XXXV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (5 de novembro de 2011)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Aino e Eino, exímios pizzaiolos residentes em Rovaniemi (terra do Papai Noel e capital da Lapônia, Finlândia), vieram para São Paulo, mais precisamente para a Cidade Universitária da USP.

Para se deslocarem até a USP, eles primeiramente foram de trem de Rovaniemi até Helsinki. A viagem é de 829 km e eles gastaram 75 euros cada um.

De Helsinki eles seguiram de avião até São Paulo, gastando 825 dólares cada um para percorrer o trajeto de 11299 km.

Do aeroporto internacional de São Paulo eles foram para a USP de táxi, e gastaram juntos 90 reais, percorrendo 43 km.

a) Desprezando as distâncias percorridas a pé, quantos quilômetros eles percorreram do momento em que saíram de Rovaniemi até quando chegaram na USP? (Seja grato aos esforços do Papai Noel para chegar à sua casa, no caso de você ter se comportado bem!)

b) Considerando que 1 euro vale 2,40 reais e que 1 dólar vale 1,72 real, quantos reais eles gastaram no total com transporte para ir de Rovaniemi até a USP?

c) Agora é hora de Aino e Eino trabalharem. Eles vão preparar 568 pizzas tipicamente finlandesas, uma para cada um dos 568 participantes da fase final da OPM na USP. O custo com o preparo da pizza é 11,21 reais. Admitindo que para voltar para casa eles vão gastar com transporte o mesmo que gastaram para vir e supondo que todas as pizzas serão vendidas, qual é o preço mínimo da pizza para eles pagarem as duas viagens de ida, as duas viagens de volta e o custo de preparo?

PROBLEMA 2

No Egito Antigo, as frações eram expressas principalmente como somas de frações distintas com numerador igual a 1. Por isso, frações com numerador igual a 1 são chamadas *frações egípcias*. Por exemplo, eles utilizavam $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ no lugar de $\frac{8}{15}$ (mais precisamente, eles escreviam hieróglifos que representam $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$).

Os matemáticos questionaram se era possível representar todo número racional $\frac{p}{q}$, com $1 \leq p < q$, como soma de frações egípcias distintas. A resposta é sim, e foi encontrada por Fibonacci (o mesmo da sequência!).

Para isso, pode-se utilizar o *algoritmo guloso*, que funciona da seguinte forma: subtraímos da fração $\frac{p}{q}$ a maior fração $\frac{1}{n}$ que é menor do que $\frac{p}{q}$ e depois continuamos o processo com a fração que sobrar. Por exemplo:

$$\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\left(\frac{4}{17}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}+\frac{3}{85}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{2}{2465}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{1}{1233}+\frac{1}{3039345}$$

a) Escreva $\frac{3}{7}$ como soma de frações egípcias distintas.

b) O problema do algoritmo guloso é que ele gera frações com denominadores muito grandes (como 3039345 no exemplo acima). O próprio Fibonacci sugeriu outro método, baseado na identidade $\frac{a}{ab-1}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b(ab-1)}$. Por exemplo, o algoritmo guloso gera, para $\frac{8}{11}$, a expansão

$$\frac{8}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{37}+\frac{1}{4070}$$

Para aplicarmos a ideia de Fibonacci, escrevemos $\frac{8}{11}$ como soma de frações cujos numeradores são divisores distintos do sucessor do denominador, ou seja, de $11+1=12$, e utilizamos a identidade acima:

$$\frac{8}{11}=\frac{2}{11}+\frac{6}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}+\frac{1}{2}+\frac{1}{22}$$

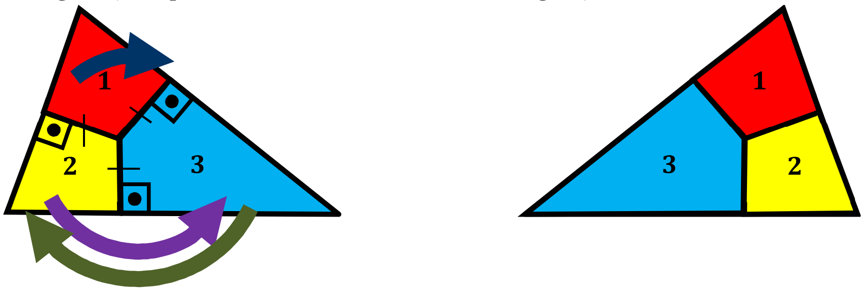
Tendo essa ideia em mente, escreva $\frac{33}{119}$ como soma de frações egípcias distintas, todas com denominadores menores que 2011.

PROBLEMA 3

Aino e Eino, os primos finlandeses de Arnaldo e Bernaldo, abriram um restaurante especializado em *jauhelihapizza*, uma pizza de carne moída finlandesa. Aino e Eino fazem pizzas triangulares.

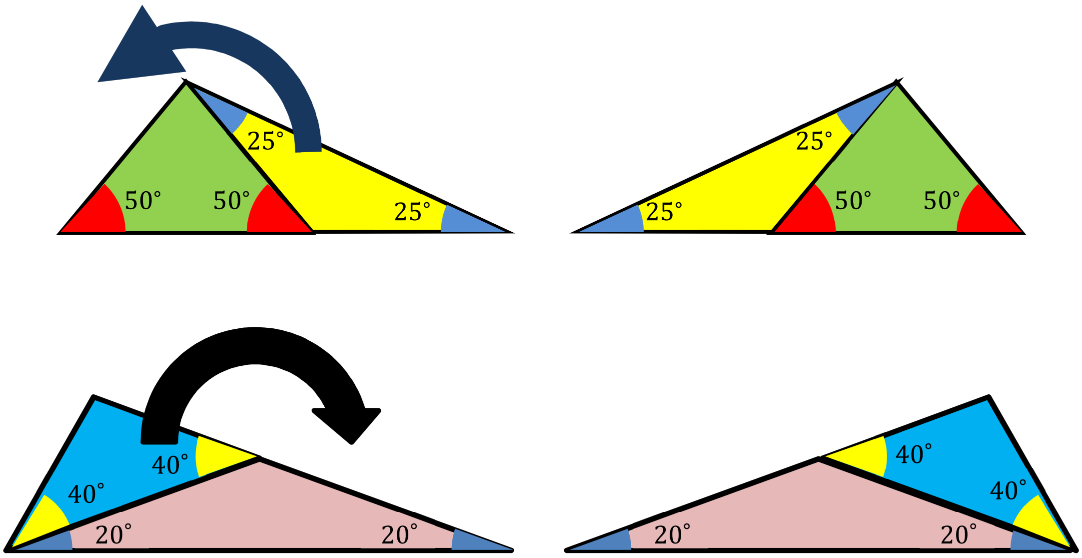
As pizzas são feitas por Aino e entregues em caixas feitas por Eino sob medida e que as acondicionam perfeitamente. Todavia, Eino às vezes erra, fazendo uma caixa que é congruente à pizza mas está invertida (ou seja, é uma versão espelhada da pizza):

Aino desenvolveu uma técnica para colocar a pizza na caixa sem virá-la de cabeça para baixo (afinal, não podemos arruinar a deliciosa cobertura de carne moída!). Ele corta a pizza em três pedaços, fazendo cortes a partir de um ponto que está à mesma distância dos três lados do triângulo (esse ponto é chamado *incentro* do triângulo):



Porém um dos clientes de Aino e Eino, o professor Piraldo, faz pedidos um pouco mais excêntricos. Ele pede que as pizzas venham em no máximo dois pedaços e especifica também os ângulos internos da pizza. Ele pediu, dessa vez, quatro pizzas: uma com ângulos internos de 25°, 50° e 105°; uma com ângulos internos 30°, 60° e 90°; uma com ângulos internos 20°, 60° e 100°; e uma com ângulos internos de 15°, 45° e 120°.

Infelizmente, Eino fez as caixas invertidas novamente (que azar!). Aino conseguiu cortar duas das pizzas em dois pedaços e encaixá-los:



Agora é a sua vez! Em ambos os itens a seguir, faça como nas figuras acima, marcando os ângulos nos pedaços de pizza e como girá-los.

a) Mostre como Aino deve cortar a pizza com ângulos internos 30°, 60° e 90° em dois pedaços para colocá-los na caixa.

b) Mostre como Aino deve cortar a pizza com ângulos internos 15°, 45° e 120° em dois pedaços para colocá-los na caixa.

PROBLEMA 4

O grande matemático John Horton Conway (já presente em outras OPMs) criou uma linguagem de programação baseada em sequências de números racionais positivos, a FRACTRAN. Vamos conhecê-la.

É dada uma sequência de racionais positivos. Em cada passo da execução de um programa FRACTRAN, a entrada é um inteiro positivo que deve ser multiplicado pelo primeiro número da sequência tal que o produto seja inteiro. Esse produto é a entrada do próximo passo.

Para o primeiro passo sempre se toma uma potência de 2, isto é, $N_1 = 2^n$, para n inteiro positivo. O programa termina quando obtemos novamente uma potência de 2. Dizemos que tal potência de 2 é a *saída* de nosso programa. Complicado? Um exemplo deve ajudar.

Considere a sequência $A = (f_1;\ f_2;\ f_3;\ f_4;\ f_5; f_6) = \left(\frac{52}{33}; \frac{44}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$. Para a entrada 2^3, os passos são:

$$N_1 = 2^3$$
$$N_2 = N_1 f_5 = 2^3 \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot 2^2$$
$$N_3 = N_2 f_5 = 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3^2 \cdot 2$$
$$N_4 = N_3 f_5 = 3^2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3^3$$
$$N_5 = N_4 f_6 = 3^3 \cdot 11$$
$$N_6 = N_5 f_1 = 3^3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$
$$N_7 = N_6 f_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot \frac{44}{39} = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$$
$$N_8 = N_7 f_1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^6 \cdot 13$$
$$N_9 = N_8 f_4 = 2^6 \cdot 13 \cdot \frac{1}{13} = 2^6$$

A saída é, portanto, 2^6. Para facilitar o entendimento do processo, os passos foram escritos explicitando-se as fatorações em primos das entradas.

Pode-se provar que, para a sequência A, se a entrada é 2^n, a saída é 2^{2n}.

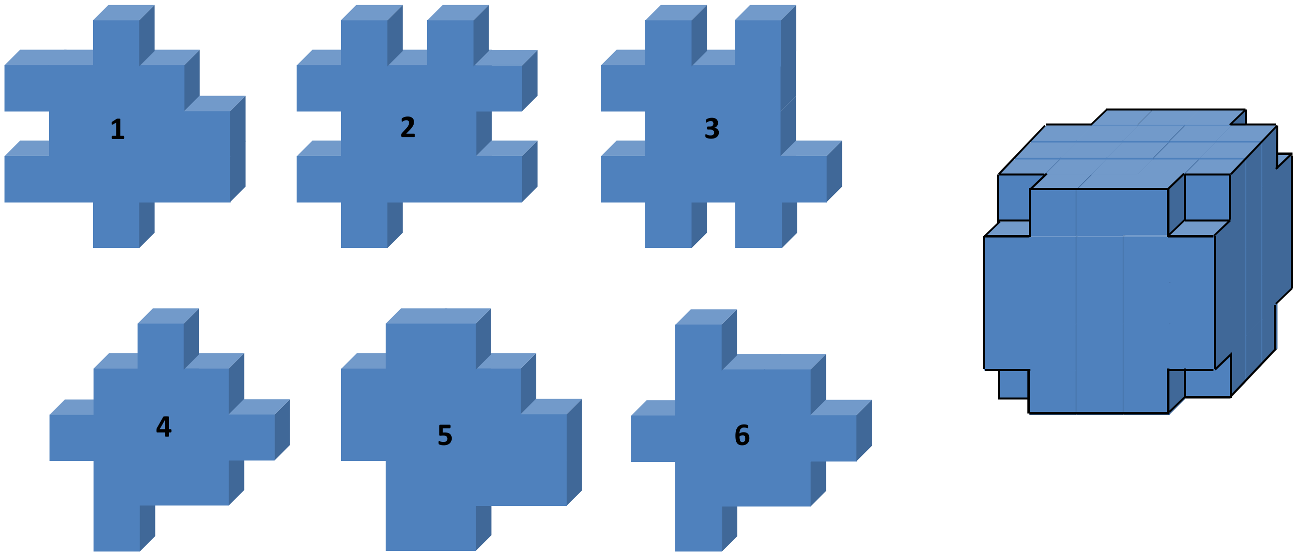
a) Considerando novamente a sequência A, escreva todos os passos para a entrada $N_1 = 2^2$. Sabemos que a saída é 2^4, mas você deve listar todos os passos intermediários.

b) Seja n inteiro positivo. Apresente uma sequência de racionais positivos B tal que, se a entrada é 2^n, a saída é 2^{3n+1}.

PROBLEMA 5

Esmeralda tem um quebra-cabeça formado por seis peças de espessura 1 as quais devem formar um sólido oco que corresponde a um cubo com aresta 5 menos os cubos unitários nos vértices.

A seguir mostramos as peças e o sólido montado (sem as divisões entre peças nem os números das peças). Os números devem ficar para o lado de fora do sólido e as peças podem ser giradas (observe que as peças 2 e 3 são iguais).



a) Quais são os pares de peças opostas, ou seja, que não se tocarão no cubo montado?

b) Desenhe as peças na planificação dada na folha de respostas, indicando como montar o cubo. Já marcamos uma peça para você.

XXXV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (5 de novembro de 2011)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Aino e Eino, exímios pizzaiolos residentes em Rovaniemi (terra do Papai Noel e capital da Lapônia, Finlândia), vieram para São Paulo, mais precisamente para a Cidade Universitária da USP.

Para se deslocarem até a USP, eles primeiramente foram de trem de Rovaniemi até Helsinki. A viagem é de 829 km e eles gastaram 75 euros cada um.

De Helsinki eles seguiram de avião até São Paulo, gastando 825 dólares cada um para percorrer o trajeto de 11299 km.

Do aeroporto internacional de São Paulo eles foram para a USP de táxi, e gastaram juntos 90 reais, percorrendo 43 km.

a) Desprezando as distâncias percorridas a pé, quantos quilômetros eles percorreram do momento em que saíram de Rovaniemi até quando chegaram na USP? (Seja grato aos esforços do Papai Noel para chegar à sua casa, no caso de você ter se comportado bem!)

b) Considerando que 1 euro vale 2,40 reais e que 1 dólar vale 1,72 real, quantos reais eles gastaram no total com transporte para ir de Rovaniemi até a USP?

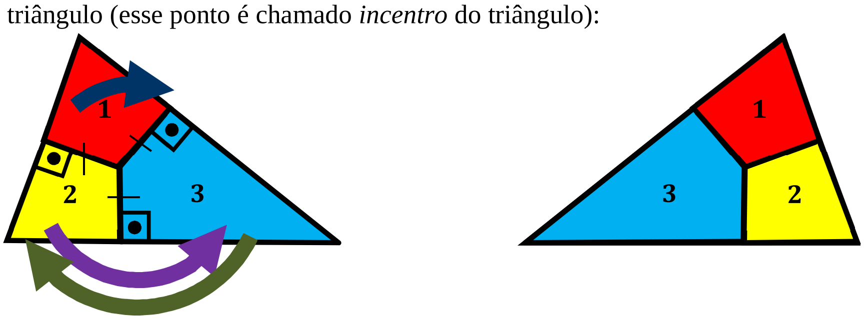
c) Agora é hora de Aino e Eino trabalharem. Eles vão preparar 568 pizzas tipicamente finlandesas, uma para cada um dos 568 participantes da fase final da OPM na USP. O custo com o preparo da pizza é 11,21 reais. Admitindo que para voltar para casa eles vão gastar com transporte o mesmo que gastaram para vir e supondo que todas as pizzas serão vendidas, qual é o preço mínimo da pizza para eles pagarem as duas viagens de ida, as duas viagens de volta e o custo de preparo?

PROBLEMA 2

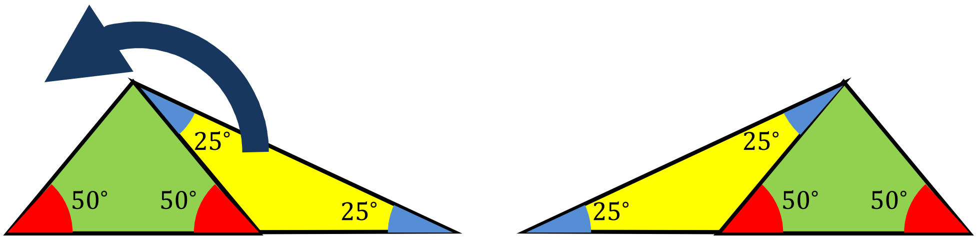
Aino e Eino, os primos finlandeses de Arnaldo e Bernaldo, abriram um restaurante especializado em *jauhelihapizza*, uma pizza de carne moída finlandesa. Aino e Eino fazem pizzas triangulares.

As pizzas são feitas por Aino e entregues em caixas feitas por Eino sob medida e que as acondicionam perfeitamente. Todavia, Eino às vezes erra, fazendo uma caixa que é congruente à pizza mas está invertida (ou seja, é uma versão espelhada da pizza):

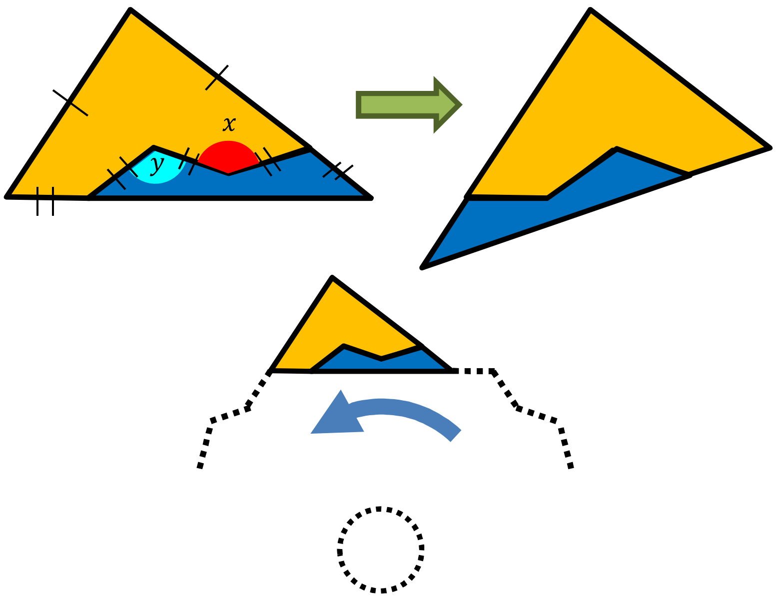
Aino desenvolveu uma técnica para colocar a pizza na caixa sem virá-la de cabeça para baixo (afinal, não podemos arruinar a deliciosa cobertura de carne moída!). Ele corta a pizza em três pedaços, fazendo cortes a partir de um ponto que está à mesma distância dos três lados do triângulo (esse ponto é chamado *incentro* do triângulo):



Porém um dos clientes de Aino e Eino, o professor Piraldo, faz pedidos um pouco mais excêntricos. Ele pede que as pizzas venham em no máximo dois pedaços e especifica também os ângulos internos da pizza. Ele pediu, dessa vez, três pizzas: uma com ângulos internos de 25°, 50° e 105°; uma com ângulos internos 30°, 60° e 90°; e uma com ângulos internos de 30°, 45° e 105°.
Infelizmente, Eino fez as caixas invertidas novamente (que azar!). Aino conseguiu cortar a primeira pizza em dois pedaços e encaixá-los:



Agora é a sua vez!
a) Mostre como Aino deve cortar a pizza com ângulos internos 30°, 60° e 90° em dois pedaços para colocá-los na caixa. Faça como na figura acima, marcando os ângulos nos pedaços de pizza e como girá-los.
b) A terceira pizza deu mais trabalho do que Aino esperava! Mas Aino conseguiu: fez um corte que lembra um pedaço de uma engrenagem. Determine os ângulos x e y marcados na figura.



PROBLEMA 3
Sempre que vamos ao banco ou à praia ou a um restaurante, é comum termos a impressão de que o lugar está lotado o tempo todo, mesmo que isso não seja verdade. Exploraremos tal fenômeno neste problema.
Uma escola tem N salas. Seja X_i o número de alunos na sala i, $1 \leq i \leq N$. Então o número médio $\bar{X}$ de alunos em uma sala selecionada ao acaso ("média de alunos por sala") é dado por

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$$

O *número esperado* X^* de alunos na sala frequentada por um aluno selecionado ao acaso é

$$X^* = p_1 \cdot X_1 + p_2 \cdot X_2 + \cdots + p_N \cdot X_N$$

em que p_i é a probabilidade de escolhermos um aluno que está na sala i, $1 \leq i \leq N$. Podemos dizer que o número esperado X^* mede a sensação que os alunos têm de o quanto a sala está cheia.
Sendo, então, $X_1 + X_2 + \cdots + X_N = M$, temos $p_i = \frac{X_i}{M}$ e

$$X^* = \frac{(X_1)^2 + (X_2)^2 + \cdots + (X_N)^2}{M}$$

Também podemos expressar a média de modo mais simples: $\bar{X} = \frac{M}{N}$.
Por exemplo, se temos $N = 3$ salas, com $X_1 = 24$, $X_2 = 6$ e $X_3 = 6$ alunos,

$$M = 24 + 6 + 6 = 36$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \frac{M}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

$$X^* = \frac{(X_1)^2 + (X_2)^2 + (X_3)^2}{M} = \frac{24^2 + 6^2 + 6^2}{36} = 18$$

a) Suponha que em uma escola haja seis salas: uma sala com 50 alunos e outras cinco salas com k alunos. Sendo $X^* = 42$, determine os possíveis valores de k e calcule $\bar{X}$ para cada um deles.
b) Encontre valores inteiros positivos para N e $X_1, X_2, \ldots, X_N$ de modo que $X^* \geq 10\bar{X}$. **Atenção**: Existem infinitos conjuntos de valores com tal propriedade; você só precisa exibir um.

PROBLEMA 4

No Egito Antigo, as frações eram expressas principalmente como somas de frações distintas com numerador igual a 1. Por isso, frações com numerador igual a 1 são chamadas *frações egípcias*. Por exemplo, eles utilizavam $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ no lugar de $\frac{8}{15}$ (mais precisamente, eles escreviam hieróglifos que representam $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$).

Os matemáticos questionaram se era possível representar todo número racional $\frac{p}{q}$, com $1 \le p < q$, como soma de frações egípcias distintas. A resposta é sim, e foi encontrada por Fibonacci (o mesmo da sequência!).

Para isso, pode-se utilizar o *algoritmo guloso*, que funciona da seguinte forma: subtraímos da fração $\frac{p}{q}$ a maior fração $\frac{1}{n}$ que é menor do que $\frac{p}{q}$ e depois continuamos o processo com a fração que sobrar. Por exemplo:

$$\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\left(\frac{4}{17}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}+\frac{3}{85}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{2}{2465}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{1}{1233}+\frac{1}{3039345}$$

a) Escreva $\frac{15}{19}$ como soma de frações egípcias distintas.

b) A cada passo do algoritmo guloso, determinamos a maior fração egípcia menor do que uma fração (não egípcia) $\frac{p}{q}$. Como $\frac{p}{q}=\frac{1}{\frac{q}{p}}$, devemos tomar como denominador o menor inteiro maior ou igual a $\frac{q}{p}$. Por exemplo, $\frac{4}{17}=\frac{1}{\frac{17}{4}}=\frac{1}{4{,}25}$ e devemos tomar 5 como denominador.

Considerando a função *teto de* x, denotada $\lceil x \rceil$, tal que $\lceil x \rceil = \textit{menor inteiro maior ou igual a } x$, a cada passo do algoritmo guloso tomamos a fração egípcia $\frac{1}{\left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil}$. Note que, no exemplo inicial, $\left\lceil \frac{17}{4} \right\rceil = \lceil 4{,}25 \rceil = 5$.

Sendo $q = pl + r$, $0 < r < p$, em que l é o quociente e r é o resto da divisão euclidiana de q e p, calcule $\left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil$ em função de l.

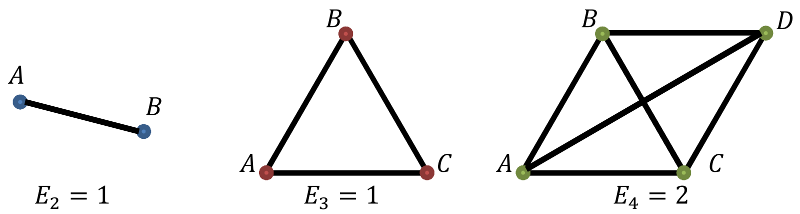
c) Mostre que, a cada passo do algoritmo guloso, o numerador da fração que sobra diminui e conclua que toda fração $\frac{p}{q}$ é a soma de, no máximo, p frações egípcias distintas.

PROBLEMA 5

Neste problema estudaremos um problema proposto por um dos maiores matemáticos do Século XX, Paul Erdös:

Qual é o número mínimo E_n de distâncias distintas determinadas por um conjunto de n pontos no plano?

Para $n = 2$ temos dois pontos, A e B, e uma única distância a considerar: AB. Logo $E_2 = 1$. Para $n = 3$, temos três pontos, A, B e C; o número mínimo de distâncias é atingido quando eles são os vértices de um triângulo equilátero ΔABC. Novamente temos apenas uma distância, ou seja, $E_3 = 1$. Para $n = 4$, temos quatro pontos, A, B, C e D. Considere dois triângulos equiláteros ΔABC e ΔBCD. Temos duas distâncias ($AB = AC = BC = BD = CD \neq AD$). Assim, $E_4 = 2$.

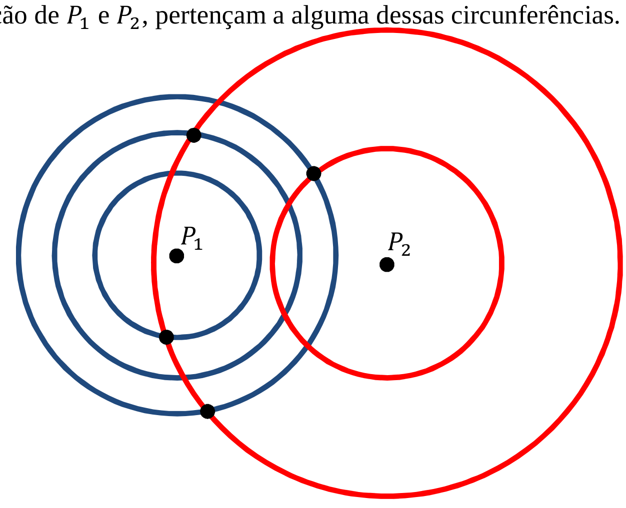


a) Para $n = 5$, o valor mínimo E_5 é obtido quando consideramos os vértices de um pentágono regular. Quanto é E_5?

b) Uma fórmula para tal número de distâncias tem-se mostrado fora de cogitação. Assim, provaremos que, para $n \ge 2$, $E_n \ge \sqrt{\frac{n-2}{2}}$.

Essa não é uma estimativa muito boa (observe o caso $n = 4$), mas dá uma ideia dos métodos utilizados para obter resultados mais próximos dos valores reais.

Seja S um conjunto de n pontos no plano, $n \ge 3$. Tome $P_1, P_2 \in S$. Desenhe circunferências concêntricas com centro em P_1 de modo que todos os pontos de S, com exceção de P_1 e P_2, pertençam a alguma dessas circunferências. Faça o mesmo para P_2.



Sejam s e t, respectivamente, o número de circunferências desenhadas com centros P_1 e P_2. Determine o número máximo de intersecções entre tais circunferências. Considere todas as intersecções, não apenas as que determinam pontos de S.

c) A partir do item anterior, mostre que $2st \ge n - 2$ e conclua que $E_n \ge \sqrt{\frac{n-2}{2}}$ para $n \ge 2$.

XXXV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (5 de novembro de 2011)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

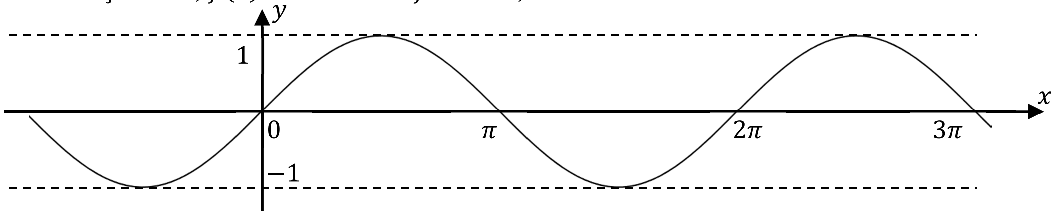
www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

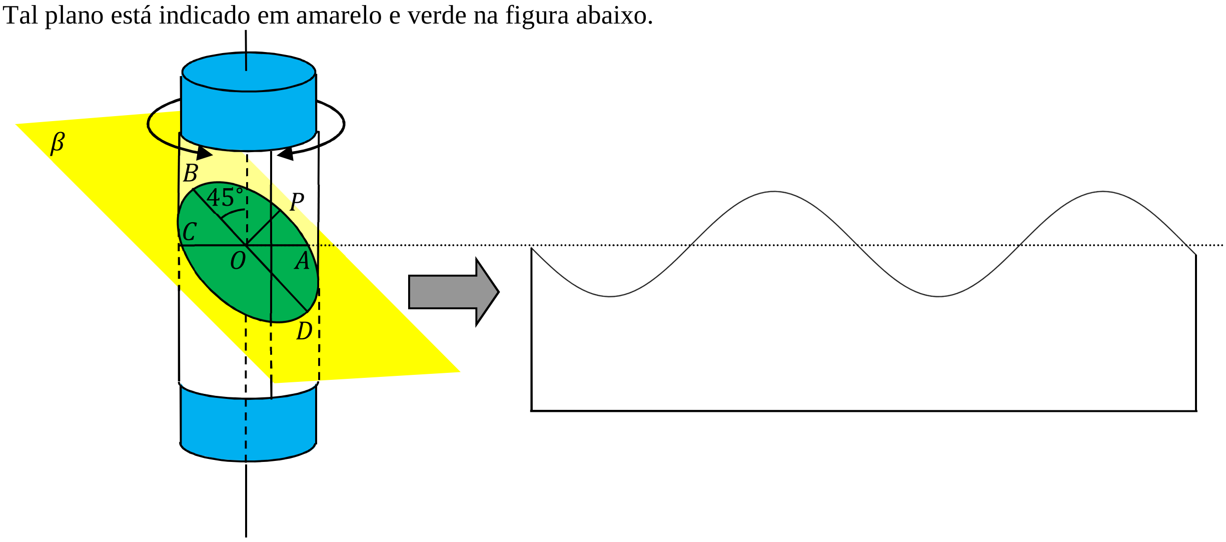
Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

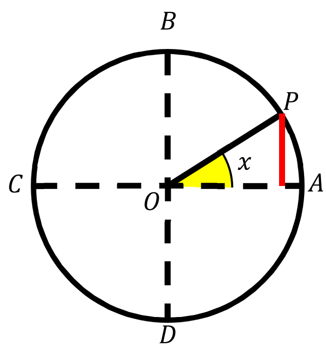
O formato do gráfico da função seno, $f(x) = \operatorname{sen} x$ com $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é conhecido como *senoide*.



Você pode obter uma senoide cortando um cilindro revestido de papel com um plano β que forma $45°$ com seu eixo e desenrolando o papel. Tal plano está indicado em amarelo e verde na figura abaixo.



Suponha que o raio do cilindro é 1. A figura a seguir mostra a vista superior do cilindro:



a) Seja α o plano perpendicular ao eixo do cilindro e que passa pelo centro da secção do plano no cilindro. Complete o desenho que aparece na Folha de Respostas da vista lateral do cilindro (ou seja, no plano perpendicular a AC que contém BD). No seu desenho, devem aparecer, além da projeção do plano α (que já desenhamos para vocês), as projeções de A, B, C, D, P e da secção do plano β no cilindro.

b) Mostre que a distância do ponto P ao plano α é $\operatorname{sen} x$, sendo que se $\operatorname{sen} x < 0$, então o ponto está abaixo de α. Ou seja, mostre que ao desenrolarmos o papel cortado do cilindro obteremos uma senoide.

PROBLEMA 2

Quando trabalhamos com matrizes, muitas vezes vale a pena cometer um pequeno "abuso de linguagem" e considerar, por exemplo, que uma matriz $2n \times 2n$ é formada por quatro matrizes $n \times n$. Assim, o produto de duas matrizes $2n \times 2n$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}$$

em que A, B, C, D, E, F, G e H são matrizes $n \times n$. Observe que as operações indicadas são entre matrizes (lembre que a multiplicação de matrizes não é comutativa!).

a) Seja $\mathbf{0}$ a matriz nula de ordem n (isto é, $n \times n$). É verdade que $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD - BC & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & AD - BC \end{bmatrix}$?

Caso seja verdade, demonstre a identidade; caso contrário, apresente um contraexemplo.

b) Determine a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} I & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$, na qual A e B são matrizes $n \times n$, $\mathbf{0}$ é a matriz nula de ordem n e I é a matriz identidade de ordem n. Ou seja, determine, em função de A e B, a matriz M^{-1} tal que $MM^{-1} = M^{-1}M = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$.

c) Determine a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dica: Nesse item, talvez você deseje utilizar a fórmula obtida em b. Acerte-o!

PROBLEMA 3

Veja só que moleza: apresentaremos o enunciado e a resolução de um desafio do excelente problemista Peter Winkler:

N formigas estão distribuídas ao longo de uma haste horizontal de 1 metro de comprimento. Cada formiga começa a caminhar para Leste ou Oeste com uma velocidade de $1\ \text{cm/s}$. Quando duas formigas se "chocam", elas trocam o sentido de sua caminhada, porém sem alterar o módulo da velocidade. Qual é o tempo máximo necessário para todas as formigas saírem da haste?

Resolução: Imagine que cada formiga carrega uma bandeira (!?!). Quando duas formigas se encontram, além de mudarem o sentido de sua caminhada, elas trocam as suas bandeiras. Assim, em todos os instantes cada formiga está carregando *alguma* bandeira e o sentido da velocidade das bandeiras nunca muda. Logo se, no início, havia uma formiga em uma das extremidades que caminhava em direção a outra, a bandeira que ela segurava inicialmente demorará 100 segundos para percorrer toda a extensão da haste. Esse é, portanto, o tempo máximo necessário para todas as formigas saírem da haste.

Claro que essa apresentação tem (boas) segundas intenções. Vocês irão resolver agora outro problema de Peter Winkler!

N formigas estão distribuídas ao longo de uma haste *circular* de 1 metro de comprimento. Cada formiga começa a caminhar no sentido horário ou anti-horário com uma velocidade de $1\ \text{cm/s}$. O sentido da caminhada de cada formiga é escolhido aleatoriamente com igual probabilidade. Quando duas formigas se "chocam", elas trocam o sentido de sua caminhada, porém sem alterar o módulo da velocidade. (Tudo muito parecido até agora, né? Mas não dá para as formigas saírem de uma haste circular!)

Resolução: Agora é a sua vez!

a) Considere uma formiga em particular que chamaremos *Alice*. Mostre que, após 100 segundos, se ela estiver em sua posição inicial, então todas as formigas estarão em suas posições iniciais.

b) Qual é, em função de N, a probabilidade de, após 100 segundos, Alice estar exatamente em sua posição inicial?

PROBLEMA 4

Denominamos "potência perfeita" todo número que pode ser escrito na forma a^b em que a e b são inteiros positivos, $a \geq 2$ e $b \geq 2$.

a) Determine o número de potências de 2 (isto é, números da forma 2^n com n inteiro positivo) menores ou iguais a 10^{100}. Você pode desejar utilizar que $\log_2 10 \cong 3{,}322$.

b) Justifique a afirmação a seguir:

"O número de potências perfeitas entre 1 e n é menor do que $\sqrt{n} \cdot \log_2 n$."

c) Sendo $PF(n)$ o número de potências perfeitas entre 1 e n, demonstre que existe N tal que $\frac{PF(N)}{N}$ é menor do que 10^{-100}. (Assim estamos mostrando que, em certo sentido, as potências perfeitas são "raras". Sinta-se mais feliz na próxima vez em que encontrar um 4!)

d) É possível que uma progressão aritmética crescente infinita seja composta apenas por potências perfeitas?

Lembre-se de que uma PA crescente infinita é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ cujo termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)r$, em que r é a razão da PA, $r > 0$.

PROBLEMA 5

O grande matemático John Horton Conway (já presente em outras OPMs) criou uma linguagem de programação baseada em sequências de números racionais positivos, a FRACTRAN. Vamos conhecê-la.

Seja $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ uma sequência de números racionais positivos. No k-ésimo passo da execução do nosso programa FRACTRAN a *entrada* é um inteiro positivo N_k que deve multiplicado pelo primeiro f_i tal que $N_k f_i$ é um número inteiro. Tal produto $N_k f_i$ é a entrada do próximo passo, ou seja, $N_{k+1} = N_k f_i$.

Para o primeiro passo sempre se toma uma potência de 2, isto é, $N_1 = 2^n$, para n inteiro positivo. O programa termina quando obtemos novamente uma potência de 2. Dizemos que tal potência de 2 é a *saída* de nosso programa. Complicado? Um exemplo deve ajudar.

Considere a sequência $A = (f_1;\ f_2;\ f_3;\ f_4;\ f_5; f_6) = \left(\frac{52}{33}; \frac{44}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$. Para a entrada 2^3, os passos são:

$$N_1 = 2^3$$
$$N_2 = N_1 f_5 = 2^3 \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot 2^2$$
$$N_3 = N_2 f_5 = 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3^2 \cdot 2$$
$$N_4 = N_3 f_5 = 3^2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3^3$$
$$N_5 = N_4 f_6 = 3^3 \cdot 11$$
$$N_6 = N_5 f_1 = 3^3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$
$$N_7 = N_6 f_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot \frac{44}{39} = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$$
$$N_8 = N_7 f_1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^6 \cdot 13$$
$$N_9 = N_8 f_4 = 2^6 \cdot 13 \cdot \frac{1}{13} = 2^6$$

A saída é, portanto, 2^6. Para facilitar o entendimento do processo, os passos foram escritos explicitando-se as fatorações em primos das entradas. Pode-se provar que, para a sequência A, se a entrada é 2^n, a saída é 2^{2n}.

Suponha que uma dada sequência S de racionais positivos fornece para as entradas $2^n, n$ inteiro positivo, saídas $2^{f(n)}$. Dizemos que a sequência *S computa* a função $f(n)$. A intenção dessa questão é ensinar as ideias básicas da programação em FRACTRAN. Você irá aprender a construir uma sequência que computa a função $f(n)$ que você desejar. (Assim esperamos!)

Primeiro escrevemos um programa, em uma linguagem que denominaremos pré-FRACTRAN, no qual cada linha tem a seguinte forma:

$$linha\ n\colon \frac{p_1}{q_1} \to n_1; \frac{p_2}{q_2} \to n_2; \dots; \frac{p_k}{q_k} \to n_k$$

Sendo que a ação a ser realizada na linha n é trocar o inteiro N por $\frac{p_i}{q_i}N$ para o primeiro i $(1 \le i \le k)$ para o qual tal resultado é inteiro e ir para a linha n_i . Como no FRACTRAN, a entrada é uma potência de 2 e o programa termina quando obtemos uma nova potência de 2. Por exemplo, considere o programa P1 a seguir:

$$linha\ 0\colon \frac{3}{2} \to 0; 1 \to 1$$
$$linha\ 1\colon \frac{2^2}{3} \to 1$$

Para a entrada 2^3, o programa P1 executa os seguintes passos:

$$2^3 \xrightarrow{linha\ 0} 2^2 \cdot 3 \xrightarrow{linha\ 0} 2 \cdot 3^2 \xrightarrow{linha\ 0} 3^3 \xrightarrow{linha\ 0} 3^3 \xrightarrow{linha\ 1} 2^2 \cdot 3^2 \xrightarrow{linha\ 1} 2^4 \cdot 3 \xrightarrow{linha\ 1} 2^6$$

(já viu esses passos hoje?) e termina.

Para chegarmos às frações propriamente ditas, excetuando-se a linha 0, tiramos as referências de uma linha à ela mesma. Por exemplo, a partir de P1 obtemos um novo programa P2:

$$linha\ 0\colon \frac{3}{2} \to 0; 1 \to 1$$
$$linha\ 1\colon \frac{2^2}{3} \to 2$$
$$linha\ 2\colon \frac{2^2}{3} \to 1$$

Agora falta pouco. Atribuímos a cada linha, exceto a 0, um número primo grande (maior do que qualquer um que tenha aparecido no numerador ou denominador de uma fração utilizada no programa pré-FRACTRAN original) e, então, a linha

$$P\colon \frac{a}{b} \to Q; \frac{c}{d} \to R; \frac{e}{f} \to S; \dots$$

em que P, Q, R e S são os tais primos grandes, corresponde às frações:

$$\frac{aQ}{bP}; \frac{cR}{dP}; \frac{eS}{fP}$$

nessa ordem. Assim, a nossa sequência $A = \left(\frac{52}{33}; \frac{44}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$ foi construída a partir do programa P1, utilizando as ideias mostradas (e algumas outras, que você terá de descobrir!).

a) Escreva um programa pré-FRACTRAN, nos moldes de P1, que dada a entrada 2^n tenha como saída 2^{n^2}.

b) Faça um programa em FRACTRAN que computa a função $f(n) = n^2$, ou seja, apresente uma sequência de racionais positivos F adequada.