XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (14 de agosto de 2010)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Segundo uma pesquisa, os preços de certos medicamentos variam muito entre as farmácias. Veja alguns exemplos:

	Droga Alfa	Farma Beta	Rede Gama
Medicamento A	R$36,27	R$23,25	R$27,02
Medicamento B	R$9,78	R$8,15	R$9,72
Medicamento C	R$2,36	R$2,40	R$2,95
Medicamento D	R$33,66	R$28,68	R$25,50

Como as três farmácias são muito próximas, visitar cada uma delas e pesquisar os preços não gera custos adicionais relevantes.

a) Arnaldo quer comprar os 4 medicamentos na mesma farmácia. Nesse caso, em qual delas ele gastará menos?

b) Bernaldo passará pelas três farmácias e comprará cada medicamento onde o preço for o menor. Nesse caso, quanto ele gastará na compra dos 4 medicamentos?

c) Qual dos remédios possui a maior diferença percentual entre o seu preço mais baixo e o seu preço mais alto? Diferença percentual é o aumento percentual aplicado ao menor valor para se obter o maior valor.

PROBLEMA 2

A *Esponja de Menger* é um fractal de dimensão aproximadamente 2,73 (sim, existem objetos de dimensões fracionárias!), descrito pela primeira vez em 1926 pelo matemático austríaco Karl Menger.

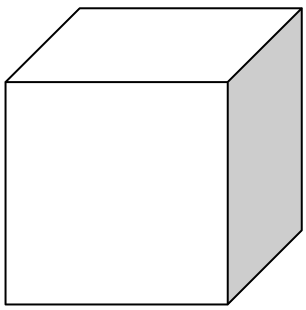


Figura 1

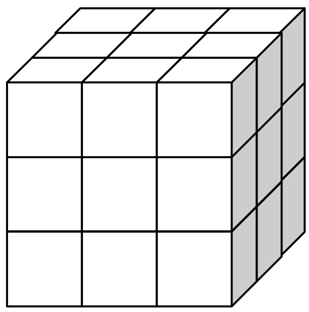


Figura 2

Esponja de Menger de ordem 1

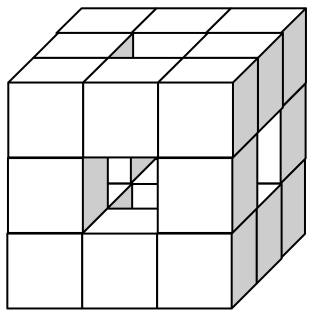


Figura 3

Os passos para a construção de uma esponja de Menger são os seguintes:

i) Comece com um cubo (Figura 1);

ii) Divida cada face do cubo em 9 quadrados, dividindo assim o cubo em 27 cubinhos (Figura 2);

iii) Remova o cubinho do centro de cada face e também o cubinho central, ficando agora 20 cubinhos na estrutura (Figura 3). Esta é uma Esponja de Menger de ordem 1;

Para obter as ordens seguintes das Esponjas de Menger, basta repetir o procedimento em cada um dos cubinhos da última esponja obtida.

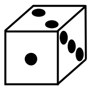
a) A aplicação do procedimento na esponja de ordem 1 produz a esponja de ordem 2. Quantos cubinhos há na esponja de ordem 2?

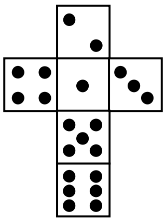
b) Na França, o professor Michael Lucas coordenou a construção de uma escultura com bilhetes de ônibus e metrô para representar a Esponja de Menger de ordem 3.

Foram utilizados 66048 bilhetes para produzir a escultura. Ela ficou exposta na cidade de Nantes, onde foram instaladas urnas para recolher os bilhetes para a sua criação. Depois da prova, visite o site www.defi66000.fr e veja fotos e detalhes do projeto. Mas antes, responda: quantos bilhetes há, em média, em cada cubinho da escultura?

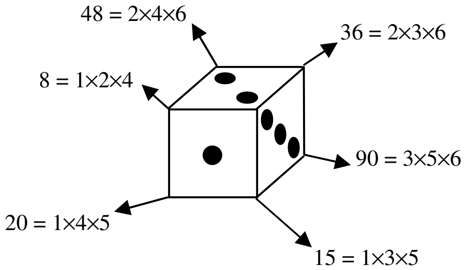
PROBLEMA 3

Num dado convencional, a soma das faces opostas é sempre 7.





a) Vamos associar a cada vértice o produto dos números das três faces conectadas a ele, como mostrado a seguir.

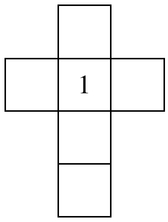


Não foram escritos dois produtos associados a dois dos vértices. Quais são esses produtos e quais são os números multiplicados para obtê-los?

b) Mr. Dice, matemágico, mudou a posição dos números das faces e obteve os seguintes produtos associados aos vértices: 6, 10, 12, 20, 36, 60, 72 e 120.

Descubra o dado criado por Mr. Dice: preencha as faces em branco do dado planificado com os números 2, 3, 4, 5 e 6 (é mais fácil do que desenhar bolinhas!). O 1 já foi colocado para facilitar o seu trabalho (e a nossa correção!).

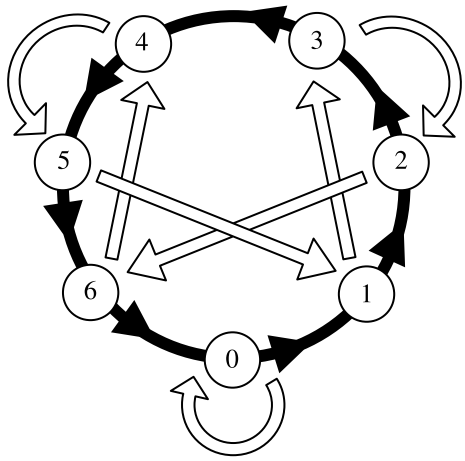
Atenção: a soma dos pontos nas faces opostas não é mais necessariamente igual a 7.



PROBLEMA 4

Neste problema vamos mostrar uma forma de calcular o resto da divisão de um número inteiro positivo por 7. Considere a figura ao lado, com os restos que um número inteiro pode deixar na divisão euclidiana por 7 e algumas flechinhas pretas ou brancas entre eles.

Para descobrir o resto da divisão de um número qualquer n por 7, fazemos o seguinte: partimos do zero e seguimos o caminho indicado por x_1 flechas pretas, sendo x_1 o algarismo mais à esquerda de n. Seguimos por uma flecha branca e então seguimos o caminho indicado por x_2 flechas pretas, sendo x_2 o segundo algarismo mais à esquerda de n. Seguimos por uma flecha branca e então seguimos o caminho indicado por x_3 flechas pretas, sendo x_3 o terceiro algarismo mais à esquerda de n e assim por diante até seguir a quantidade de flechas pretas indicada pelo algarismo das unidades de n e terminar em algum dos restos de 0 a 6. O número no qual terminarmos é o resto da divisão de n por 7.



Por exemplo, para $n = 3401$:

- Partimos do 0 e seguimos por 3 flechas pretas, chegando em 3.
- Seguimos uma flecha branca para 2 e, então, seguimos por 4 flechas pretas, chegando em 6.
- Seguimos uma flecha branca para 4 e, então, seguimos por 0 flecha preta (ou seja, ficamos na mesma posição), continuando em 4.
- Seguimos uma flecha branca para 5 e, então, seguimos por 1 flecha preta, chegando em 6.
- Podemos concluir que 6 é o resto da divisão de 3401 por 7.

a) Encontre, segundo a regra descrita, o resto da divisão de 4288 por 7. Seguindo o modelo acima, descreva os passos para obtenção do resto.

b) Encontre, segundo a regra descrita, o resto da divisão de 10^{2010} por 7. Não é necessário descrever todos os 2011 passos ☺, mas não se esqueça de justificar a sua resposta.

PROBLEMA 5

Ao preencher uma ficha de cadastro em um site, Esmeraldinho trocou a dezena com a unidade do ano de seu nascimento. No site ficou registrado que Esmeraldinho tem 51 anos.

Ele percebeu imediatamente que invertendo esse número chegava à sua idade correta, 15 anos. E ficou pensando se aquilo era uma coincidência ou se, sempre que alguém comete o mesmo erro, basta inverter as casas decimais para obter a idade correta.

Nesse problema vamos ajudar Esmeraldinho a satisfazer a sua curiosidade.

Suponha que o ano de nascimento de uma pessoa seja $19AB$ (ou seja, $1900 + 10A + B$) e que ela tenha CD anos completados em 2010 (ou seja, $10C + D$).

a) Mostre que $110 = 10(A + C) + (B + D)$.

b) Conclua que caso ela tenha cometido o mesmo erro de Esmeraldinho (trocar dezena com unidade do ano de seu nascimento) e a idade obtida for menor do que 100 anos, então basta inverter as casas decimais para obter a sua idade correta.

XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (14 de agosto de 2010)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

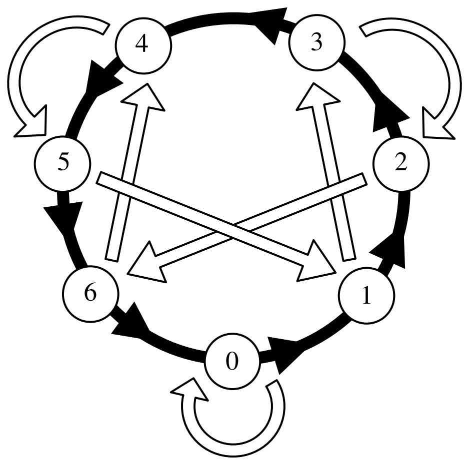
Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1
Segundo uma pesquisa, os preços de certos medicamentos variam muito entre as farmácias. Veja alguns exemplos:

	Droga Alfa	**Farma Beta**	**Rede Gama**
Medicamento A	R$36,27	R$23,25	R$27,02
Medicamento B	R$9,78	R$8,15	R$9,72
Medicamento C	R$2,36	R$2,40	R$2,95
Medicamento D	R$33,66	R$28,68	R$25,50

Como as três farmácias são muito próximas, visitar cada uma delas e pesquisar os preços não gera custos adicionais relevantes.
a) Arnaldo quer comprar os 4 medicamentos na mesma farmácia. Nesse caso, em qual delas ele gastará menos?
b) Bernaldo passará pelas três farmácias e comprará cada medicamento onde o preço for o menor. Nesse caso, quanto ele gastará na compra dos 4 medicamentos?
c) Qual dos remédios possui a maior diferença percentual entre o seu preço mais baixo e o seu preço mais alto? Diferença percentual é o aumento percentual aplicado ao menor valor para se obter o maior valor.

PROBLEMA 2
Neste problema vamos mostrar uma forma de calcular o resto da divisão de um número inteiro positivo por 7. Considere a figura ao lado, com os restos que um número inteiro pode deixar na divisão euclidiana por 7 e algumas flechinhas pretas ou brancas entre eles.
Para descobrir o resto da divisão de um número qualquer n por 7, fazemos o seguinte: partimos do zero e seguimos o caminho indicado por x_1 flechas pretas, sendo x_1 o algarismo mais à esquerda de n. Seguimos por uma flecha branca e então seguimos o caminho indicado por x_2 flechas pretas, sendo x_2 o segundo algarismo mais à esquerda de n. Seguimos por uma flecha branca e então seguimos o caminho indicado por x_3 flechas pretas, sendo x_3 o terceiro algarismo mais à esquerda de n e assim por diante até seguir a quantidade de flechas pretas indicada pelo algarismo das unidades de n e terminar em algum dos restos de 0 a 6. O número no qual terminarmos é o resto da divisão de n por 7.



Por exemplo, para $n = 3401$:
- Partimos do 0 e seguimos por 3 flechas pretas, chegando em 3.
- Seguimos uma flecha branca para 2 e, então, seguimos por 4 flechas pretas, chegando em 6.
- Seguimos uma flecha branca para 4 e, então, seguimos por 0 flecha preta (ou seja, ficamos na mesma posição), continuando em 4.
- Seguimos uma flecha branca para 5 e, então, seguimos por 1 flecha preta, chegando em 6.
- Podemos concluir que 6 é o resto da divisão de 3401 por 7.

a) Encontre, segundo a regra descrita, o resto da divisão de 4288 por 7. Seguindo o modelo acima, descreva os passos para obtenção do resto.
b) Encontre, segundo a regra descrita, o resto da divisão de 10^{2010} por 7. Não é necessário descrever todos os 2011 passos ☺, mas não se esqueça de justificar a sua resposta.

PROBLEMA 3

O *método chakravala* foi desenvolvido na Índia para, por exemplo, encontrar soluções inteiras positivas (x, y) da famosa *equação de Pell* $x^2 - Ny^2 = 1$, com N um inteiro positivo que não seja quadrado perfeito. Ele segue os seguintes passos:

- Tome x tal que x^2 seja o menor quadrado perfeito maior que N e $y = 1$.
- Teremos, então, uma terna (x, y, k) para a qual $x^2 - Ny^2 = k$. Se $k = 1$, encontramos os valores desejados de x e y. Caso contrário, consideramos a terna $\left(\frac{xm+yN}{k}, \frac{x+ym}{k}, \frac{m^2-N}{k}\right)$ tomando m inteiro não negativo tal que $x + ym$ seja múltiplo de k e $\frac{m^2-N}{k}$ seja o mais próximo possível de zero.
- Caso $\frac{m^2-N}{k} = 1$, encontramos os valores desejados de x e y. Caso contrário, repetimos o passo anterior.

Por exemplo, para a equação $x^2 - 11y^2 = 1$:

- Começamos com $x = 4$, $y = 1$ e $k = 5$. Ou seja, a terna inicial é $(4, 1, 5)$.
- Devemos agora encontrar m com $\frac{4+m}{5}$ inteiro e $\frac{m^2-11}{5}$ o mais próximo possível de zero. Tomamos $m = 1$, obtendo $3^2 - 11 \cdot 1^2 = -2$, isto é, a terna $\left(\frac{4m+11}{5}, \frac{4+m}{5}, \frac{m^2-11}{5}\right) = (3, 1, -2)$.
- Agora, procuramos m com $\frac{3+m}{-2}$ inteiro e $\frac{m^2-11}{-2}$ o mais próximo possível de zero. Usamos $m = 3$, obtendo $10^2 - 11 \cdot 3^2 = 1$. E uma solução para $x^2 - 11y^2 = 1$ é $x = 10$ e $y = 3$.

a) Demonstre que, se $x^2 - Ny^2 = k$, então $\left(\frac{xm+yN}{k}\right)^2 - N\left(\frac{x+ym}{k}\right)^2 = \frac{m^2-N}{k}$, para qualquer m inteiro.

b) Vamos agora encontrar uma solução (x, y) de $x^2 - 19y^2 = 1$. A terna inicial está escrita na tabela ao lado, com os valores de m que devem ser usados a cada passo. Por exemplo, com a terna inicial e $m = 1$, na linha seguinte, obtemos uma nova terna $(4, 1, -3)$. Complete a tabela até encontrar uma solução da equação $x^2 - 19y^2 = 1$.

m	***x***	***y***	***k***
—	5	1	6
1	4	1	–3
5			
5			

PROBLEMA 4

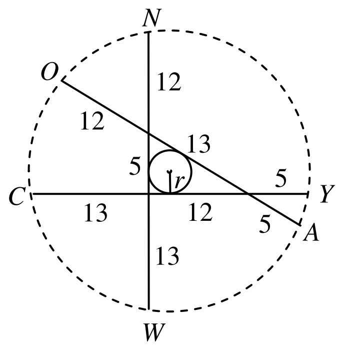
A bissetriz de um ângulo é o conjunto de pontos equidistantes dos segmentos que formam o ângulo. A partir dessa definição pode-se demonstrar que as bissetrizes dos ângulos de um triângulo concorrem em um único ponto chamado *incentro* que é equidistante dos lados do triângulo. Tal distância comum r é denominada *inraio*, pois é possível construir uma circunferência, o *incírculo*, centrada no incentro e com raio r a qual toca os lados do triângulo.

Nesse problema considere o triângulo retângulo de lados 5, 12 e 13.

a) Prove que a área do triângulo é $15r$.

b) Calcule r.

c) Prolongando os lados do triângulo, como mostra a figura, obtemos seis pontos C, O, N, W, A e Y. Prove que esses seis pontos estão sobre uma circunferência centrada no incentro do triângulo original e calcule o raio dessa circunferência.



PROBLEMA 5

Ao resolver uma equação do segundo grau, você obtém também uma fatoração. De fato, se x_1 e x_2 são as raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, então obtemos a fatoração $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Por exemplo, como as raízes da equação $2x^2 - 7x + 6 = 0$ são $3/2$ e 2, temos $2x^2 - 7x + 6 = 2(x - 3/2)(x - 2)$.

Isso pode ser útil para fatorar expressões de graus maiores: por exemplo, podemos observar a expressão $x^3 - 10x^2 - 10x + 100$ como um caso particular da expressão $y^2 - y(x^2 + x) + x^3$, que é do segundo grau em y. A equação $y^2 - (x^2 + x)y + x^3 = 0$ tem raízes $y = x$ e $y = x^2$ (verifique!); ou seja, $y^2 - y(x^2 + x) + x^3 = (y - x)(y - x^2)$ e, portanto, $x^3 - 10(x^2 + x) + 100 = (10 - x)(10 - x^2)$.

a) Ao elevar os dois membros da equação $\sqrt{7-x} = 7 - x^2$ ao quadrado, obtemos uma equação da forma

$$7^2 + b \cdot 7 + c = 0 \quad (*),$$

em que b e c dependem de x. Encontre b e c.

b) Você pode encarar a equação (*) como do segundo grau na "variável" 7. Usando essa ideia, resolva a equação

$$\sqrt{7-x} = 7 - x^2.$$

XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (14 de agosto de 2010)

Nível γ(1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

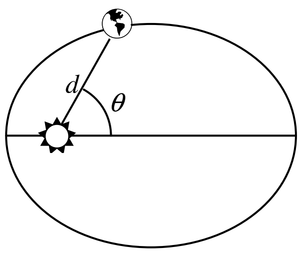
www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A distância *d* do Sol a um corpo celeste que gira em torno dele, como o planeta Terra, pode ser dada por $d = \dfrac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$, onde *a* é a distância média, em unidades astronômicas, *e* é uma constante chamada *excentricidade*, e θ é um ângulo entre 0 e 360º (veja a figura a seguir). As constantes *a* e *e* são fornecidas na tabela para cada planeta e também para Plutão.



	a	*e*
Mercúrio	0,39	0,206
Vênus	0,78	0,007
Terra	1,00	0,017
Marte	1,52	0,093
Júpiter	5,20	0,048
Saturno	9,54	0,056
Urano	19,20	0,047
Netuno	30,10	0,009
Plutão	39,40	0,249

Plutão está sempre mais distante do Sol do que Netuno?

PROBLEMA 2

Nesse problema deduziremos uma fórmula prática que dá o número de anos necessários para dobrar o seu capital em um investimento estável.
Considere um investimento que rende *r*% ao ano. Note que, por causa disso, sendo *C* o seu investimento inicial, ele tem uma quantia de $C\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n$ após *n* anos.

a) Na prática, *r* costuma ser pequeno (menor do que 10). Nesses casos, $\ln\left(1+\dfrac{r}{100}\right)$ é muito próximo de $\dfrac{r}{100}$.

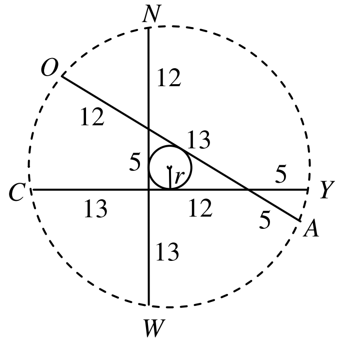
Utilizando a aproximação $\ln 2 \approx 0{,}7$, mostre que é preciso aproximadamente $\dfrac{70}{r}$ anos para se dobrar o capital, ou seja, ter 2*C*.

Obs.: $\ln t$ *é o logaritmo natural de t, ou seja,* $\ln t = \log_e t$ *, sendo* $e \approx 2{,}718$ *a constante de Euler.*

b) Granaldo investiu R$1000 na poupança. A caderneta de poupança rendeu em 2009 cerca de 7%. Supondo que tal rentabilidade se mantenha, em quanto tempo Granaldo teria um milhão de reais?

PROBLEMA 3

A bissetriz de um ângulo é o conjunto de pontos equidistantes dos segmentos que formam o ângulo. A partir dessa definição pode-se demonstrar que as bissetrizes dos ângulos de um triângulo concorrem em um único ponto chamado *incentro* que é equidistante dos lados do triângulo. Tal distância comum *r* é denominada *inraio*, pois é possível construir uma circunferência, o *incírculo*, centrada no incentro e com raio *r* a qual toca os lados do triângulo.
Nesse problema considere o triângulo retângulo de lados 5, 12 e 13.
a) Prove que a área do triângulo é 15*r*.
b) Calcule *r*.
c) Prolongando os lados do triângulo, como mostra a figura, obtemos seis pontos *C*, *O*, *N*, *W*, *A* e *Y*. Prove que esses seis pontos estão sobre uma circunferência centrada no incentro do triângulo original e calcule o raio dessa circunferência.



PROBLEMA 4

Alguns países como a Inglaterra, a Alemanha e a Holanda utilizam moinhos de vento para gerar energia a partir do vento. Todavia, nem toda a energia fornecida pelo vento pode ser aproveitada. Em 1919, o engenheiro alemão Albert Betz calculou qual é a maior porcentagem possível de energia que o vento pode fornecer.

Os moinhos funcionam da seguinte maneira: o vento passa por suas pás, entrando com velocidade U e saindo com velocidade V, menor do que U.

A velocidade média do ar passando pelas pás é a média de U e V, ou seja, $\frac{U+V}{2}$, de modo que a massa de ar que passa pelas pás por unidade de tempo é $m = D \cdot A \cdot \frac{U+V}{2}$, sendo A a área das pás e D a densidade do ar.

A potência P gerada pelo vento é a diferença entre as energias cinéticas por unidade de tempo depois e antes do vento entrar, ou seja, $P = \frac{m \cdot U^2}{2} - \frac{m \cdot V^2}{2}$.

Se o vento não tivesse encontrado o moinho, a sua potência seria $Q = \frac{m' U^2}{2}$, sendo $m' = D \cdot A \cdot U$ a massa de ar que passa pela área das pás por unidade de tempo.

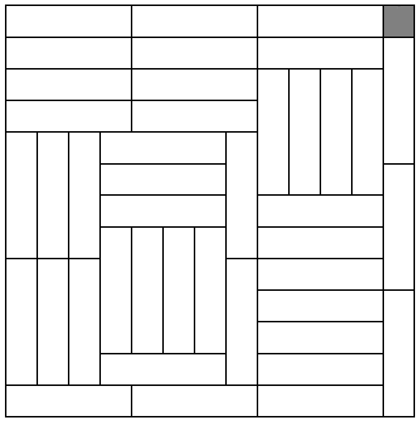
Deste modo, a porcentagem de energia do vento utilizada é $\frac{P}{Q} \cdot 100\%$.

a) Seja $x = \frac{V}{U}$. Escreva a porcentagem acima em função exclusivamente de x.

b) Sabe-se que a expressão acima é da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ e é máxima quando $3ax^2 + 2bx + c = 0$. Determine o valor de x que torna a porcentagem de energia aproveitada do vento máxima e encontre essa porcentagem.

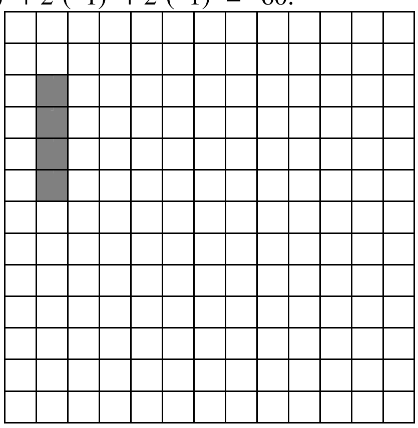
PROBLEMA 5

Um problema clássico da Matemática Recreativa é a cobertura de tabuleiros com os chamados *poliminós*. Essa área foi bastante desenvolvida pelo grande matemático norte-americano Solomon W. Golomb em sua obra *Polyominoes*. Um dos problemas principais dessa parte da Matemática é determinar se uma determinada cobertura é possível ou não. Por exemplo, ao lado mostramos que é possível cobrir um tabuleiro 13×13 com 42 poliminós 4×1 deixando vazia apenas a casa superior direita.



Neste problema vamos mostrar que é impossível cobrir o tabuleiro com os 42 poliminós deixando vazia apenas a sua casa central.

Atribuímos à casa da i-ésima linha e j-ésima coluna o número $2^{i-1}(-1)^{j-1}$ e a cada poliminó a soma dos quatro números correspondentes às quatro casas que ele ocupa na cobertura do tabuleiro. Por exemplo, o poliminó (colocado na direção vertical) mostrado abaixo corresponde a $2^2(-1)^1 + 2^3(-1)^1 + 2^4(-1)^1 + 2^5(-1)^1 = -60$.



a) A que número correspondem os poliminós que são colocados na direção horizontal?

b) Supondo que a cobertura citada acima fosse possível, qual seria a soma dos 42 números atribuídos aos poliminós?

c) Demonstre que tal cobertura não existe.