

Resoluções

Nível α (6^o e 7^o anos do Ensino Fundamental)

PROBLEMA 1

- a) Do momento em que saíram de Rovaniemi até chegarem na USP eles percorreram $829 + 11299 + 43 = 12171$ quilômetros.
 b) Eles gastaram $75 \times 2 \times 2,40 = 360,00$ reais com os bilhetes de trem, $825 \times 2 \times 1,72 = 2838,00$ reais com os bilhetes aéreos e 90,00 reais com o táxi. Ou seja, gastaram $360,00 + 2838,00 + 90,00 = 3288,00$ reais com transporte.
 c) A venda das 568 pizzas precisa cobrir o gasto com transporte de $3288 \times 2 = 6576$ reais mais o custo do preparo de cada pizza. Como $6576 : 568 = 11,58$ reais, é preciso que cada pizza custe, no mínimo, $11,58 + 11,21 = 22,79$ reais.

PROBLEMA 2

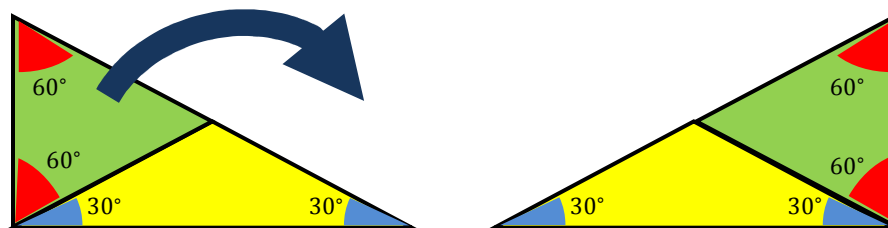
- a) A maior fração $\frac{1}{n}$ que é menor que $\frac{3}{7}$ é $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, portanto fazemos $\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21} \Leftrightarrow \frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$. Repetimos o procedimento com $\frac{2}{21}$. A maior fração $\frac{1}{n}$ que é menor que $\frac{2}{21}$ é $\frac{2}{22} = \frac{1}{11}$, logo temos $\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231}$, ou seja, $\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.
 Finalmente: $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$

- b) Como $33 = 8 + 10 + 15$, temos $\frac{33}{119} = \frac{8}{119} + \frac{10}{119} + \frac{15}{119} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15 \cdot 119} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12 \cdot 119} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 119} = \frac{1}{15} + \frac{1}{1785} + \frac{1}{12} + \frac{1}{1428} + \frac{1}{8} + \frac{1}{952}$

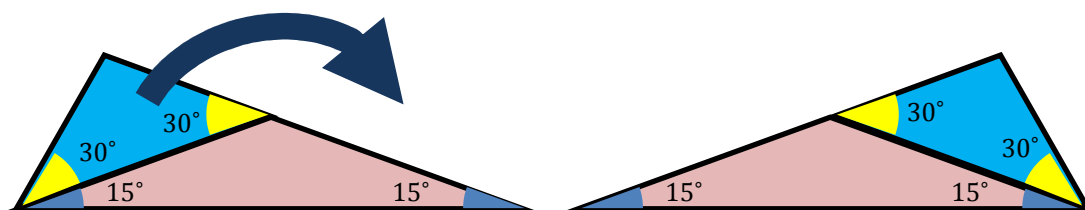
PROBLEMA 3

Os desenhos estão fora de escala.

a)



b)



PROBLEMA 4

- a) Se $A = (f_1; f_2; f_3; f_4; f_5; f_6) = \left(\frac{52}{33}; \frac{44}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$ temos, para a entrada 2^2 , os passos:

$$\begin{aligned} N_1 &= 2^2 \\ N_2 &= N_1 f_5 = 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot 2 \\ N_3 &= N_2 f_5 = 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3^2 \\ N_4 &= N_3 f_6 = 3^2 \cdot 11 \\ N_5 &= N_4 f_1 = 3^2 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \\ N_6 &= N_5 f_2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot \frac{44}{39} = 2^4 \cdot 11 \\ N_7 &= N_6 f_3 = 2^4 \cdot 11 \cdot \frac{1}{11} = 2^4 \end{aligned}$$

b) Basta modificar $\frac{52}{33}$ e $\frac{44}{39}$ para que somem 3 no expoente no lugar de 2 e 11 por $11 \cdot 2$ para somar 1 no começo. Obtemos

$$B = \left(\frac{104}{33}; \frac{88}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 22 \right)$$

Os estudantes só precisam apresentar uma sequência que funcione; há várias outras soluções, como por exemplo

$$B = \left(\frac{2}{17}; \frac{104}{33}; \frac{88}{39}; \frac{17}{11}; \frac{17}{13}; \frac{3}{2}; 11 \right)$$

PROBLEMA 5

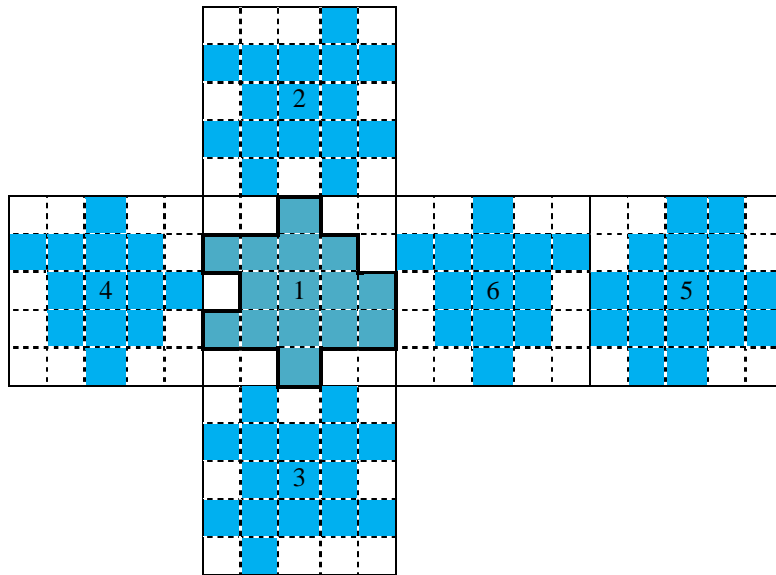
a) Vemos que para montar o sólido devemos encaixar as peças numeradas de 1 a 6 (representadas abaixo), portanto, ao pegar uma peça qualquer devemos ser capazes de encaixar quatro peças nela e a última peça será oposta a essa que tomamos. Vamos encontrar peças opostas tentando procurar aquelas que não conseguem se encaixar. Por exemplo, a peça 5 possui todas as laterais com dois bloquinhos juntos, mesmo assim somos capazes de encaixar essa peça com as peças 2 (lado de baixo), 3 (lado direito), 4 (lado de baixo) e 6 (lado de cima ou de baixo), portanto a única peça que não conseguimos encaixar é a peça 1, portanto obrigatoriamente 1 e 5 são peças opostas.

Agora veja as peças 2 e 3, elas possuem três laterais com dois bloquinhos separados e o último lado de ambos possui um bloquinho apenas, logo elas não conseguem se encaixar, portanto 2 e 3 são opostas.

E finalmente, as peças 4 e 6, que sobraram, são opostas.

Ou seja, os pares são (1 e 5), (2 e 3) e (4 e 6).

b) É possível aplicar nesse item b a seguinte ideia: nas fileiras em que há contato entre as peças não podem haver quadradinhos azuis adjacentes. Desse modo é imediato que, na planificação, as vizinhas da esquerda e da direita da peça 1 são, em alguma ordem, as peças 4 e 6. Daí é só ir usando várias vezes o fato citado acima.



Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

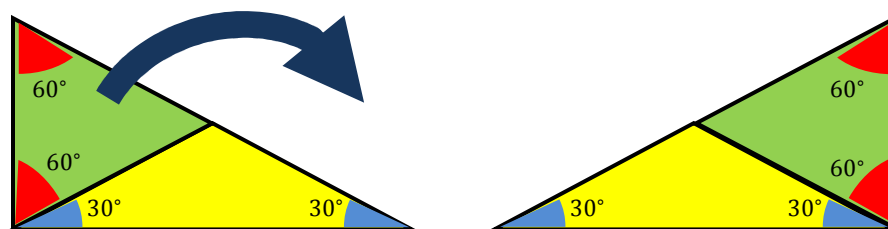
PROBLEMA 1

- a) Do momento em que saíram de Rovaniemi até chegarem na USP eles percorreram $829 + 11299 + 43 = 12171$ quilômetros.
 b) Eles gastaram $75 \times 2 \times 2,40 = 360,00$ reais com os bilhetes de trem, $825 \times 2 \times 1,72 = 2838,00$ reais com os bilhetes aéreos e 90,00 reais com o táxi. Ou seja, gastaram $360,00 + 2838,00 + 90,00 = 3288,00$ reais com transporte.
 c) A venda das 568 pizzas precisa cobrir o gasto com transporte de $3288 \times 2 = 6576$ reais mais o custo do preparo de cada pizza. Como $6576 : 568 = 11,58$ reais, é preciso que cada pizza custe, no mínimo, $11,58 + 11,21 = 22,79$ reais.

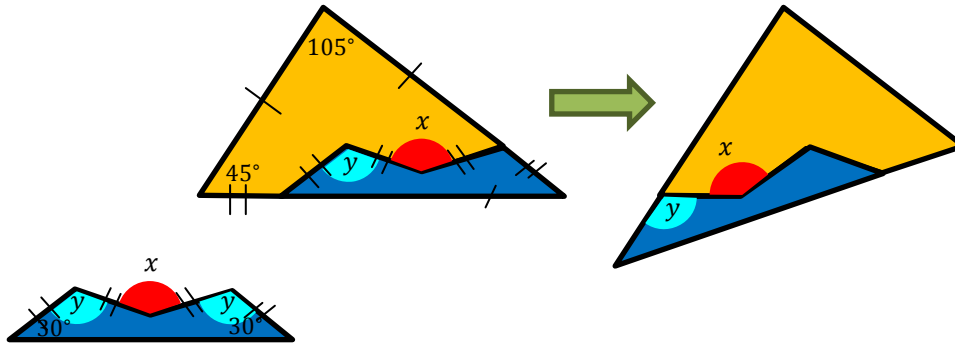
PROBLEMA 2

Os desenhos estão fora de escala.

a)



b) Marcamos os ângulos do triângulo como 30° , 45° e 105° . Observando o encaixe dos lados podemos marcar os seguintes ângulos.



Observando os triângulos da esquerda e direita vemos que $y + 45^\circ = 180^\circ$, ou seja, $y = 135^\circ$. Veja ainda que a "engrenagem" possui dois ângulos de 30° , mais uma vez observando os triângulos da esquerda e direita vemos que $x + 30^\circ = 180^\circ$, ou seja, $x = 150^\circ$.

PROBLEMA 3

a)

$$X^* = 42 = \frac{50^2 + 5k^2}{50 + 5k} \Leftrightarrow k^2 - 42k + 80 = 0 \Leftrightarrow k = 2 \text{ ou } k = 40$$

Para $k = 2$, $\bar{X} = \frac{50+5 \times 2}{6} = 10$; para $k = 40$, $\bar{X} = \frac{50+5 \times 40}{6} = \frac{250}{6} \cong 41,6$.

b) Uma abordagem bem direta é tomar e $X_1 \gg X_2 = X_3 = \dots = X_N$. Então, teremos

$$X^* \cong \frac{X_1^2}{X_1} = X_1 \text{ e } \bar{X} \cong \frac{X_1}{N}, \text{ i. e., } X^* \cong N\bar{X}$$

Por exemplo, $N = 11$ e $X_2 = X_3 = \dots = X_{11} = 2$ e $X_1 = 1100 - 2 \cdot 10 = 1080$. Temos

$$M = 2 \cdot 10 + 1080 = 1100$$

$$\bar{X} = \frac{M}{11} = 100$$

$$X^* = \frac{1080^2 + 10 \cdot 2^2}{1100} \approx 1060,4 > 10 \cdot 100 = 10 \cdot \bar{X}$$

PROBLEMA 4

a) Aplicando o algoritmo guloso, temos $\frac{15}{19} = \frac{1}{2} + \frac{11}{38} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{76} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{988}$

Há outras possibilidades, como $\frac{15}{19} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{38} + \frac{1}{76}$

b) Temos que $0 < \frac{r}{p} < 1$, então $\left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil = \left\lceil \frac{pl+r}{p} \right\rceil = \left\lceil l + \frac{r}{p} \right\rceil = l + 1$.

c) $\frac{p}{q} - \frac{1}{l+1} = \frac{pl+p-q}{q(l+1)} = \frac{pl+p-pl-r}{q(l+1)} = \frac{p-r}{q(l+1)}$. É fácil perceber que o numerador da fração que sobrou diminuiu. Como o numerador diminui a cada etapa, o número de etapas é no máximo p . Sendo assim, a fração $\frac{p}{q}$ é a soma de no máximo p frações egípcias distintas.

PROBLEMA 5

a) No pentágono regular há somente duas distâncias distintas: os cinco lados e as cinco diagonais. Então $E_5 = 2$.

b) Note que círculos concêntricos têm interseção vazia e que círculos não concêntricos têm no máximo 2 pontos de interseção. Como há st pares de circunferências, sendo uma com centro em P_1 e outra com centro em P_2 , a quantidade de pontos de interseção entre circunferências é no máximo $2st$.

c) Os $n - 2$ pontos de S diferentes de P_1 e P_2 são interseções entre círculos com centro em P_1 e P_2 , sendo assim um subconjunto dos pontos de interseção entre circunferências descritos no item anterior. Logo $2st \geq n - 2$.

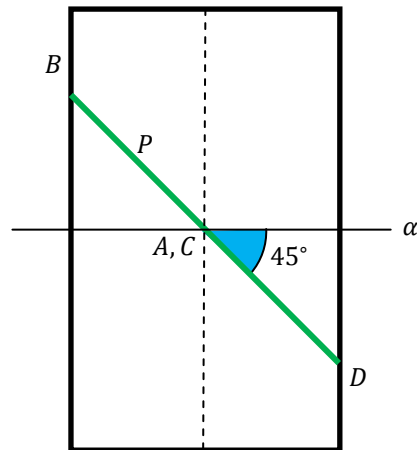
Suponha, sem perda de generalidade, $s \geq t$. Note que as s circunferências com centro em P_1 têm raios diferentes. Como cada circunferência contém algum ponto de S , há pelo menos s distâncias diferentes (uma para cada raio). Assim,

$$2s^2 \geq 2st \geq n - 2 \Rightarrow s^2 \geq \frac{n-2}{2} \Leftrightarrow s \geq \sqrt{\frac{n-2}{2}}. \text{ Assim, } E_n \geq s \geq \sqrt{\frac{n-2}{2}}.$$

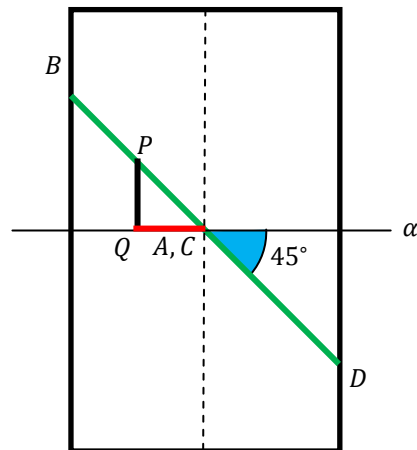
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

PROBLEMA 1

a)



b)



De acordo com a vista superior, $QA = \text{sen } x$. Mas o triângulo PQA é retângulo e isósceles, logo $PQ = QA = \text{sen } x$, como queríamos demonstrar.

PROBLEMA 2

a) Como

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD - BC & -AB + BA \\ CD - DC & -CB + DA \end{bmatrix}$$

é claro que a igualdade é falsa.

Para apresentar um contraexemplo, basta tomar matrizes A e B que não comutam. Podemos tomar, por exemplo, $A = C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$B = D = A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Seja $M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$. Então

$$\begin{bmatrix} I & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} + AM_{11} & M_{12} + AM_{12} & M_{13} + AM_{13} \\ M_{21} + BM_{11} & M_{22} + BM_{12} & M_{23} + BM_{13} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A & AB \\ \mathbf{0} & I & -B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$$

c) Como $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, utilizando o item b, a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 3

a) Imagine que cada formiga carrega uma bandeira (dessa vez não foi tão impressionante, né). Após 100 segundos as bandeiras terão dado uma volta completa na haste e estarão em suas posições iniciais. Temos ainda que as posições relativas entre as formigas não se alteram.

Logo se uma das formigas estiver em sua posição inicial, todas estão.

b) Como as formigas ao se encontrarem trocam o sentido da caminhada sem alterar o módulo da velocidade, o somatório das velocidades é constante.

Considerando o item anterior, para Alice estar na sua posição inicial após 100 segundos, tal somatório deve ser N cm/s ou $-N$ cm/s ou 0 cm/s. Ou seja, todas as formigas devem estar caminhando no sentido anti-horário ou todas devem estar caminhando no sentido horário ou metade caminha inicialmente em cada sentido.

Portanto há dois casos a considerar:

- Se $N = 2k + 1, k \geq 0$, não é possível que o somatório das velocidades seja 0 cm/s. Logo a probabilidade pedida é

$$\frac{2}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k}}$$

- Se $N = 2k, k \geq 1$, existem $\binom{2k}{k}$ maneiras de termos metade das formigas caminhando inicialmente em cada sentido. Logo a probabilidade pedida é $\frac{2+\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$.

PROBLEMA 4

a) Utilizando a aproximação dada: $2^n \leq 10^{100} \Leftrightarrow n \leq 100 \log_2 10 \Leftrightarrow n \leq 332,2 \Leftrightarrow n \leq 332$

Isto é, há 332 potências de 2 menores ou iguais a 10^{100} .

b) Há no máximo $\log_k n$ potências de k no intervalo de 1 a n . E, sendo a^b uma potência perfeita no intervalo de 1 a $n, a \leq \sqrt[n]{n}$.

Logo o número de potências perfeitas no intervalo de 1 a n é menor ou igual a $\sum_{k=2}^{\sqrt{n}} \log_k n$ que é menor do que $\sqrt{n} \cdot \log_2 n$.

c) Pelo item b, $\frac{PF(n)}{n} < \frac{\sqrt{n} \cdot \log_2 n}{n} = \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}$.

Podemos, então, tomar $N = 10^{1000}$ e teremos

$$\frac{PF(10^{1000})}{10^{1000}} < \frac{\log_2 10^{1000}}{\sqrt{10^{1000}}} < \frac{5000}{10^{500}} = 5 \cdot 10^{-497}$$

d) Seja $PA(n)$ o número de termos da PA no intervalo de 1 a n . Então

$$PA(a_k) = k = \frac{a_k - a_1}{r} + 1 > \frac{a_k}{r} + 1$$

Uma maneira:

Supondo que exista uma PA crescente cujos termos sejam todos potências perfeitas, teremos, para tal PA, $PA(n) \leq PF(n)$ e, portanto, para todo k inteiro positivo:

$$\frac{\frac{a_k}{r} + 1}{a_k} < \frac{PA(a_k)}{a_k} \leq \frac{PF(a_k)}{a_k} \Rightarrow \frac{PF(a_k)}{a_k} > \frac{1}{r} + \frac{1}{a_k} \Rightarrow \frac{\log_2 a_k}{\sqrt{a_k}} > \frac{1}{r} + \frac{1}{a_k} \Rightarrow \frac{\log_2 a_k}{\sqrt{a_k}} > \frac{1}{r}$$

Tomando, por exemplo, $a_k \geq 2^{2t}$, a desigualdade (*) é equivalente a

$$\frac{2t}{2^t} > \frac{1}{r} \Leftrightarrow 2rt > 2^t$$

Para $t = 2r$, como $r \geq 2, 2^t = 2^{2r} \geq (2r)^2$ e chegamos a uma contradição.

Outra maneira:

Para todo k inteiro positivo:

$$\frac{\frac{a_k}{r} + 1}{a_k} < \frac{PA(a_k)}{a_k} \leq \frac{PF(a_k)}{a_k} < \frac{\log_2 a_k}{\sqrt{a_k}}$$

Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_k} \right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log_2 a_k}{\sqrt{a_k}} \Rightarrow \frac{1}{r} \leq 0$$

E obtemos uma contradição.

PROBLEMA 5

a) Há várias possibilidades. Uma é

$$\text{linha 0: } \frac{3 \cdot 5}{2} \rightarrow 0; 1 \rightarrow 1$$

$$\text{linha 1: } \frac{1}{5} \rightarrow 2; 1 \rightarrow 4$$

$$\text{linha 2: } \frac{2 \cdot 7}{3} \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3$$

$$\text{linha 3: } \frac{3}{7} \rightarrow 3; 1 \rightarrow 1$$

$$\text{linha 4: } \frac{1}{3} \rightarrow 4$$

Explicando melhor, a ideia é somar n fatores 2 uma quantidade n de vezes.

- A *linha 0* troca 2^n por $3^n \cdot 5^n$. Os fatores 3 vão servir para somar n repetidas vezes; os fatores 5 contam quantas vezes somamos n ;
- A *linha 1* diminui a quantidade de fatores 5 em 1, caso haja fatores 5; caso não haja, o programa está prestes a terminar e vai para a *linha 4*, onde é finalizado;
- A *linha 2* troca n fatores 3 por n fatores 2 (ou seja, somamos n) e n fatores 7. Por que os fatores 7? Veja a próxima linha!

- A *linha 3* repõe os fatores 3 (precisamos deles de novo para colocar mais fatores 2!), trocando os n fatores 7 da linha anterior por fatores 3 e depois retorna à *linha 1*, onde diminuimos fatores 5 e começamos tudo de novo!
- Enfim, a *linha 4*, que é onde o programa termina, retira todos os fatores 3 que sobraram (eles vêm da *linha 3*, que passa para a *linha 1*), até sobrarem somente fatores 2, que é a saída.

b) Primeiro vamos tirar as referências às próprias linhas:

$$\begin{aligned} \text{linha 0: } & \frac{3 \cdot 5}{2} \rightarrow 0; 1 \rightarrow 1 \\ \text{linha 1: } & \frac{1}{5} \rightarrow 2.a; 1 \rightarrow 4.a \\ \text{linha 2. a: } & \frac{2 \cdot 7}{3} \rightarrow 2.b; 1 \rightarrow 3.a \\ \text{linha 2. b: } & \frac{2 \cdot 7}{3} \rightarrow 2.a; 1 \rightarrow 3.a \\ \text{linha 3. a: } & \frac{3}{7} \rightarrow 3.b; 1 \rightarrow 1 \\ \text{linha 3. b: } & \frac{3}{7} \rightarrow 3.a; 1 \rightarrow 1 \\ \text{linha 4. a: } & \frac{1}{3} \rightarrow 4.b \\ \text{linha 4. b: } & \frac{1}{3} \rightarrow 4.a \end{aligned}$$

Vamos agora fazer a substituição por primos:

$$\begin{aligned} \text{linha 0: } & \frac{3 \cdot 5}{2} \rightarrow 0; 1 \rightarrow 11 \\ \text{linha 11: } & \frac{1}{5} \rightarrow 13; 1 \rightarrow 29 \\ \text{linha 13: } & \frac{2 \cdot 7}{3} \rightarrow 17; 1 \rightarrow 19 \\ \text{linha 17: } & \frac{2 \cdot 7}{3} \rightarrow 13; 1 \rightarrow 19 \\ \text{linha 19: } & \frac{3}{7} \rightarrow 23; 1 \rightarrow 11 \\ \text{linha 23: } & \frac{3}{7} \rightarrow 19; 1 \rightarrow 11 \\ \text{linha 29: } & \frac{1}{3} \rightarrow 31 \\ \text{linha 31: } & \frac{1}{3} \rightarrow 29 \end{aligned}$$

Agora, vamos construir as sequências de frações de cada linha, usando a regra dada. A *linha 0* é um caso especial: em vez de associarmos a um primo, a associamos ao número 1:

$$\begin{aligned} \text{linha 0: } & \frac{3 \cdot 5}{2}; 11 \\ \text{linha 11: } & \frac{13}{5 \cdot 11}; \frac{29}{11} \\ \text{linha 13: } & \frac{2 \cdot 7 \cdot 17}{3 \cdot 13}; \frac{19}{13} \\ \text{linha 17: } & \frac{2 \cdot 7 \cdot 13}{3 \cdot 17}; \frac{19}{17} \\ \text{linha 19: } & \frac{3 \cdot 23}{7 \cdot 19}; \frac{11}{19} \\ \text{linha 23: } & \frac{3 \cdot 19}{7 \cdot 23}; \frac{11}{23} \\ \text{linha 29: } & \frac{31}{3 \cdot 29} \\ \text{linha 31: } & \frac{29}{3 \cdot 31} \end{aligned}$$

Finalmente, podemos obter nossa sequência F : basta tomar as linhas não nulas em ordem, colocar os números $\frac{1}{p_i}$, sendo p_i as linhas, em ordem (eles “fecham” cada linha; é como se fosse o “;” de C++ ou “end” de Pascal), e a *linha 0*:

$$\left(\frac{13}{5 \cdot 11}; \frac{29}{11}; \frac{2 \cdot 7 \cdot 17}{3 \cdot 13}; \frac{19}{13}; \frac{2 \cdot 7 \cdot 13}{3 \cdot 17}; \frac{19}{17}; \frac{3 \cdot 23}{7 \cdot 19}; \frac{11}{19}; \frac{3 \cdot 19}{7 \cdot 23}; \frac{11}{23}; \frac{31}{3 \cdot 29}; \frac{29}{3 \cdot 31}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{1}{17}; \frac{1}{19}; \frac{1}{23}; \frac{1}{29}; \frac{1}{31}; \frac{3 \cdot 5}{2}; 11 \right)$$