XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (6 de novembro de 2010)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O que vale mais: toda a água potável do mundo ou todo o ouro do mundo? Estimaremos esses valores nos itens abaixo e daremos a *resposta OPM* para a pergunta.

a) Segundo a Wikipédia, há 1.360.000.000 km^3 ($1{,}36\cdot 10^9$ km^3) de água no mundo, sendo somente 3% potável. Quantos litros de água potável há no mundo?

b) De acordo com uma reportagem da revista Veja, estima-se que o total de ouro extraído em toda a história da humanidade preenche um cubo de aresta 20,4 m. Sabe-se ainda que as reservas não exploradas correspondem a 47.000 toneladas. Considerando que a densidade do ouro é 19,3 kg/l à temperatura de 25°C, ou seja, que cabem 19,3 kg de ouro num recipiente de volume 1 litro em um dia quentinho, determine a massa total, em toneladas, de ouro no planeta.

c) Suponha que um litro de água custe 1 real e um grama de ouro custe 80 reais. De acordo com esses dados, o que vale mais: toda a água potável do mundo ou todo o ouro do mundo? Não se esqueça de justificar a sua resposta.

PROBLEMA 2

Montar a tabela de um torneio em que todas as n equipes se enfrentam ao longo de $n - 1$ rodadas (como, por exemplo, em cada turno do Brasileirão) é um problema matemático bastante elaborado e que possui vários métodos de solução. Nesta questão vamos conhecer uma dessas abordagens (para conhecer outras, veja a prova do nível β depois do término da OPM).

Vamos considerar um torneio com 6 equipes. Associaremos os números 1, 2, 3, 4, 5 e ∞ (infinito) a cada uma das equipes. A primeira rodada do torneio é $1 \times \infty$, 2×5, 3×4. Para montarmos a rodada i somamos $i - 1$ a cada número envolvido nas partidas da rodada inicial, considerando que

- quando a soma ultrapassa 5, subtraímos 5 do resultado;
- ∞ adicionado a qualquer inteiro positivo é ∞.

Por exemplo, a segunda rodada será:

$$(1 + 1) \times (\infty + 1), \text{ isto é, } 2 \times \infty$$
$$(2 + 1) \times (5 + 1), \text{ isto é, } 3 \times 1$$
$$(3 + 1) \times (4 + 1), \text{ isto é, } 4 \times 5$$

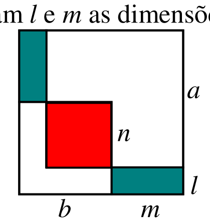
a) Determine as 3 rodadas restantes do torneio, seguindo o método descrito acima.

b) A partir do procedimento mostrado, exiba as sete rodadas de um torneio com 8 equipes.

PROBLEMA 3

Dizemos que (a, b, c) é uma *terna pitagórica* se a, b, c são inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se a e b são primos entre si, temos uma *terna pitagórica primitiva*.

a) Na figura a seguir quadrados de lados a e b estão no interior de um quadrado de lado c. Seja n a medida do lado do quadrado formado pela intersecção dos quadrados menores e sejam l e m as dimensões dos retângulos destacados.



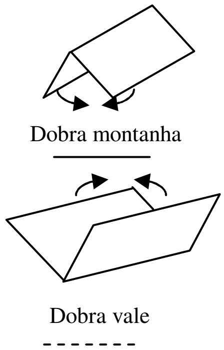
Mostre que (a, b, c) é uma terna pitagórica se, e somente se, $n^2 = 2lm$.

b) Determine as ternas pitagóricas que são obtidas tomando $n = 10$.

c) Exiba uma terna pitagórica primitiva com a e b maiores do que 2010.

PROBLEMA 4

As dobraduras são bastante conhecidas e praticadas no mundo todo, mas são especialmente populares no Japão. O físico japonês Jun Maekawa observou um resultado bastante interessante em dobraduras. Ao se desfazer uma dobradura, as marcas das dobras ficam salientes no papel, e os dois tipos de dobra, *montanha* e *vale*, ficam evidentes. Maekawa percebeu que a diferença entre as quantidades de dobras de cada tipo em cada vértice interior é 2.



Na figura abaixo, você pode observar a dobradura de um barquinho (figura 1) com as correspondentes marcas (figura 2) que ficam no papel ao desfazermos o barquinho.

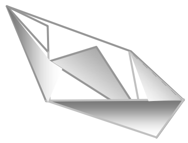


Figura 1

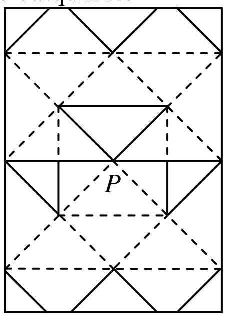
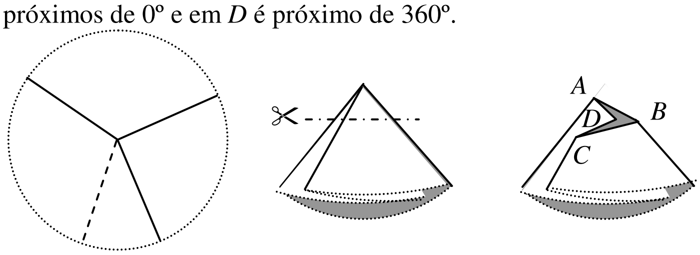


Figura 2

Se você observar cada vértice no interior da folha, vai notar que a afirmação de Maekawa é verdadeira. Por exemplo, no vértice P há 4 dobras do tipo montanha e 2 do tipo vale.

Vamos, então, mostrar o chamado *teorema de Maekawa*.

a) Ao fazermos um pequeno corte em torno de um vértice, obtemos um polígono, cujos ângulos internos podem ser próximos de 0º ou próximos de 360º. Na figura a seguir, obtém-se o polígono $ABCD$, cujos ângulos internos em A, B e C são próximos de 0º e em D é próximo de 360º.



Note que, na figura acima, ângulos próximos a 0º correspondem a dobras do tipo montanha e o ângulo próximo a 360º corresponde à dobra do tipo vale.

Se olharmos a mesma dobradura do outro lado do papel, qual é a correspondência entre os tipos de ângulo (0º e 360º) e os tipos de dobra (vale e montanha)?

b) Esboce o polígono obtido ao fazermos um pequeno corte em torno do vértice P da figura 2.

c) Mostre que, ao considerarmos as dobras em torno de um vértice interior, a quantidade de dobras do tipo montanha é igual à quantidade de dobras do tipo vale mais ou menos 2. Ou seja, sendo m a quantidade de dobras montanha e v a quantidade de dobras do tipo vale, temos $m - v = 2$ ou $v - m = 2$.

Você pode querer utilizar o fato de que a soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n - 2)\cdot 180º$.

PROBLEMA 5

"Sudokuto" é um jogo inspirado no Sudoku. Ele é jogado sobre tabuleiros quadriculados de diversos tamanhos. Vamos começar conhecendo a versão mais simples da brincadeira, a qual é jogada sobre um tabuleiro 3×3.

Alternadamente, dois jogadores colocam 1, 2 ou 3 em um quadradinho que ainda esteja vazio. Não podem aparecer em linhas (horizontais) ou em colunas (verticais) dois números iguais. Vence quem completar primeiro uma fileira horizontal ou vertical ou, caso nenhum movimento possa ser feito e nenhuma fileira estiver completa, vence quem fez a última jogada. Abaixo mostramos dois exemplos de partidas.

Os números menores indicam as jogadas. Por exemplo, na partida da esquerda, o 1º jogador colocou 1 na casa superior direita; em seguida, o 2º jogador colocou 1 no centro, e assim por diante.

	2_4	1_1
	1_2	2_5
3_3		

Não há jogadas possíveis; o 1º jogador vence

	1_1	
3_4		2_2
2_3	3_6	1_5

O 2º jogador vence na sexta jogada

a) Qual deve ser a próxima jogada do 1º jogador para que ele consiga completar uma fileira e vencer a partida a seguir, não importando quais sejam as jogadas do 2º jogador? Indique a jogada no diagrama da sua folha de respostas.

2		
	1	

b) Mostre que o 1º jogador possui uma estratégia vencedora para o tabuleiro 3×3. Ou seja, diga qual deve ser a sua jogada inicial e, a partir daí, mostre que ele consegue chegar à vitória, não importando quais sejam as jogadas do segundo jogador.

c) Vamos conhecer agora a versão sobre o tabuleiro 4×4.

Agora, os jogadores colocam, alternadamente, 1, 2, 3 ou 4 nos quadradinhos ainda vazios. Além de não poderem aparecer dois números iguais nas linhas e colunas, também não podem aparecer dois números iguais nas quatro regiões 2×2 destacadas. Vence quem completar primeiro uma fileira horizontal ou vertical ou região 2×2 ou, caso nenhum movimento possa ser feito e nenhuma fileira ou região esteja completa, vence quem fez a última jogada. Veja a reprodução da final do campeonato mundial, vencida por Sudokaldo.

	1_1	3_8	4_{11}
3_{10}	4_5		2_3
2_4		4_6	3_9
4_{12}	3_7	1_2	

Tendo como inspiração o grande mestre Sudokaldo, mostre que o 2º jogador possui uma estratégia vencedora para o tabuleiro 4×4.

Para mais Sudokuto, além de outros jogos e quebra-cabeças, visite http://www.menneske.no (não se assuste, o site tem versão em Inglês).

XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (6 de novembro de 2010)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O que vale mais: toda a água potável do mundo ou todo o ouro do mundo? Estimaremos esses valores nos itens abaixo e daremos a *resposta OPM* para a pergunta.

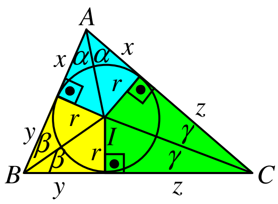
a) Segundo a Wikipédia, há 1.360.000.000 km^3 ($1{,}36\cdot 10^9$ km^3) de água no mundo, sendo somente 3% potável. Quantos litros de água potável há no mundo?

b) De acordo com uma reportagem da revista Veja, estima-se que o total de ouro extraído em toda a história da humanidade preenche um cubo de aresta 20,4 m. Sabe-se ainda que as reservas não exploradas correspondem a 47.000 toneladas. Considerando que a densidade do ouro é 19,3 kg/l à temperatura de 25^{o}C, ou seja, que cabem 19,3 kg de ouro num recipiente de volume 1 litro em um dia quentinho, determine a massa total, em toneladas, de ouro no planeta.

c) Suponha que um litro de água custe 1 real e um grama de ouro custe 80 reais. De acordo com esses dados, o que vale mais: toda a água potável do mundo ou todo o ouro do mundo? Não se esqueça de justificar a sua resposta.

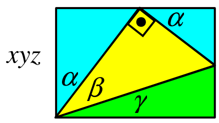
PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo e I o centro da sua circunferência inscrita. Traçando os raios que ligam I aos pontos de tangência, obtemos três pares de triângulos congruentes, T_a, com catetos r e x, T_b, com catetos r e y, e T_c, com catetos r e z.



a) Sendo $a = BC$, $b = CA$, $c = BC$ e $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro de ABC, mostre que $x = s - a$, $y = s - b$ e $z = s - c$.

b) O retângulo a seguir é a união de triângulos semelhantes aos triângulos T_a, T_b e T_c. A partir dele, prove que $xyz = r^2(x + y + z)$, ou seja, que $xyz = r^2s$.



c) Utilizando os resultados anteriores, demonstre a fórmula de Heron para o cálculo de áreas de triângulos, ou seja,

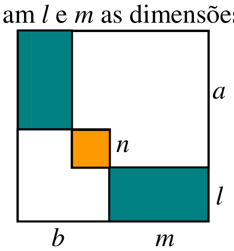
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

Você pode querer utilizar o fato de que $S = sr$.

PROBLEMA 3

Dizemos que (a, b, c) é uma *terna pitagórica* se a, b, c são inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Ou seja, a e b são os catetos e c é a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados inteiros. Se a e b são primos entre si, temos uma *terna pitagórica primitiva*. Nesta questão provaremos que existem infinitas ternas pitagóricas primitivas (É verdade! Nem todos os triângulos retângulos são semelhantes ao (3, 4, 5)! ☺).

a) Na figura a seguir quadrados de lados a e b estão no interior de um quadrado de lado c. Seja n a medida do lado do quadrado formado pela intersecção dos quadrados menores e sejam l e m as dimensões dos retângulos destacados.



Mostre que (a, b, c) é uma terna pitagórica se, e somente se, $n^2 = 2lm$.

b) Determine todas as ternas pitagóricas que são obtidas tomando $n = 2p$, p primo ímpar, na igualdade acima.

c) Considerando as ternas obtidas em b, prove que existem infinitas ternas pitagóricas primitivas.

PROBLEMA 4

As figuras a seguir são uma *prova sem palavras* de que $\sqrt{2}$ é irracional:

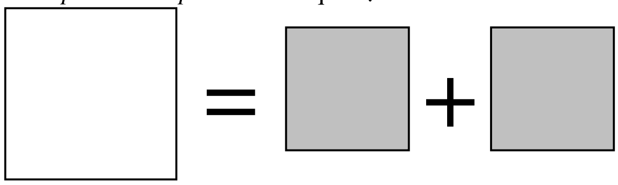


FIGURA 1

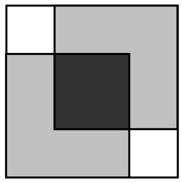


FIGURA 2

Vamos transformar essas figuras em uma prova com palavras ☺.

a) Na figura 1, sendo m o lado do quadrado maior e n o lado do quadrado menor, mostre que $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

b) Na figura 2, há um quadrado cinza escuro e dois quadrados brancos. Encontre, em termos de m e n, as medidas dos lados desses quadrados.

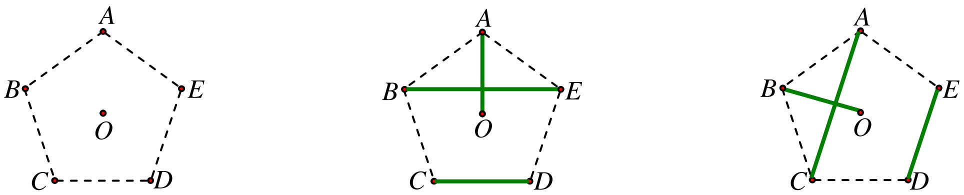
c) Baseado na prova sem palavras dada, demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

PROBLEMA 5

Montar a tabela de um torneio em que todas as n equipes se enfrentam ao longo de $n - 1$ rodadas (como, por exemplo, em cada turno do Brasileirão) é um problema matemático bastante elaborado e que possui vários métodos de solução. Nesta questão vamos conhecer duas dessas abordagens (para conhecer mais uma, veja a prova do nível α depois do término da OPM).

Considere os vértices do pentágono regular a seguir e o seu centro. Uma maneira de construir a tabela de um torneio com 6 equipes é a seguinte. Ligamos O ao vértice A e ligamos pares dos demais vértices de modo que as retas correspondentes sejam perpendiculares à reta OA. Uma rodada do torneio é então $O \times A$; $B \times E$ e $C \times D$.

Para determinar a próxima rodada, ligamos O ao vértice B e repetimos o procedimento de tomar as perpendiculares.

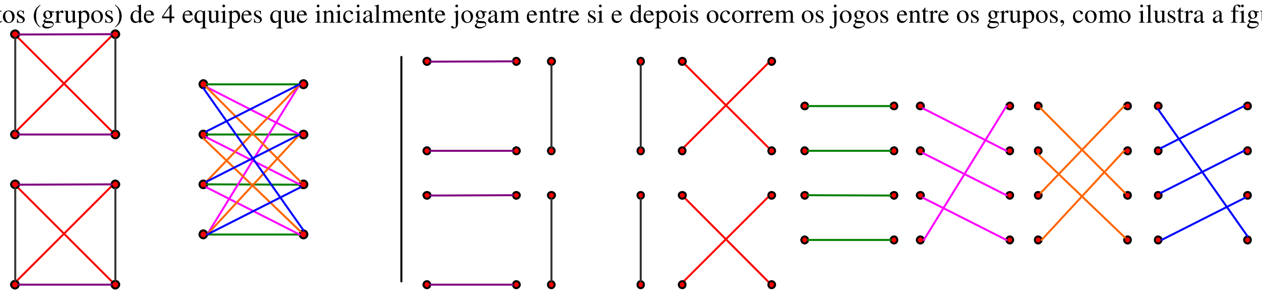


E assim por diante até termos completado as 5 rodadas. Um torneio obtido dessa maneira é denominado *"Torneio de Kirkman"*, pois tal método foi descoberto em 1846 por T. P. Kirkman.

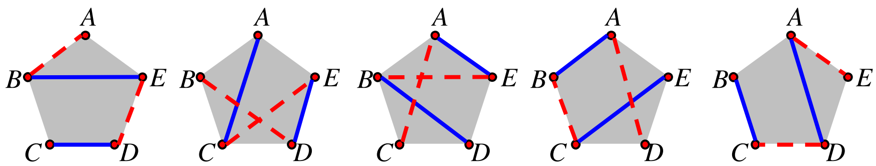
a) Determine as 5 rodadas de um torneio de Kirkman com 6 equipes (observe que já deixamos duas rodadas prontas para você).

b) Prove que ao aplicarmos o método acima para um torneio com 2010 equipes nenhum jogo irá se repetir ao longo das 2009 rodadas de 1005 jogos.

c) Existem outras maneiras de montar torneios. Por exemplo, para 8 equipes podemos imaginar que elas são divididas em dois conjuntos (grupos) de 4 equipes que inicialmente jogam entre si e depois ocorrem os jogos entre os grupos, como ilustra a figura.



Dizemos que dois torneios são *"equivalentes"* se podemos renomear os times de modo que os conjuntos de jogos coincidem. Exibimos a seguir dois torneios equivalentes com cinco equipes. Os jogos de um torneio estão em linha contínua azul e os de outro estão em linha tracejada vermelha. A tabela indica as correspondências entre equipes e rodadas.



Rodada 1 Rodada 2 Rodada 3 Rodada 4 Rodada 5

Azul	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	Rodada	1	2	3	4	5
Vermelho	*A*	*B*	*E*	*C*	*D*	Rodada	2	5	4	1	3

Por exemplo, a rodada 1 do torneio em azul é $B \times E$ e $C \times D$. Renomeando os times segundo a tabela, obtemos $B \times D$ e $E \times C$, que são os jogos da rodada 2 do torneio em vermelho.

Demonstre que o torneio de 8 equipes montado com a estratégia da divisão inicial em dois grupos não é equivalente a um torneio de Kirkman.

XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (6 de novembro de 2010)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Os celulares com tecnologia CDMA utilizam como princípio de funcionamento os *Códigos de Walsh*, que permitem que vários celulares utilizem a mesma banda de frequências ao mesmo tempo, sem interferências.

Por exemplo, para uma estação base se comunicar com dois celulares, digamos A e B, ela envia um bit de cada vez o qual pode ser interpretado por ambos, mas será válido para apenas um deles. Cada celular possui um *código* que é uma 2^k-upla cujos elementos são todos iguais a –1 ou 1. Cada bit de informação também é transmitido via uma 2^k-upla, chamada *vetor de informação*. No nosso caso, sejam (1,1) o código de A e (1, –1) o código de B. É então realizado o *produto escalar*, $(x, y)\otimes(w, z) = xw + yz$, entre o seu código e o vetor de informação que chegar. Assim, quando A recebe o vetor (a, b), onde a e b podem ser –1 ou 1, ele realiza a seguinte operação, cujo resultado será o bit recebido: $\frac{(1,1)\otimes(a,b)}{2} = \frac{1\cdot a + 1\cdot b}{2}$. Se $(a,b) = (1,1)$, o bit lido por A é $\frac{(1,1)\otimes(1,1)}{2} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 1}{2} = 1$ e B lê $\frac{(1,-1)\otimes(1,1)}{2} = \frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 1}{2} = 0$, o que não é um bit válido, isto é, esse bit deve ser apenas considerado pelo celular A. Evita-se dessa forma que ocorra interferência.

Outra característica importante desse sistema é que os vetores de informação podem ser sobrepostos. Novamente, vejamos um exemplo: o bit –1 corresponde ao vetor de informação (–1, –1) para o celular A (verifique!) e o bit 1 corresponde ao vetor de informação (1, –1) para o celular B (verifique!). Basta transmitirmos o vetor resultante $(-1,-1)+(1,-1) = (0,-2)$ e ambos celulares recebem os bits adequados (verifique!), como se a informação enviada para o outro celular não existisse. Tal propriedade é fruto dos códigos apresentados, (1, 1) e (1, –1), serem *ortogonais*, ou seja, o produto escalar dos dois é zero (pode confiar que garantimos que está certo!).

Conjuntos de 2^k-uplas cujas entradas são iguais a –1 ou 1 e são ortogonais duas a duas são denominados *Códigos de Walsh de ordem* 2^k. Tais conjuntos devem ainda ter exatamente 2^k elementos.

Para a resolução dos itens a seguir, observe que a definição generalizada de produto escalar é

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\otimes(y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \cdots + x_n\cdot y_n.$$

a) Uma estação base envia os seguintes vetores de informação para quatro celulares distintos X, Y, Z e W: (2,2,2,–2), (1,–1,–1,1), (1,–3,1,1), (1,–1,–1,–3). Preencha a tabela a seguir, em que indicamos os códigos de ordem 4. Determine, em cada instante, os bits recebidos por cada um deles. O produto escalar deve ser dividido por 4 nesse caso.

Código	bit 1	bit 2	bit 3	bit 4
X = (1, 1, 1, 1)				
Y = (1, –1, 1, –1)				
Z = (1, 1, –1, –1)				
W = (1, –1, –1, 1)				
Celulares que recebem bits válidos				

b) Uma maneira de construir códigos de Walsh é utilizar as linhas das *matrizes de Hadamard*, que são definidas da seguinte maneira:

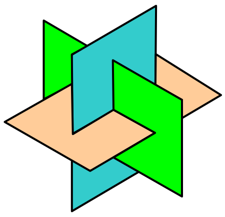
$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ H_{2^n} = \begin{bmatrix} H_{2^{n-1}} & H_{2^{n-1}} \\ H_{2^{n-1}} & -H_{2^{n-1}} \end{bmatrix}$$

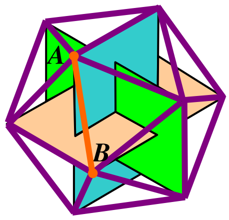
Assim, por exemplo, $H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, gerando o código de Walsh {(1, 1, 1, 1), (1, –1, 1, –1), (1, 1, –1, –1), (1, –1, –1, 1)}.

Exiba um código de Walsh de ordem 8.

PROBLEMA 2

Um *icosaedro* é um sólido convexo com 20 faces triangulares. É possível obter um icosaedro tomando-se três retângulos congruentes em três planos perpendiculares dois a dois e cujos centros coincidem:





Sejam $2a < 2b$ as dimensões de cada retângulo.

a) Calcule a medida, em função de a e b, da aresta AB.

b) Um icosaedro é *regular* quando todas as faces são triângulos equiláteros. Mostre que o icosaedro obtido é regular se, e somente se, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

PROBLEMA 3

Vamos mostrar um método para obter raiz quadrada de matrizes, ou seja, resolver a equação $X^2 = A$, onde A é uma matriz dada. Inicialmente, observe que para todo $\lambda \in R$,

$$X^2 = A \Leftrightarrow X^2 - \lambda^2 I = A - \lambda^2 I \Leftrightarrow (X - \lambda I)(X + \lambda I) = A - \lambda^2 I \Rightarrow \det(X - \lambda I) \cdot \det(X + \lambda I) = \det\left(A - \lambda^2 I\right),$$

sendo I a matriz identidade.

Temos que $\det(X - \lambda I)$ é um polinômio na variável λ, denominado *polinômio característico* da matriz X. Assim, escreveremos $\det(X - \lambda I) = p(\lambda)$. Utilizando essa nova notação, obtemos

$$X^2 = A \Rightarrow p(\lambda)p(-\lambda) = \det\left(A - \lambda^2 I\right).$$

A última equação nos permite encontrar todos os possíveis polinômios $p(\lambda)$ e como pelo teorema de Cayley-Hamilton (você estudou a OPM 2008?) $p(X) = 0$, podemos terminar de resolver a equação.

A título de exemplo, considere $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

O polinômio característico de X satisfaz:

$$p(\lambda)p(-\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & 1 \\ 0 & 4-\lambda^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow p(\lambda)p(-\lambda) = \left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda^2 - 4\right) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Obtemos, assim, as seguintes possibilidades:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \text{ ou } p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2) \text{ ou } p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2) \text{ ou } p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Se $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$,

$$X^2 - 3X + 2I = 0 \Leftrightarrow A - 3X + 2I = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}(A + 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2$:

$$X^2 + X - 2I = 0 \Leftrightarrow A + X - 2I = 0 \Leftrightarrow X = 2I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Os casos em que $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$ e $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ nos fornecem, como era de se esperar, as respostas $X = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $X = -\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pode-se verificar, substituindo, que as quatro matrizes são soluções da equação inicial.

Agora é a sua vez!

a) Resolva a equação $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Encontre uma (apenas uma!) raiz quadrada de $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -8 \\ 5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 4

Seu Aldo deseja que seu filho Bernaldo coma mais legumes. Como ele sabe que Bernaldinho adora jogos, ele propõe a seguinte brincadeira: eles tomarão n caixas numeradas e em $n - 1$ delas seu Aldo colocará saudáveis porções de alfaces, cenouras e brócolis; na caixa restante será colocada uma deliciosa fatia de rocambole de goiabada. Bernaldo deverá então escolher aleatoriamente uma caixa e comer o seu conteúdo.

Tendo boas noções de probabilidades, Bernaldo não aceitou a proposta de seu pai, mas propôs uma versão alternativa do jogo, que disse ter visto em um antigo programa da TV norte-americana (de um tal de Monty Hall):

- Inicialmente, Bernaldo deveria escolher uma caixa. Então seu Aldo tomaria os números das caixas restantes e que contêm legumes (há um monte delas!), sortearia uma e a abriria mostrando o seu conteúdo para Bernaldo e eliminando-a do sorteio.
- Bernaldo agora mudaria a caixa escolhida e seu pai repetiria o procedimento anterior: tomaria os números das caixas restantes e que contêm legumes, sortearia uma e a abriria mostrando o seu conteúdo para Bernaldo e eliminando-a do sorteio.
- E tal procedimento se repetiria: a cada rodada, Bernaldo forçosamente mudaria de caixa e seu pai eliminaria uma das que possuem legumes. Até que restassem apenas duas caixas. Nesse momento, Bernaldo mudaria pela última vez a caixa escolhida e teria que ficar com o seu conteúdo.

Seu Aldo, que também conhece probabilidades, argumentou que sua diminuía as chances de Bernaldo ter uma alimentação equilibrada, mas aceitou a proposta depois que Bernaldo disse que escovaria os dentes após a sua refeição.

Neste problema calcularemos a probabilidade a_n de Bernaldo comer a fatia de rocambole, sendo n o número de caixas no início do processo. Para o nosso cálculo, analisaremos também a probabilidade b_n de ele comer a fatia de rocambole dado que inicialmente escolheu uma caixa com legumes e c_n a probabilidade de ele comer a desejada fatia dado que escolheu inicialmente o próprio rocambole.

a) Mostre que $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)b_n + \left(\frac{1}{n}\right)c_n$.

b) Escreva uma fórmula que forneça b_n em termos de b_{n-1} e c_{n-1}.

c) Prove que $a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{n}\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right)$.

d) Dado que

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots,$$

demonstre que quando n cresce o valor de a_n aproxima-se de $1 - \frac{1}{e}$.

PROBLEMA 5

Um *diamante asteca de tamanho n* é um tabuleiro na forma de losango com pontas de duas casinhas e diagonais de $2n$ casinhas. Suas fileiras têm respectivamente 2, 4, 6, …, $2n - 2$, $2n$, $2n$, $2n - 2$, …, 6, 4, 2 casinhas.

Um problema clássico de Combinatória é determinar o número de coberturas de um diamante asteca de tamanho n com dominós 2×1 (isto é, que ocupam exatamente duas casinhas).

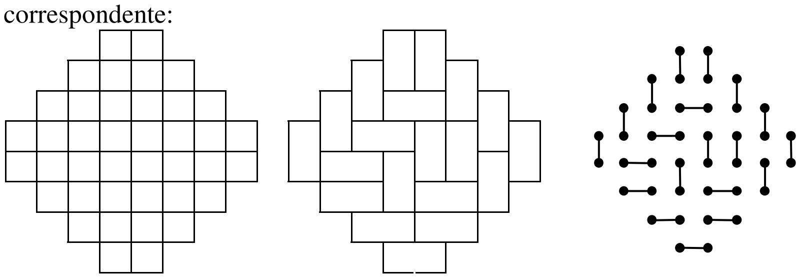
a) Seja $T(n)$ o número de maneiras de cobrir um diamante asteca de tamanho n com dominós. Pode-se mostrar (e faremos os passos principais nos itens b e c) que, para $n \geq 3$,

$$T(n)\cdot T(n-2) = 2\big(T(n-1)\big)^2 \quad (*)$$

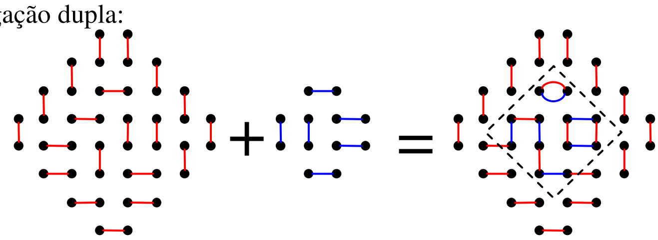
Considerando a recursão dada, determine $T(n)$.

b) Recentemente Eric H. Kuo publicou no *MIT Undergraduate Journal of Mathematics* uma nova demonstração de (*) utilizando uma técnica que ele denominou *sobreposição*. Neste problema, iremos apresentar alguns elementos essenciais da teoria criada por Eric.

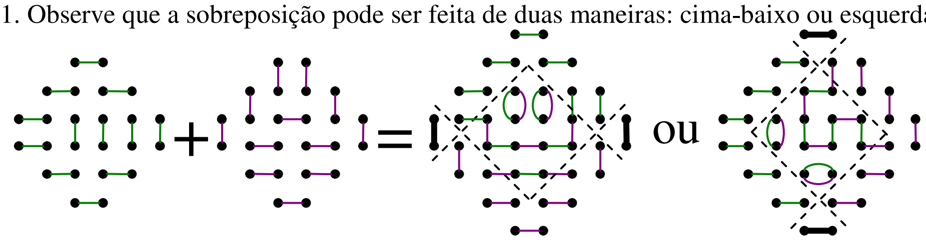
Inicialmente, vamos modelar os diamantes astecas trocando cada casinha por um ponto localizado em seu centro e ligando dois pontos quando um dominó cobre as casinhas correspondentes. Na figura a seguir, exibimos um diamante asteca de tamanho $n = 4$, uma cobertura e o modelo correspondente:



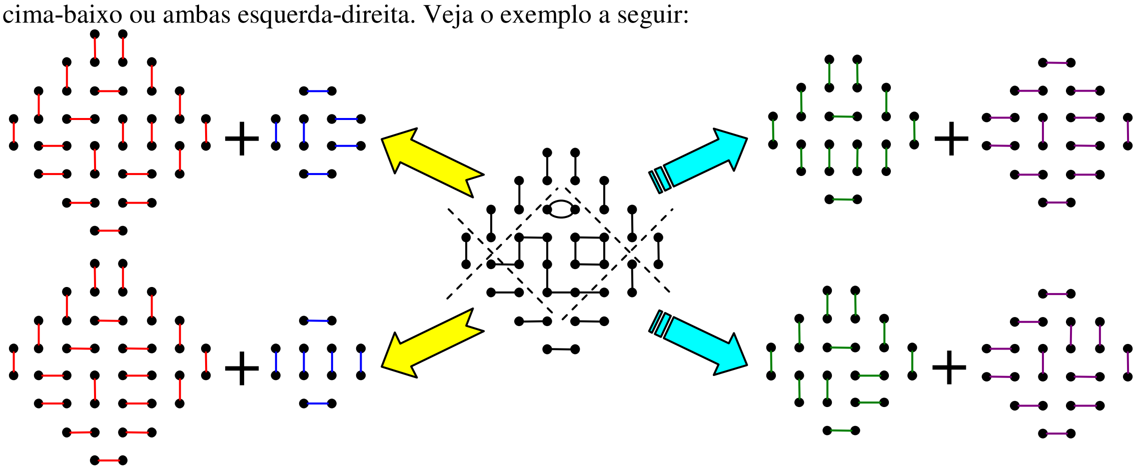
Vamos sobrepor uma cobertura de um diamante asteca de tamanho n com outra de tamanho $n - 2$. Com isso, formam-se alguns caminhos e ciclos (caminhos fechados) entre os pontos, além de possíveis ligações duplas. Por exemplo, na configuração da direita há um caminho, um ciclo e uma ligação dupla:



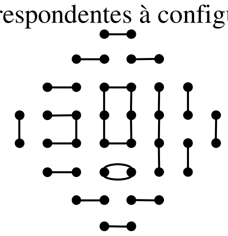
Uma configuração do mesmo tipo pode ser obtida sobrepondo duas coberturas (não necessariamente distintas) de um diamante asteca de tamanho $n - 1$. Observe que a sobreposição pode ser feita de duas maneiras: cima-baixo ou esquerda-direita.



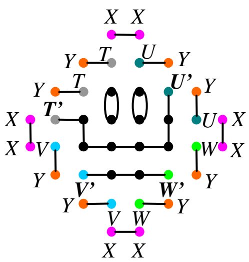
Uma grande ideia de Eric foi observar que cada configuração pode ser obtida a partir da mesma quantidade de sobreposições de coberturas de diamantes astecas de tamanhos n e $n - 2$ e sobreposições de pares de coberturas de diamantes astecas de tamanho $n - 1$, ambas cima-baixo ou ambas esquerda-direita. Veja o exemplo a seguir:



Agora é a sua vez! Obtenha todas as sobreposições correspondentes à configuração a seguir.



c) A demonstração do fato observado por Eric envolve a consideração de alguns casos. Para podermos listá-los, rotulamos os vértices *T*, *U*, *V*, *W*, *X* e *Y*, de acordo com a sua posição. Note que, dos vértices rotulados, exatamente quatro vértices, *T'*, *U'*, *V'* e *W'*, não estão ligados a vértices do tipo *Y*.



Mostre que, caso *T'* não esteja ligado diretamente a algum *X*, o caminho iniciado em *T'* termina em *U'* ou *V'* e tem um número ímpar de segmentos. Por exemplo, na figura acima, *T'* está ligado a *U'* por um caminho com 7 segmentos.
Diga, em cada um dos casos, qual é tipo de sobreposição de coberturas de diamantes astecas $n - 1$ correspondente (cima-baixo ou esquerda-direita).

XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (6 de novembro de 2010)

Níveis α e β

www.opm.mat.br

Esclarecimento sobre o enunciado

PROBLEMA 3 - ***Níveis α e β***

Utilizando a figura dada, os valores de a, b e c podem ser obtidos a partir de n, l e m. Por exemplo, tomando $n = 6$, obtemos $n^2 = 36$ e $2lm = 36 \Leftrightarrow lm = 18$ com as seguintes possibilidades:

n	m	l	a	b	c
6	18	1	24	7	25
6	9	2	15	8	17
6	6	3	12	9	15
6	3	6	9	12	15
6	2	9	8	15	17
6	1	18	7	24	25

Ou seja, as ternas obtidas são (24, 7, 25), (15, 8, 17), (12, 9, 15), (9, 12, 15), (8, 15, 17) e (7, 24, 25).

.