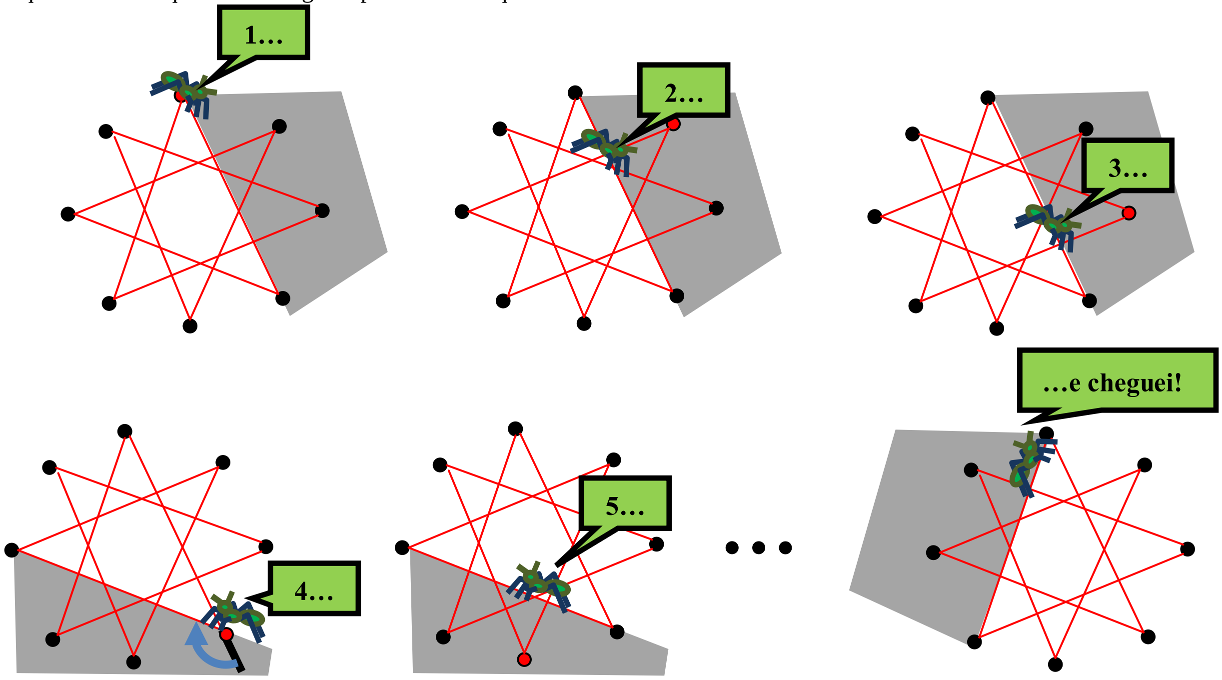
$[8/3]$-estrela



$[8/2]$-estrela

a) Desenhe uma $[11/4]$-estrela, usando os pontos desenhados no *Bloco de Resoluções*.

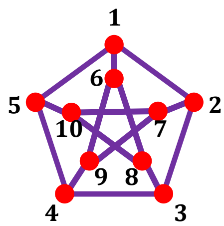
Agora, vamos calcular a soma dos ângulos das pontas de uma [8/3]-estrela, com a ajuda de Formigreen, a pequena formiga verde mineira. Formigreen está em um dos vértices da estrela e começa a andar pelos seus lados, no sentido horário. Enquanto faz isso, conta os vértices por que passa e os que vê à sua esquerda. Formigreen para de andar quando volta ao vértice inicial.



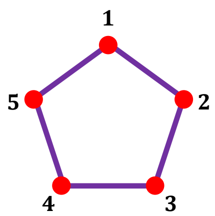
Note que, a cada vez que Formigreen chega a um vértice, vira o equivalente à medida de um ângulo externo da estrela.
b) Ao final do passeio, quantas vezes Formigreen contou cada vértice?
c) Calcule a soma dos ângulos externos da [8/3]-estrela.
d) Calcule a soma dos ângulos internos, ou seja, das pontas da [8/3]-estrela.

PROBLEMA 4

Grafos são diagramas como os mostrados a seguir. Os pontos destacados são chamados vértices e as linhas que ligam os vértices são chamadas arestas. O grafo a seguir é o *grafo de Petersen*. Já viu ele? (Diga "sim".)

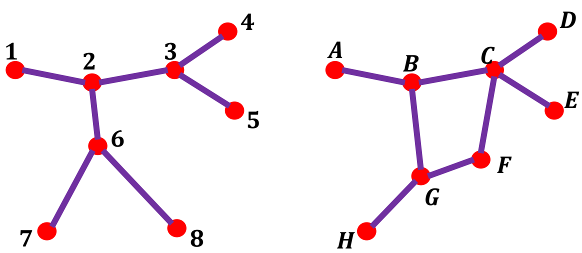


O jogo *Policiais e Ladrão* é disputado sobre um grafo. Há dois jogadores: um com um conjunto de *policiais* e um com um único *ladrão*. Na rodada zero, o jogador que comanda os policiais começa escolhendo os vértices que eles irão ocupar inicialmente e depois é a vez de o jogador que comanda o ladrão escolher o seu vértice inicial. Durante o jogo, é permitido que policiais ocupem um mesmo vértice.
As rodadas seguintes sempre começam com os movimentos dos policiais. Depois que todos eles fazem os seus movimentos é a vez do ladrão. Cada movimento consiste em ir para um vértice vizinho, ou seja, que está ligado por uma aresta; ou ficar no vértice em que está. Cada policial sabe a posição dos demais policiais e a do ladrão. E o ladrão sabe a posição de todos os policias.
Os policiais ganham se conseguirem pegar o ladrão, ou seja, ocupar o mesmo vértice em que está o ladrão.
Consideremos o seguinte exemplo.



Suponha que haja um único policial que é colocado inicialmente no vértice 1. O ladrão deve escolher o vértice 3 ou 4, pois caso contrário perde na primeira rodada. E é fácil perceber que o policial não conseguirá capturar o ladrão, pois o ladrão consegue manter-se sempre em um vértice que não é vizinho do vértice em que o policial está.
Suponha agora que são dois policiais. Colocando-os nos vértices 1 e 3, podemos perceber que o ladrão será capturado na primeira rodada. Dizemos que esse grafo tem *copnumber* igual a 2, ou seja, o número mínimo de policiais para garantir a vitória é 2.

a) Calcule o copnumber do Grafo de Petersen, o símbolo da OPM.
b) Uma árvore é um grafo em que, dados dois vértices, há exatamente uma maneira de ir de um até o outro através das suas arestas. O primeiro grafo abaixo é uma árvore (por exemplo, existe exatamente um único caminho entre $\mathbf{1}$ e $\mathbf{5}$: $\mathbf{1-2-3-5}$) e o segundo não é (há dois caminhos entre, por exemplo, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{F}$ – você consegue encontrá-los?).



Árvore　　Não é árvore

Prove que o copnumber de qualquer árvore é 1.

PROBLEMA 5

Existem muitos problemas (muitos mesmo!) em Matemática cuja solução não é conhecida até hoje, são os chamados *Problemas em Aberto*, os quais normalmente envolvem *Conjecturas* (suposições não confirmadas). Nessa questão vamos explorar um desses problemas em aberto.

Tome a soma dos divisores positivos próprios de um inteiro positivo n, ou seja, a soma dos inteiros positivos que são divisores de n e menores do que n. Por exemplo, a soma dos divisores positivos próprios de 12 é $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$. Agora considere a soma dos divisores próprios do valor obtido e assim sucessivamente. Começando por 12 teremos a sequência $12 \to 16 \to 15 \to 9 \to 4 \to 3 \to 1$ e 1 é um número que não possui divisores positivos próprios. Vejamos outros exemplos:

• $95 \to 25 \to 6 \to 6 \to \cdots$: A sequência fica constante igual a 6 (ciclo de tamanho 1)

• $220 \to 284 \to 220 \to 284 \to \cdots$: Os números 220 e 284 alternam-se na sequência (ciclo de tamanho 2).

Essas sequências são chamadas *Sequências Alíquota*.

Em 1888, Eugène Catalan conjecturou que todas as sequências alíquota terminam em 1 ou em algum ciclo. Surpreendentemente, não é sabido até hoje se isso ocorre mesmo para sequências iniciadas por números "pequenos" como 276.

a) Verifique que a sequência alíquota inicia pelo número 30 satisfaz a conjectura de Catalan.

Algumas sequências alíquota satisfazem a conjectura de Catalan, porém "demoram" para chegar no 1 ou em um ciclo. Por exemplo, a sequência $936 \to 1794 \to 2238 \to 2250 \to \cdots \to 74 \to 40 \to 50 \to 43 \to 1$ tem 189 termos sendo o maior deles $33\,289\,162\,091\,526$! Isso leva a outro problema em aberto: *existem sequências alíquota arbitrariamente longas terminadas em* 1*?*

b) Mostre que o penúltimo termo de uma sequência terminada em 1 sempre é um número primo.

c) Exiba uma sequência alíquota com 10 termos terminada em $9 \to 4 \to 3 \to 1$ cujos demais seis termos sejam produtos de dois primos distintos.

d) Como foi dito no início do enunciado, os problemas em aberto são muitos. E muitas vezes possuem conexões interessantes.

Considere o problema em aberto: *todo número par maior do que* 6 *é a soma de dois primos distintos?* Suponha que alguém tenha demonstrado que, de fato, isso ocorre. Prove que, então, pode-se concluir que existem sequências alíquota arbitrariamente longas terminadas em 1.

XXXVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (9 de novembro de 2013)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

Em memória do Prof. Dr. Angelo Barone Netto

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Sitaram Asur e Bernardo Huberman, pesquisadores de mídias sociais, obtiveram, através de dados coletados no Twitter em 2010, uma equação que permite prever as vendas de bilheteria de filmes. A equação tinha uma precisão tão grande que superava as principais ferramentas de previsão na época. A equação tem a forma:

$$y = 0{,}015 \cdot A + 1{,}6 \cdot P + 0{,}003 \cdot N$$

em que

- y é a previsão de ganho com a venda de ingressos do filme, em milhões;
- A é a *atenção* gerada pelo filme, em tweets (mensagens) por hora, ou seja, é a quantidade média de tweets que se referem ao filme por hora;
- P é a *polaridade*, que é a razão entre as quantidades de tweets positivos (de pessoas que gostaram do filme) e tweets negativos (de pessoas que não gostaram do filme): $P = \frac{\text{tweets positivos}}{\text{tweets negativos}}$;
- N é a quantidade de cinemas em que o filme está sendo exibido.

Por exemplo, *Crepúsculo: Lua Nova* estava em 4024 cinemas nos EUA, obtendo um total de aproximadamente 43 milhões de dólares na segunda semana. Nessa semana, esse filme teve atenção de 259360 tweets, dando $\frac{259360}{7\cdot 24} \approx 1543{,}8$ tweets por hora. Destes, 216135 foram positivos e os demais $259360 - 216135 = 43225$ foram negativos, dando uma polaridade de $\frac{216135}{43225} \approx 5{,}0$. A equação previa $y = 0{,}015 \cdot 1543{,}8 + 1{,}6 \cdot 5{,}0 + 0{,}003 \cdot 4024 = 43{,}229$ milhões de dólares. Nada mal!

a) O filme *Avatar*, na sua segunda semana em cartaz, estava em 3456 cinemas norte-americanos. Na Internet, 713195 tweets falavam sobre o filme nessa semana, dos quais 475463 foram positivos. Considerando o modelo, quantos milhões de dólares o filme arrecadou?

b) Um filme que melhorou muito sua arrecadação foi *Um Sonho Possível*. Ele estava em 3110 cinemas nos EUA na sua segunda semana. Se ele mantivesse sua polaridade inicial de 5, conseguiria $32{,}33$ milhões de dólares segundo o modelo. Porém a reação ao filme foi muito positiva, e sua polaridade foi para $9{,}65$. Para quanto foi sua arrecadação, de acordo com o modelo?

PROBLEMA 2

Os números reais podem ser expressos na forma de *frações contínuas*, isto é, na forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

em que a_0 é inteiro e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são inteiros positivos. Utiliza-se a notação $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$

Por exemplo, para escrever $\frac{2013}{37}$ na forma de fração contínua, inicialmente, calculamos o maior inteiro menor ou igual a esse racional. Esse é o a_0. Assim:

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\cfrac{37}{15}}$$

E repetimos o processo agora para $\frac{37}{15}$ e, assim por diante, obtendo $a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\cfrac{37}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{7}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{15}{7}}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}}$$

Temos então que $\frac{2013}{37} = [54; 2,2,7]$. Pode-se demonstrar que todo racional tem uma representação finita (com um número finito de a_i's) como fração contínua.

As coisas ficam ainda mais interessantes quando consideramos os números irracionais. Cada irracional possui uma representação única como fração contínua a qual é infinita. E, quando a truncamos, ela fornece as melhores aproximações racionais para ele.

Por exemplo, $\pi = 3{,}14159265\ldots = [3; 7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,\ldots]$. Adotando

$$\pi \approx [3; 7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$$

obtemos uma excelente aproximação!

Uma questão extremamente interessante da teoria de frações contínuas é: quais números têm uma representação periódica quando escritos dessa maneira? Por exemplo, qual número real tem a representação $[1; 1,1,1,\ldots] = [1; \overline{1}]$?

Seja

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Então podemos observar que (verifique) $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e, como x é positivo, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a razão áurea!

E como é a representação de $\sqrt{3}$? Fazemos o procedimento usual. O maior inteiro menor do que $\sqrt{3}$ é 1. Assim:

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{3} - 1}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\mathbf{\sqrt{3} + 1}}{\mathbf{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3} - 1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{\sqrt{3} - 1}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\mathbf{\sqrt{3} + 1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (\mathbf{\sqrt{3} - 1})}}$$

Repetindo as passagens acima:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (\mathbf{\sqrt{3} - 1})}}}}$$

E assim por diante. Ou seja, $\sqrt{3} = [1; 1,2,1,2, \dots] = [1; \overline{1,2}]$.

a) Escreva a representação de $\frac{2017}{41}$ como fração contínua.

b) Escreva a representação de $\sqrt{11}$ como fração contínua e conclua que $\sqrt{11} \approx \frac{199}{60}$.

PROBLEMA 3

Em 1824 o matemático norueguês Niels Henrik Abel (05/08/1802 – 06/04/1829) demonstrou que não é possível resolver a equação de quinto grau ($ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$) utilizando radicais, ou seja, existem valores dos coeficientes para os quais não é possível expressar as soluções da equação em termos de alguma fórmula envolvendo adições, subtrações, multiplicações, divisões, potências ou raízes quadradas, cúbicas, quínticas, etc. Tais fórmulas existem para as equações até quarto grau (lembra-se da fórmula do delta para a equação do segundo grau?) e foi uma grande conquista para a Ciência a demonstração dessa impossibilidade. Nessa mesma época, outro matemático, Évariste Galois (25/10/1811 – 31/05/1832), demonstrou esse mesmo resultado utilizando ideias que são de extrema relevância no desenvolvimento da Matemática desde então.

Nesta questão, vamos explorar um pouco as ideias de Abel e esperamos que vocês aprofundem os seus estudos para que possam entender a incrível colaboração desses dois gigantes para o desenvolvimento da Matemática.

Nos parágrafos iniciais de seu trabalho de 1824, Abel escreveu:

"Seja $y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$ uma equação genérica do quinto grau e suponha que ela é solúvel algebricamente, ou seja, podemos expressar y por uma função formada por radicais das quantidades a, b, c, d, e.

É claro que que nesse caso podemos expressar y na forma $y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$, m sendo um número primo e R, p, p_1, p_2, etc. funções da mesma forma que y e, assim por diante, até chegarmos a funções racionais das quantidades a, b, c, d, e."

E um pouco mais a frente, depois de demonstrar que podemos tomar $p_1 = 1$:

"Substituindo o valor de y na equação inicial e manipulando, nós obtemos um resultado da forma $P = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$, em que q, q_1, q_2, etc. são polinômios nas quantidades $a, b, c, d, e, p, p_2, \dots$ e R.

Para que a equação seja válida, é necessário que $q = 0, q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_{m-1} = 0$."

Assim, a chamada *fórmula de Abel* para uma solução da equação de segundo grau $y^2 + by + c = 0$ é $y = p + R^{\frac{1}{2}}$. Substituindo na equação,

$$\left(p + R^{\frac{1}{2}}\right)^2 + b\left(p + R^{\frac{1}{2}}\right) + c = 0 \Leftrightarrow (p^2 + R + bp + c) + (2p + b)R^{\frac{1}{2}} = 0$$

Então, pelo fato citado no final do trecho do trabalho de Abel mostrado anteriormente,

$$\left| \begin{array}{l} p^2 + R + bp + c = 0 \\ \quad 2p + b = 0 \end{array} \right.$$

a) Resolva o sistema acima nas incógnitas p e R e conclua que

$$y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

É possível demonstrar que a *fórmula de Abel* para uma solução da equação de terceiro grau (incompleta) $y^3 + cy + d = 0$ é $y = R^{\frac{1}{3}} + p_2 R^{\frac{2}{3}}$. Utilizando essa fórmula e o fato citado no trecho do trabalho de Abel, vamos nos próximos itens encontrar uma raiz da equação $y^3 - 6y - 6 = 0$.

b) Substitua a fórmula de Abel em $y^3 - 6y - 6$ e obtenha uma expressão da forma $A + B \cdot R^{\frac{1}{3}} + C \cdot R^{\frac{2}{3}}$.

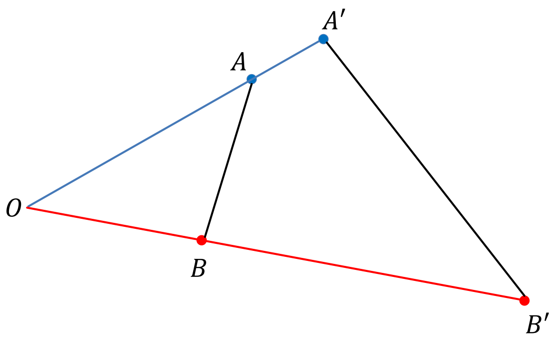
Dica: Nesse item você pode querer utilizar que $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ e que $R^{\frac{4}{3}} = R \cdot R^{\frac{1}{3}}$ e $R^{\frac{5}{3}} = R \cdot R^{\frac{2}{3}}$.

c) Resolvendo o sistema $A = 0$ *e* $B = 0$ *e* $C = 0$, determine p_2, R e obtenha uma raiz da equação $y^3 - 6y - 6 = 0$.

PROBLEMA 4

Uma *transformação geométrica no plano* é uma operação que transforma pontos do plano em pontos do plano. A rotação e a reflexão são dois exemplos de transformações geométricas. Nesse problema veremos outra transformação geométrica, a *inversão*.

Dados um ponto O, denominado *centro de inversão*, e um real positivo k, o *inverso de um ponto $P \neq O$* é o ponto P' na semirreta $\overrightarrow{OP}$ tal que $OP' = \frac{k}{OP}$ (entendeu o nome "inversão"?). A inversão transforma uma figura em outra; alguns círculos viram retas e vice-versa, entre outras propriedades interessantes. Na figura a seguir, A' e B' são os inversos dos pontos A e B:

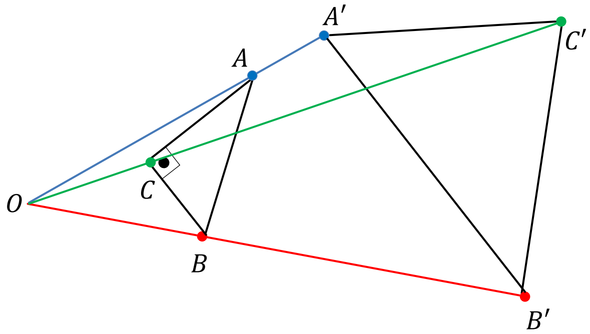


a) Mostre que os triângulos OAB e $OB'A'$ são semelhantes.

b) Prove que $AB = \frac{k \cdot A'B'}{OA' \cdot OB'}$.

c) O que acontece quando "invertemos" o teorema de Pitágoras? Nesse item, iremos aprender.

Na figura a seguir, ABC é um triângulo retângulo em C e A', B' e C' são os inversos de A, B e C com centro em O.



c.1) Calcule $m\left(O\widehat{B'}C'\right) + m\left(O\widehat{A'}C'\right)$ e $m\left(A'\widehat{O}B'\right) + m\left(A'\widehat{C'}B'\right)$.

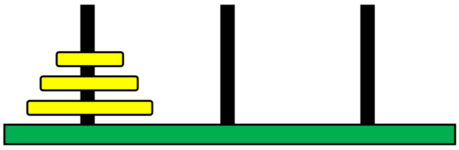
c.2) Prove que a soma dos quadrados dos produtos dos lados opostos do quadrilátero $OB'C'A'$ é igual ao quadrado do produto de suas diagonais, ou seja,

$$OA'^2 \cdot B'C'^2 + OB'^2 \cdot C'A'^2 = OC'^2 \cdot A'B'^2.$$

PROBLEMA 5

Neste problema iremos apresentar o *Algoritmo de Frame-Stewart* que resolve uma generalização do problema das Torres de Hanói.

Vamos relembrar/conhecer o problema das Torres de Hanói. O quebra-cabeça consiste de três pinos verticais presos a uma base e discos de diferentes diâmetros empilhados neles. Inicialmente, todos os discos estão em único pino, colocados em ordem decrescente de tamanho, de modo que o menor disco esteja no topo da pilha.



Toda a pilha de discos deve ser movida para outro pino, obedecendo às seguintes duas regras:

• Somente um disco pode ser movido de cada vez.

• Um disco nunca pode ficar sobre um disco menor.

O número mínimo de movimentos para mover uma pilha com n discos é $2^n - 1$ utilizando o algoritmo recursivo que descreveremos abaixo:

Nomeamos os três pinos *início*, *fim* e *meio*. Para mover n discos do pino início para o pino fim, fazemos o seguinte:

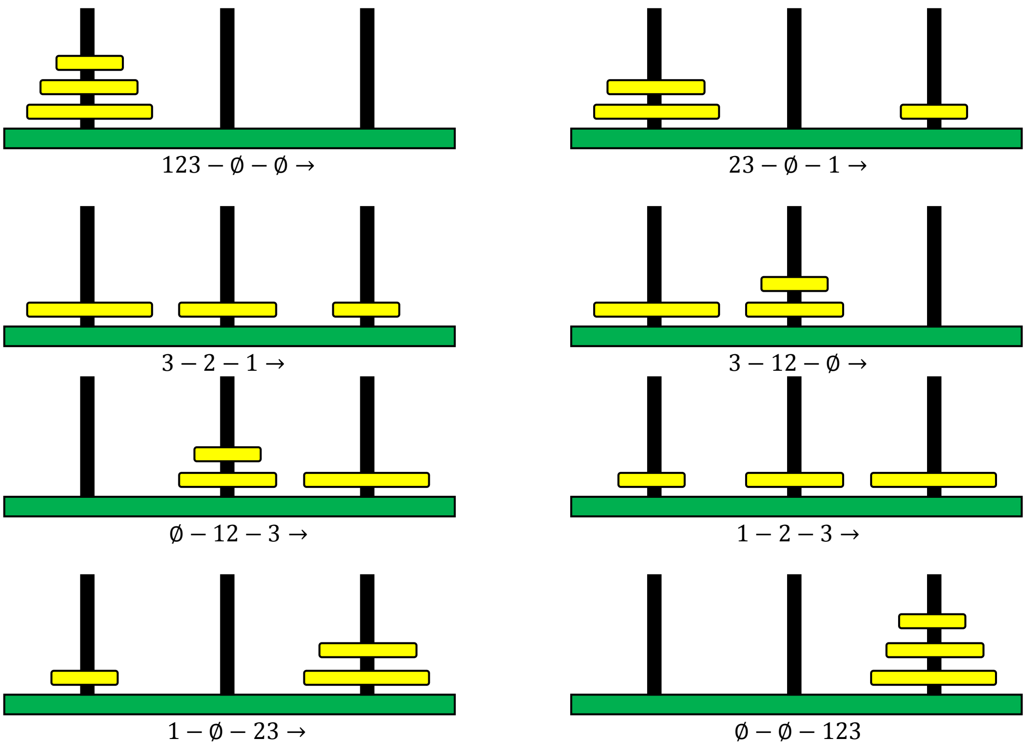
• Se $n = 1$, movemos o disco diretamente do pino início para o pino fim.

• Se $n > 1$:

(i) Utilizando o procedimento obtido para $n - 1$ pinos, movemos todos os discos exceto o último do pino início para o pino meio (aqui, quando $n \geq 3$, teremos de utilizar o pino fim para o procedimento).

(ii) Movemos o n-ésimo disco do pino início para o pino fim.

(iii) Utilizando o procedimento obtido para $n - 1$ discos, movemos todos os $n - 1$ discos do pino meio para o pino fim.



Em 1939, a revista *American Mathematical Monthly* trouxe em sua seção de problemas uma generalização do problema das Torres de Hanói, solicitando uma solução do problema para n discos e k pinos. Em 1941, a mesma revista publicou duas soluções equivalentes, por *J. S. Frame* e pelo autor do problema, *B. M. Stewart*. Essas soluções constituem o que é conhecido atualmente como *Algoritmo de Frame-Stewart* que mostraremos para o caso em que há 4 pinos.

Os valores de $R(n)$, número de movimentos necessários para resolver o problema da Torre de Hanói para n discos e 4 pinos utilizando o algoritmo de Frame-Stewart, são obtidos como se segue: $R(1) = 1$ e, para $n \geq 2$, escolhemos um inteiro k, $0 \leq k < n$, que minimiza o número de movimentos usados no seguinte procedimento:

(i) Mova os k discos do topo do pino início para um dos pinos meio (agora há dois). Isso pode ser feito em $R(k)$ movimentos. Observe que os $n - k$ discos maiores não interferem nos movimentos.

(ii) Mova os $n - k$ discos restantes do pino início para o pino fim. Como um dos pinos meio está ocupado por discos menores (colocados ao final dos movimentos descritos em i), ele não pode ser usado e temos a nossa disposição apenas 3 pinos e, portanto, utilizando o algoritmo mostrado anteriormente, serão necessários $2^{n-k} - 1$ movimentos.

(iii) Mova os k discos menores para o pino fim em $R(k)$ movimentos. O problema fica, então, resolvido em $2R(k) + 2^{n-k} - 1$ movimentos.

Assim, é imediato que $R(2) = 3$ e a tabela a seguir mostra que $R(3) = 5$ (tomamos $k = 1$) e $R(4) = 9$ (podemos tomar $k = 1$ ou $k = 2$).

n	k	$2R(k) + 2^{n-k} - 1$
3	1	$\mathbf{2 \cdot 1 + 2^2 - 1 = 5}$
3	2	$2 \cdot 3 + 2^1 - 1 = 7$
4	1	$\mathbf{2 \cdot 1 + 2^3 - 1 = 9}$
4	2	$\mathbf{2 \cdot 3 + 2^2 - 1 = 9}$
4	3	$2 \cdot 5 + 2^1 - 1 = 11$

Atenção pessoal! Finalmente chegaram as perguntas!

a) Mostre que, de fato, o número mínimo de movimentos para resolver o quebra-cabeça quando temos 4 pinos e 4 discos é 9. Ou seja, não é possível resolvê-lo em 8 movimentos ou menos.

b) Preenchendo a tabela que está na folha de respostas, verifique que $R(5) = 13$ e $R(6) = 17$.

c) Abaixo mostramos a maneira correspondente de resolver o problema quando temos 4 discos e utilizamos $k = 2$.

$$1234 - \emptyset - \emptyset - \emptyset \to 234 - 1 - \emptyset - \emptyset \to 34 - 1 - 2 - \emptyset \to 34 - \emptyset - 12 - \emptyset$$
$$\to 4 - 3 - 12 - \emptyset \to \emptyset - 3 - 12 - 4 \to \emptyset - \emptyset - 12 - 34$$
$$\to \emptyset - 1 - 2 - 34 \to \emptyset - 1 - \emptyset - 234 \to \emptyset - \emptyset - \emptyset - 1234$$

Exiba uma sequência de movimentos que resolva o problema quando temos 4 pinos e 5 discos em 13 movimentos. Utilize a notação mostrada no exemplo dado.

d) Observe:

$R(1) = 2^0$

$R(2) = 2^0 + \mathbf{2^1}$

$R(3) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1}$

$R(4) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2$

$R(5) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2$

$R(6) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2$

E pode-se verificar que:

$R(7) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3}$

$R(8) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3 + 2^3}$

$R(9) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3 + 2^3 + 2^3}$

$R(10) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3}$

$R(11) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3} + 2^4$

Supondo que esse padrão seja válido até $R(2012)$, determine os valores de k, $0 \leq k < 2013$, tais que $2R(k) + 2^{2013-k} - 1 \geq 2R(k+1) + 2^{2013-(k+1)} - 1$ e conclua que o padrão também é válido para $R(2013)$.

Nessa questão, você pode desejar utilizar que $2^a \geq 2^b$ é equivalente a $a \geq b$.

Pode também ser útil saber que, para m inteiro positivo, $1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$.

XXXVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (9 de novembro de 2013)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

Em memória do Prof. Dr. Angelo Barone Netto

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

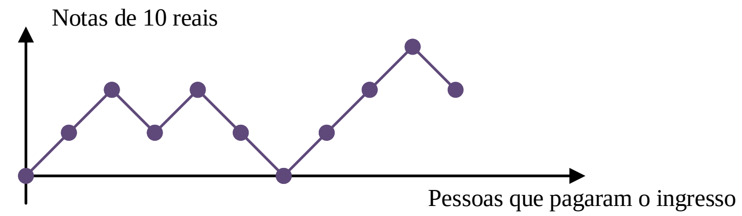
Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

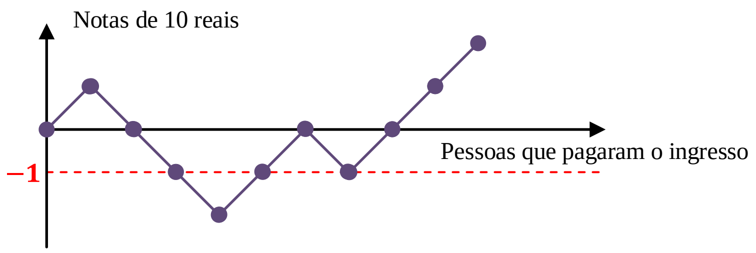
Em um cinema, o ingresso custa 10 reais. Há n pessoas na fila, sendo que k têm uma nota de 20 reais e as demais $n-k$ têm uma nota de 10 reais. Inicialmente, não há dinheiro na única bilheteria. Nesse problema, contaremos de quantas maneiras podemos formar a fila com as n pessoas de modo que o caixa nunca fique sem troco conforme as pessoas vão comprando os ingressos. Entenderemos *fila* como uma n-upla ordenada em que cada entrada é igual a 10 ou a 20, de acordo com a nota de dinheiro que a pessoa na posição correspondente na fila do cinema possui. Chamaremos as filas em que o caixa nunca fique sem troco de *sortudas*. Um exemplo de fila sortuda é (10,10,20,10,20,20,10,10,10,20): as duas primeiras pessoas da fila têm uma nota de 10 reais, a terceira tem uma nota de 20 reais, a quarta tem uma nota de 10 reais e assim por diante (o caixa nunca fica sem troco, pode verificar!). Denotamos $f(n,k)$ a quantidade de filas sortudas.

Primeiro, note que, após todas as pessoas terem comprado seus ingressos, o caixa teve que dar troco de 10 reais para k pessoas e recebeu um total de $n-k$ notas de 10 reais. Logo, no final ele fica com $n-2k$ notas de 10 reais. Portanto $n-2k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{n}{2}$. O gráfico da quantidade de notas de 10 reais de que o caixa dispõe após m pessoas pagarem seus ingressos tem o seguinte aspecto (aqui representamos a fila (10,10,20,10,20,20,10,10,10,20), em que $n=10$ e $k=4$):

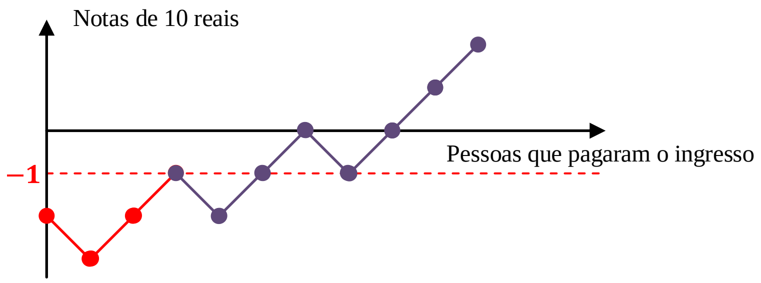


a) Quantas são as filas, sortudas ou não, com n elementos, sendo k elementos iguais a 20?

b) Vamos agora contar a quantidade de filas não sortudas. O gráfico correspondente a uma fila não sortuda tem que descer até a reta $y=-1$:



Para cada gráfico correspondente a uma fila não sortuda, considere a primeira vez que o gráfico toca a reta $y=-1$ e faça uma reflexão da parte do gráfico à esquerda desse ponto em relação à reta $y=-1$, obtendo o que chamaremos de *gráfico modificado*:



b.1) Quantos são os gráficos modificados correspondentes a filas não sortudas com n elementos, com k valores iguais a 20?

b.2) Prove que $f(n,k) = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$ para $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

c) Pode-se provar que, para n suficientemente grande, vale a *aproximação de Stirling*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

A sala de cinema com maior capacidade no Brasil é o IMAX do shopping JK, com 382 lugares. Suponha que o preço do ingresso lá seja 10 reais e que 382 pessoas, cada uma com exatamente uma nota de 10 reais ou uma nota de 20 reais, vá assistir a um filme. Utilizando a aproximação de Stirling, calcule a probabilidade aproximada de que o solitário caixa (coitado de quem for o último na fila!) nunca fique sem troco.

PROBLEMA 2

Uma das várias aplicações de determinantes e sistemas lineares é determinar se dois polinômios têm raiz comum ou não. Considere, por exemplo, $A(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 4$ e $B(x) = x^2 - 3x + 1$. Suponha que esses dois polinômios tenham uma raiz comum r. Então $r^3 - 7r^2 + 13r - 4 = 0$ e $r^2 - 3r + 1 = 0$. Multiplicando a primeira equação por r e a segunda por r e r^2, obtemos duas equações baseadas em $A(r) = 0$ e três equações baseadas em $B(r) = 0$. Observe que 2 é o grau do polinômio B e 3 é o grau do polinômio A:

$$\begin{cases} -4 + 13r - 7r^2 + r^3 = 0 \\ -4r + 13r^2 - 7r^3 + r^4 = 0 \\ 1 - 3r + r^2 = 0 \\ r - 3r^2 + r^3 = 0 \\ r^2 - 3r^3 + r^4 = 0 \end{cases}$$

Agora, sejam $x_0 = 1$, $x_1 = r$, $x_2 = r^2$, $x_3 = r^3$ e $x_4 = r^4$. A conta acima implica que o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} -4x_0 + 13x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 13x_2 - 7x_3 + x_4 = 0 \\ x_0 - 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

tem solução diferente da trivial, ou seja, devemos verificar se o determinante a seguir é nulo ou não.

$$\begin{vmatrix} -4 & 13 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Pode-se provar que a recíproca é verdadeira. Deste modo, basta verificar se o determinante acima, chamado *resultante de $A(x)$ e $B(x)$*, é nulo ou não. O teorema de Chiò dá conta disso:

$$\begin{vmatrix} -4 & 13 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 13-(-3)\cdot(-4) & -7-1\cdot(-4) & 1-0\cdot(-4) & 0-0\cdot(-4) \\ -4-(-3)\cdot 0 & 13-1\cdot 0 & -7-0\cdot 0 & 1-0\cdot 0 \\ 1-(-3)\cdot 0 & -3-1\cdot 0 & 1-0\cdot 0 & 0-0\cdot 0 \\ 0-(-3)\cdot 0 & 1-1\cdot 0 & -3-0\cdot 0 & 1-0\cdot 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 13 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pois o determinante de uma matriz com duas linhas iguais é nulo.

Logo $A(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 4$ e $B(x) = x^2 - 3x + 1$ têm raiz comum (pode-se verificar que são $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$).

Agora é a sua vez! Encontre os valores reais de a para os quais os polinômios $P(x) = x^2 - ax + 1$ e $Q(x) = ax^2 - x - a$ tenham raiz comum.

Nesse problema você pode querer usar teorema de Chiò para calcular o determinante de uma matriz 4×4 como, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6-2\cdot 5 & 7-3\cdot 5 & 8-4\cdot 5 \\ 1-2\cdot 9 & 2-3\cdot 9 & 3-4\cdot 9 \\ 5-2\cdot(-4) & 6-3\cdot(-4) & 7-4\cdot(-4) \end{vmatrix}$$

E para finalizar, basta calcular o determinante de ordem 3 obtido.

PROBLEMA 3

Os números reais podem ser expressos na forma de *frações contínuas*, isto é, na forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

em que a_0 é inteiro e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são inteiros positivos. Utiliza-se a notação $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$

Por exemplo, para escrever $\frac{2013}{37}$ na forma de fração contínua, inicialmente, calculamos o maior inteiro menor ou igual a esse racional. Esse é o a_0. Assim:

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\frac{37}{15}}$$

E repetimos o processo agora para $\frac{37}{15}$ e, assim por diante, obtendo a_1, a_2, a_3, ...

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\frac{37}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \frac{7}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{15}{7}}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}$$

Temos então que $\frac{2013}{37} = [54; 2,2,7]$. Pode-se demonstrar que todo racional tem uma representação finita (com um número finito de a_i's) como fração contínua.

As coisas ficam ainda mais interessantes quando consideramos os números irracionais. Cada irracional possui uma representação única como fração contínua a qual é infinita. E, quando a truncamos, ela fornece as melhores aproximações racionais para ele.

Por exemplo, $\pi = 3{,}14159265\ldots = [3; 7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,\ldots]$. Adotando

$$\pi \approx [3; 7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$$

obtemos uma excelente aproximação!

Uma questão extremamente interessante da teoria de frações contínuas é: quais números têm uma representação periódica quando escritos dessa maneira? Por exemplo, qual número real tem a representação $[1; 1,1,1,\ldots] = [1; \overline{1}]$?

Seja

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Então podemos observar que (verifique) $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e, como x é positivo, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a razão áurea!

E como é a representação de $\sqrt{3}$? Fazemos o procedimento usual. O maior inteiro menor do que $\sqrt{3}$ é 1. Assim:

$$\sqrt{3} = 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3} - 1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \left(\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}\right)}}$$

Repetindo as passagens acima:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \left(\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}\right)}}}}$$

E assim por diante. Ou seja, $\sqrt{3} = [1; 1,2,1,2, \dots] = [1; \overline{1,2}]$.

a) Escreva a representação de $\frac{2017}{41}$ como fração contínua.

b) Escreva a representação de $\sqrt{11}$ como fração contínua e conclua que $\sqrt{11} \approx \frac{199}{60}$.

c) Temos que $\sqrt{41} = [6; \overline{2, 2, 12}]$ é um irracional da forma $\sqrt{D}$, em que D é um inteiro positivo, cujo período da representação como fração contínua tem tamanho 3.

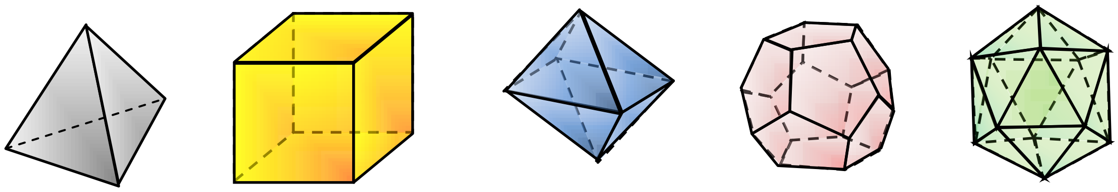
Esses números são raros. De fato, há apenas sete menores do que 1000: $\sqrt{41} = [6; \overline{2,2,12}]$, $\sqrt{130} = [11; \overline{2,2,22}]$, $\sqrt{269} = [16; \overline{2,2,32}]$, $\sqrt{370} = [19; \overline{4,4,38}]$, $\sqrt{458} = [21; \overline{2,2,42}]$, $\sqrt{697} = [26; \overline{2,2,52}]$, $\sqrt{986} = [31; \overline{2,2,62}]$.

Determine um número D maior do que 2013 tal que a representação de $\sqrt{D}$ como fração contínua tenha período 3.

Observe que 6 dos exemplos apresentados obedecem a um mesmo padrão. Pode ser útil aplicá-lo.

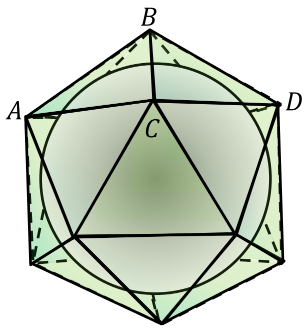
PROBLEMA 4

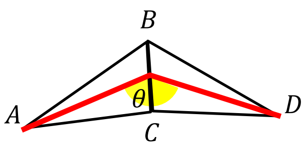
Os sólidos de Platão têm faces com mesmas quantidades de arestas e, além disso, de cada vértice sai a mesma quantidade de arestas. Se todas as arestas têm a mesma medida, o sólido de Platão é *regular*. Pode-se provar que há cinco sólidos de Platão: o *tetraedro*, o *hexaedro*, o *octaedro*, o *dodecaedro* e o *icosaedro*.

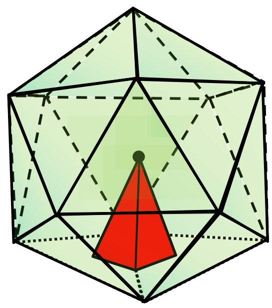


Você já deve conhecer bem os dois primeiros sólidos, e quem sabe o terceiro. Nesse problema, daremos uma atenção especial aos outros dois.

a) Primeiro calcularemos o raio da esfera inscrita no icosaedro regular, que é o sólido de Platão com 20 faces triangulares.







a.1) Sendo θ o ângulo diédrico entre as faces ABC e BCD do icosaedro regular, calcule $\cos\theta$.

a.2) Considere o quadrilátero destacado na figura da direita, que tem como vértices o centro do icosaedro, dois centros de faces adjacentes e o ponto médio de uma das arestas. Sendo ℓ a medida da aresta do icosaedro, calcule o raio da esfera inscrita no icosaedro.

b) Os centros das faces do icosaedro regular são os vértices de um dodecaedro regular. Sendo m a medida da aresta do dodecaedro, calcule o raio da esfera circunscrita ao dodecaedro regular.

Você pode querer utilizar os seguintes dados:

- *A diagonal de um pentágono regular de lado x é $x \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*
- $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$.

PROBLEMA 5

Como as calculadoras calculam seno e cosseno? Ao contrário do que se pensa, elas não usam aproximações polinomiais, e sim uma outra sequência que usa operações mais simples. O *método CORDIC* utiliza as seguintes sequências: para $1 \leq k \leq n$, sejam

$$x_{k+1} = x_k - \operatorname{sgn}(z_k) \cdot y_k \cdot \frac{1}{2^k}$$
$$y_{k+1} = y_k + \operatorname{sgn}(z_k) \cdot x_k \cdot \frac{1}{2^k}$$
$$z_{k+1} = z_k - \operatorname{sgn}(z_k) \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}$$

Aqui, $\operatorname{sgn}(z_k)$ é o *sinal* de z_k, ou seja,

$$\operatorname{sgn}(z_k) = \begin{cases} 1, \text{se } z_k \geq 0 \\ -1, \text{se } z_k < 0 \end{cases}$$

e veremos que é escolhido para que z_{n+1} fique próximo de zero. Além disso, $\operatorname{arctg} x$ é o arco α, com $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tal que $\operatorname{tg}\alpha = x$.

Os valores iniciais da sequência são

$$x_0 = K = \cos(\operatorname{arctg} 1) \cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}\right), \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \theta,$$

em que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Ao final dos cálculos, temos $z_{n+1} \approx 0$, $x_{n+1} \approx \cos\theta$ e $y_{n+1} \approx \operatorname{sen}\theta$ para n suficientemente grande. Assim, a calculadora mostra no visor x_{n+1} ao apertarmos a tecla $\boxed{\texttt{cos}}$ e y_{n+1} ao apertarmos $\boxed{\texttt{sen}}$.

Vamos provar essas últimas afirmações.

a) Prove que

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\operatorname{sgn}(z_k)}{2^k} \\ \frac{\operatorname{sgn}(z_k)}{2^k} & 1 \end{bmatrix}$$

b) Mostre que

$$A = \frac{1}{\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right)} \begin{bmatrix} \cos\left(\operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right) & -\operatorname{sen}\left(\operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right) & \cos\left(\operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right) \end{bmatrix}$$

c) Demonstre que

$$z_{n+1} = \theta - \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}, \quad x_{n+1} = \cos(\theta - z_{n+1}) \quad \text{e} \quad y_{n+1} = \operatorname{sen}(\theta - z_{n+1}).$$

d) Prove que $|z_k| \leq \operatorname{arctg}\frac{1}{2^{k-1}}$ para $k \geq 1$. Note que isso faz com que z_{n+1} fique próximo de zero para n grande.

e) Enfim, mostre que x_{n+1} e y_{n+1} são boas aproximações para $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ para n grande. Mais especificamente, prove que

$$|x_{n+1} - \cos\theta| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad |y_{n+1} - \operatorname{sen}\theta| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Você pode querer utilizar as seguintes fórmulas:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$