XXXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (7 de novembro de 2009)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

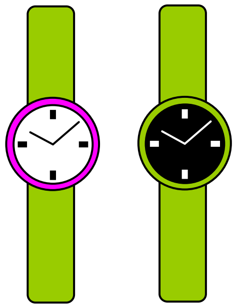
Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A marca de relógios *Campeão* lançou um modelo que permite combinar pulseiras, aros e caixas de diferentes cores. O conjunto completo, chamado de Super Kit, é composto por 5 pulseiras de cores diferentes, 5 aros de cores diferentes e 2 caixas, uma preta e uma branca. No exemplo ao lado vemos a pulseira verde em duas composições distintas, uma com o aro rosa e a caixa branca, outra com o aro verde e a caixa preta.



A empresa que fabrica os relógios *Campeão* deseja oferecer um conjunto especial para o Natal, o X-mas Kit, que permita pelo menos mil composições diferentes de pulseira, aro e caixa.

a) Calcule o número de composições que o Super Kit permite. Depois, determine o aumento percentual desse número para se obter exatamente mil composições.

b) Para produzir o X-mas Kit, a empresa deseja manter o número de caixas e aumentar apenas o número de cores de pulseiras e aros em um mesmo percentual.

Sabe-se que cada pulseira custa R$2,00 para o consumidor final, cada aro R$3,00 e cada caixa R$20,00.

Nessas condições, qual será o menor preço possível do X-mas Kit para o consumidor final?

PROBLEMA 2

A *Teoria das Filas* é um conjunto de resultados aplicáveis em situações envolvendo filas em geral. Um dos resultados mais importantes da Teoria das Filas é a *Lei de Little*, provada pelo professor John Little, do MIT, em 1961:

Em um sistema de filas em que as médias de pessoas que entram e saem são iguais, a quantidade média C de clientes no sistema é igual ao produto da média m de pessoas que chegam no sistema e do tempo médio t que cada cliente fica no sistema. Simbolicamente, $C = m \cdot t$.

Por exemplo, se chegam em média 20 pessoas por hora em uma fila e cada pessoa gasta, em média, ao todo 15 minutos, ou seja, 0,25 hora na fila, a quantidade média de pessoas na fila é $20 \cdot 0{,}25 = 5$.

A loja *OPM's* (venha nos conhecer!) tem um atendimento tão bom que todos os clientes que entram na loja compram algo. Sabe-se que, em média, 24 pessoas entram na loja por hora e que em média há 15 pessoas dentro da loja.

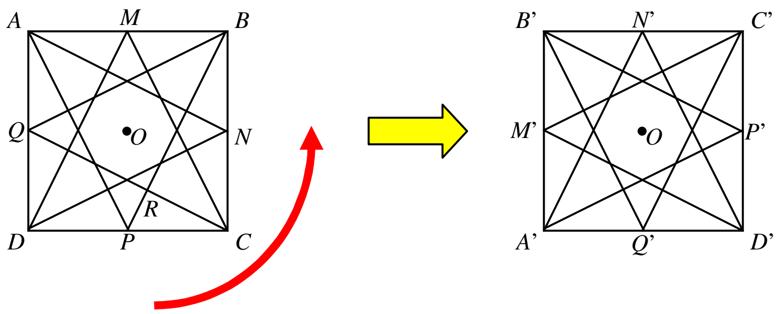
a) Quanto tempo, em média, cada pessoa fica dentro da loja?

b) Estima-se que, com uma campanha publicitária, pode-se quadruplicar a quantidade de pessoas que entram na loja por hora. Além disso, um treinamento com os atendentes fará com que o tempo médio para as pessoas passarem pelo caixa, incluindo o tempo que ficam na fila, caia pela metade. O que se espera que aconteça, sob o ponto de vista da Teoria das Filas, com a quantidade média de pessoas na fila do caixa?

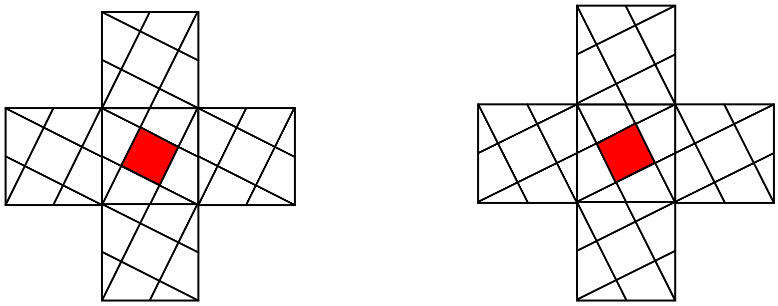
PROBLEMA 3

Na figura, *ABCD* é um quadrado, *M*, *N*, *P* e *Q* são pontos médios de seus lados e *O* é seu centro. O ponto *R* é a interseção de *BP* e *CQ*.

a) Considerando a rotação mostrada a seguir, calcule a medida do ângulo $B\hat{R}Q$. Não se esqueça de justificar a sua resposta!



b) Cada uma das duas figuras a seguir apresenta cinco cópias do quadrado *ABCD*, incluindo alguns de seus segmentos interiores. A rotação acima mostra, entre outros fatos, que os quadriláteros destacados em vermelho são quadrados e congruentes. Sendo os seus lados iguais a 1, calcule as medidas dos lados do triângulo *BQR*. Não custa repetir: você deve justificar a sua resposta!



PROBLEMA 4

a) Algumas vezes, quando somamos frações irredutíveis, obtemos uma fração que pode ser simplificada, ou seja, redutível. Por exemplo, $\frac{4}{21}+\frac{1}{15}=\frac{4\cdot 5+1\cdot 7}{105}=\frac{27}{105}$ é uma fração equivalente a $\frac{9}{35}$.

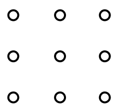
Notando que $2009=7^2\cdot 41$, concluímos que, ao somarmos as frações irredutíveis $\frac{a}{2009}$ e $\frac{b}{41}$, obtemos a fração $\frac{a+49b}{2009}$. Exiba inteiros positivos a e b de modo que tal fração seja redutível.

b) Acontece também de termos como resultado uma fração irredutível; por exemplo, $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 3+7\cdot 2}{36}=\frac{29}{36}$. Mais ainda, pode-se demonstrar que, para alguns pares de denominadores, é impossível obter como resposta uma fração que possa ser simplificada.

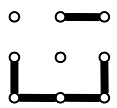
Sejam $\frac{x}{12}$ e $\frac{y}{18}$ frações irredutíveis. Mostre que a fração obtida ao calcular $\frac{x}{12}+\frac{y}{18}$ será sempre irredutível.

PROBLEMA 5

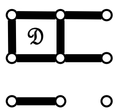
No conhecido "*Jogo dos Pontinhos*" temos inicialmente uma malha de pontinhos. A seguir mostramos uma malha bem pequena para a qual, nesse problema, faremos a análise do jogo:



Dois jogadores, que denominaremos Dernaldo e Ernaldo, fazem, alternadamente, traços horizontais ou verticais ligando dois pontos vizinhos. Veja um exemplo de um jogo no qual Dernaldo acaba de fazer a sua terceira jogada:

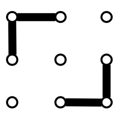


Aquele que na sua vez completa um quadrado marca a sua inicial no interior do quadrado e deve jogar de novo. Por exemplo, na situação abaixo, é novamente a vez do primeiro jogador, Dernaldo. E se ele completar outro quadradinho (o que é possível na posição mostrada), ele jogará ainda mais uma vez:



O jogo termina quando não há mais traços a fazer e vence o que tiver completado mais quadrados. Caso as quantidades sejam iguais, a vitória vai para o segundo jogador, Ernaldo.

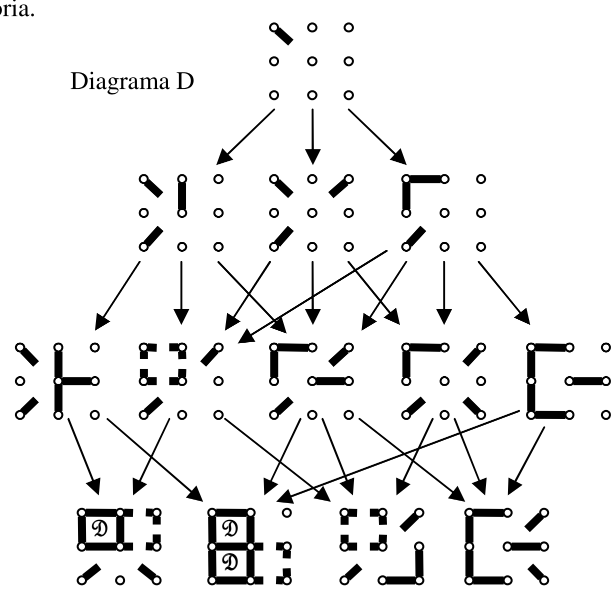
a) A figura a seguir mostra um jogo em andamento.



A partir dessa posição, um dos jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, ele consegue vencer não importando como o outro jogue. Quem é esse jogador e como ele deve jogar? Não se esqueça de justificar as suas respostas!

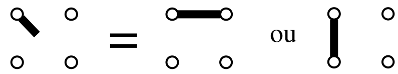
b) O diagrama a seguir, retirado do fantástico livro *Winning Ways*, de Berlekamp, Conway e Guy, apresenta uma estratégia vencedora para Dernaldo. Ou seja, seguindo as indicações do diagrama D, para quaisquer que sejam as jogadas de Ernaldo, Dernaldo chegará à vitória.

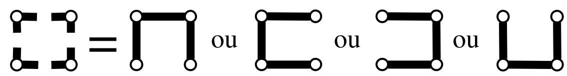
Diagrama D



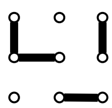
Observações:

1) Para tornar o diagrama D mais simples (com menos desenhos de malhas):

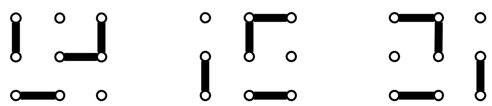




2) Ainda com o intuito de tornar o diagrama D mais simples, posições equivalentes às posições dadas por rotação ou reflexão não aparecem. Por exemplo,

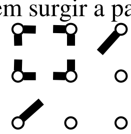


corresponde às três figuras a seguir, entre outras:



3) A conclusão do jogo não aparece, porém pode-se verificar que Dernaldo realmente vencerá.

A estratégia apresentada no Diagrama D está incompleta, pois omite algumas situações que podem surgir a partir da configuração



Quais são essas situações e como Dernaldo deve jogar para vencer em cada uma delas? Aproveite as observações para simplificar a sua análise (e a nossa correção, ☺).

XXXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (7 de novembro de 2009)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A *Teoria das Filas* é um conjunto de resultados aplicáveis em situações envolvendo filas em geral. Um dos resultados mais importantes da Teoria das Filas é a *Lei de Little*, provada pelo professor John Little, do MIT, em 1961:

Em um sistema de filas em que as médias de pessoas que entram e saem são iguais, a quantidade média C de clientes no sistema é igual ao produto da média m de pessoas que chegam no sistema e do tempo médio t que cada cliente fica no sistema. Simbolicamente, $C = m \cdot t$.

Por exemplo, se chegam em média 20 pessoas por hora em uma fila e cada pessoa gasta, em média, ao todo 15 minutos, ou seja, 0,25 hora na fila, a quantidade média de pessoas na fila é $20 \cdot 0{,}25 = 5$.

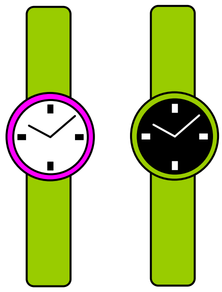
A loja *OPM's* (venha nos conhecer!) tem um atendimento tão bom que todos os clientes que entram na loja compram algo. Sabe-se que, em média, 24 pessoas entram na loja por hora e que em média há 15 pessoas dentro da loja.

a) Quanto tempo, em média, cada pessoa fica dentro da loja?

b) Estima-se que, com uma campanha publicitária, pode-se quadruplicar a quantidade de pessoas que entram na loja por hora. Além disso, um treinamento com os atendentes fará com que o tempo médio para as pessoas passarem pelo caixa, incluindo o tempo que ficam na fila, caia pela metade. O que se espera que aconteça, sob o ponto de vista da Teoria das Filas, com a quantidade média de pessoas na fila do caixa?

PROBLEMA 2

A marca de relógios *Campeão* lançou um modelo que permite combinar pulseiras, aros e caixas de diferentes cores. O conjunto completo, chamado de Super Kit, é composto por 5 pulseiras de cores diferentes, 5 aros de cores diferentes e 2 caixas, uma preta e uma branca. No exemplo ao lado vemos a pulseira verde em duas composições distintas, uma com o aro cor de rosa e a caixa branca, outra com o aro verde e a caixa preta.



A empresa que fabrica os relógios *Campeão* deseja oferecer um conjunto especial para o Natal, o X-mas Kit, que permita pelo menos mil composições diferentes de pulseira, aro e caixa.

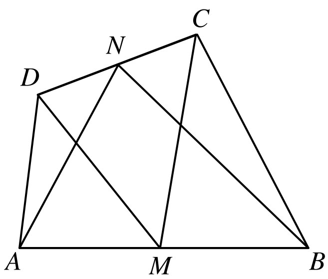
a) Calcule o número de composições que o Super Kit permite. Depois, determine o aumento percentual desse número para se obter exatamente mil composições.

b) Para chegar às mil composições diferentes a empresa decidiu aumentar as quantidades de pulseiras e aros e manter a quantidade de caixas no conjunto. As quantidades finais de pulseiras e aros podem ser diferentes.

Sabendo que cada pulseira custa R\$2,00 para o consumidor final, cada aro R\$3,00 e cada caixa R\$20,00, determine as quantidades de pulseiras e aros na alternativa mais barata.

PROBLEMA 3

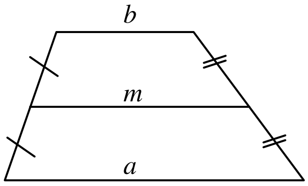
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, M o ponto médio de AB e N o ponto médio de CD.



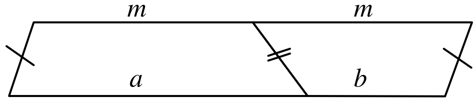
a) Prove que a área de ANB é igual à soma das áreas de AMD e de BMC.

b) Mostre que a área do quadrilátero $ABCD$ é igual à soma das áreas dos triângulos ANB e CMD.

Você pode querer utilizar o fato de que a base média do trapézio é igual à média das bases. Uma possível demonstração é:



$$m = \frac{a+b}{2}$$



PROBLEMA 4

Dizemos que n inteiro positivo é um *número congruente* se existe um triângulo retângulo com todos os lados de medidas racionais e área n. Por exemplo:

- 30 é um número congruente, pois é a área do triângulo retângulo de lados 5, 12 e 13;
- 15 é um número congruente, pois é a área do triângulo retângulo de lados 4, 15/2 e 17/2.

Pode-se demonstrar que nem todos os inteiros positivos são números congruentes. O número 1, por exemplo, não é.

a) Sejam a e b os catetos e c a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados racionais e área n.

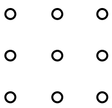
Considere $x = n\cdot\dfrac{(a+c)}{b}$ e $y = 2n^2\cdot\dfrac{(a+c)}{b^2}$. Prove que x e y satisfazem a equação $y^2 = x^3 - n^2x$.

b) Dado que $y = \dfrac{3}{2}x$, determine todos os pares (x, y) satisfazendo a equação $y^2 = x^3 - 25x$.

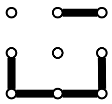
c) Prove que 5 é um número congruente.

PROBLEMA 5

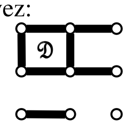
No conhecido "*Jogo dos Pontinhos*" temos inicialmente uma malha de pontinhos. A seguir mostramos uma malha bem pequena para a qual, nesse problema, faremos a análise do jogo:



Dois jogadores, que denominaremos Dernaldo e Ernaldo, fazem, alternadamente, traços horizontais ou verticais ligando dois pontos vizinhos. Veja um exemplo de um jogo no qual Dernaldo acaba de fazer a sua terceira jogada:



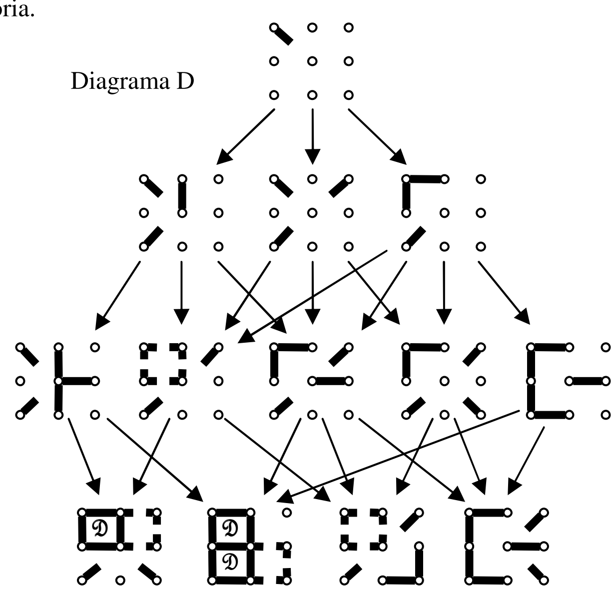
Aquele que na sua vez completa um quadrado marca a sua inicial no interior do quadrado e deve jogar de novo. Por exemplo, na situação abaixo, é novamente a vez do primeiro jogador, Dernaldo. E se ele completar outro quadradinho (o que é possível na posição mostrada), ele jogará ainda mais uma vez:



O jogo termina quando não há mais traços a fazer e vence o que tiver completado mais quadrados. Caso as quantidades sejam iguais, a vitória vai para o segundo jogador, Ernaldo.

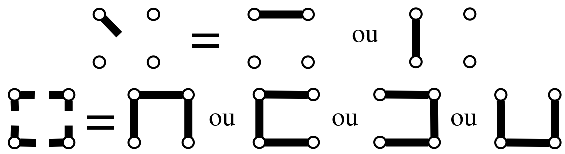
O diagrama a seguir, retirado do fantástico livro *Winning Ways*, de Berlekamp, Conway e Guy, apresenta uma estratégia vencedora para Dernaldo. Ou seja, seguindo as indicações do diagrama D, para quaisquer que sejam as jogadas de Ernaldo, Dernaldo chegará à vitória.

Diagrama D

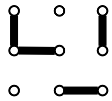


Observações:

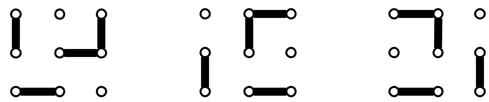
1) Para tornar o diagrama D mais simples (com menos desenhos de malhas):



2) Ainda com o intuito de tornar o diagrama D mais simples, posições equivalentes às posições dadas por rotação ou reflexão não aparecem. Por exemplo,



corresponde às três figuras a seguir, entre outras:

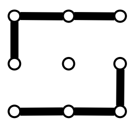


3) A conclusão do jogo não aparece, porém pode-se verificar que Dernaldo realmente vencerá.

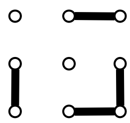
a) Aplicando a estratégia vencedora do diagrama D, indique na sua folha de resoluções qual deve ser a próxima jogada de Dernaldo nas situações mostradas a seguir. Se houver mais de uma possível próxima jogada, indique cada uma delas.

Não mostre como o jogo irá se desenrolar até o final, indique apenas a próxima jogada de Dernaldo.

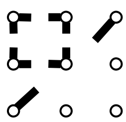
i)



ii)



b) A estratégia apresentada no Diagrama D está incompleta, pois omite algumas situações que podem surgir a partir da configuração



Quais são essas situações e como Dernaldo deve jogar para vencer em cada uma delas? Aproveite as observações para simplificar a sua análise (e a nossa correção, ☺).

XXXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (7 de novembro de 2009)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Charles Dodgson, autor do livro *Alice no País das Maravilhas* sob o pseudônimo Lewis Carroll, obteve uma identidade que permitiu o desenvolvimento de um algoritmo para o cálculo de determinantes. Ilustraremos o algoritmo com a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Primeiro, calculamos os determinantes 2×2 com duas linhas e duas colunas vizinhas:

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 1 & & 3 & & 2 & & -1 \\ & -7 & & 11 & & 5 & \\ 2 & & -1 & & 3 & & 1 \\ & 3 & & -7 & & 2 & \\ -1 & & 2 & & 1 & & 1 \\ & 9 & & 9 & & 1 & \\ -2 & & -5 & & 2 & & 3 \end{array}\right|$$

Note que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$, e assim por diante. Depois, eliminamos os números na borda, obtendo

$$\left|\begin{array}{ccccc} -7 & & 11 & & 5 \\ & -1 & & 3 & \\ 3 & & -7 & & 2 \\ & 2 & & 1 & \\ 9 & & 9 & & 1 \end{array}\right|$$

Em seguida, calculamos novamente os determinantes 2×2 com duas linhas e duas colunas vizinhas e dividimos pelos números centrais correspondentes:

$$\left|\begin{array}{ccccc} -7 & & 11 & & 5 \\ & -16 & & 19 & \\ 3 & & -7 & & 2 \\ & 45 & & -25 & \\ 9 & & 9 & & 1 \end{array}\right|$$

Note que, por exemplo, $19 = \dfrac{\begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}}{3}$. Eliminamos mais uma vez os números na borda, obtendo

$$\left|\begin{array}{ccc} -16 & & 19 \\ & -7 & \\ 45 & & -25 \end{array}\right|$$

Com isso, podemos calcular o determinante, obtendo

$$\det A = \frac{\begin{vmatrix} -16 & 19 \\ 45 & -25 \end{vmatrix}}{-7} = 65.$$

a) Utilizando o método acima, calcule o determinante 4×4

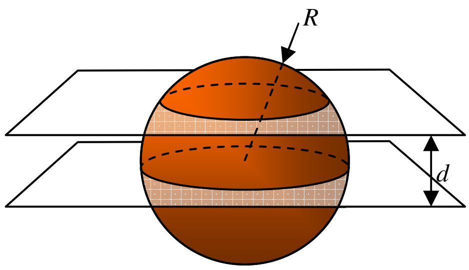
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$

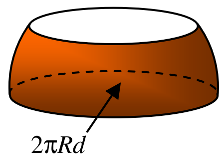
b) Utilize o algoritmo para provar a fórmula de Vandermonde para determinantes 4×4, sendo a, b, c e d distintos e não nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$$

PROBLEMA 2

Pode-se provar que a superfície de uma esfera de raio R limitada entre dois planos paralelos e secantes à esfera que estão a uma distância d (a qual também chamamos *altura*) um do outro é $2\pi Rd$.





Por simplicidade, a partir de agora chamaremos tais superfícies de esfera limitadas por planos apenas de *superfícies*.

a) Dadas m superfícies de altura 2 que, juntas e possivelmente com alguma superposição, cobrem uma esfera de raio R, mostre que $m \geq R$.

Atenção: *Os planos não precisam ser todos paralelos entre si.*

b) Muitos problemas de Geometria Plana podem ser resolvidos mais facilmente ao estendê-los para a Geometria Espacial. Um exemplo é:

> *Dados m retângulos de dimensões 2 e 2R que, juntos e possivelmente com alguma superposição, cobrem um círculo de raio R, é verdade que m ≥ R?*

Resolva o problema acima.

PROBLEMA 3

O truque mais impressionante do Grande Benjamini é tão difícil que mesmo ele nem sempre consegue acertá-lo:

● Cada um dos espectadores do seu show escolhe um número inteiro positivo distinto (um sistema digital garante que não há a escolha de números repetidos). Benjamini não recebe nenhuma informação sobre tais números. Apenas sabe qual é o total de espectadores e, portanto, o total de números.

● Esses números são, então, colocados em uma urna e passam a ser retirados, um por um.

● O fantástico matemágico vai acompanhando o sorteio e em certo momento o interrompe para dizer que o maior número da urna acaba de ser escolhido.

Como vocês são amantes da Matemática, ele decidiu revelar sua estratégia (só para vocês!):

1) Ele ignora os primeiros s números. De fato, ele apenas registra qual é o maior entre os s primeiros números.

Você deve estar se perguntando: e se o maior número estiver entre os s primeiros? Nós dissemos que o truque nem sempre dá certo!

2) Então ele espera o primeiro número sorteado que supera o maior dos s primeiros e o anuncia como o maior da urna.

Você deve estar se perguntando: e se o maior número ainda estiver na urna? Lembre-se: o truque nem sempre dá certo!

O que é incrível é que Benjamini acerta o truque mais de um terço das vezes! Muito mais do que uma vez em n, o quanto poderíamos esperar de "trouxas" (isto é, não matemágicos).

a) Suponha que tenham sido retirados k números da urna, $s \le k \le n$. Qual é a probabilidade de que o maior entre os k números tenha saído entre os s primeiros?

b) Mostre que, sendo n o número de espectadores, a probabilidade de o truque dar certo é $\frac{s}{n}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$.

c) Pode-se demonstrar que a expressão $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m-1}$ é aproximadamente igual a $\ln m$.

i) Seja $\frac{s}{n}=x$. Mostre que a expressão $\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ é aproximadamente igual a $\ln\frac{1}{x}$.

ii) Considerando as aproximações acima, prove que realmente é possível escolher s de modo que a probabilidade de acertar o truque seja superior a um terço.

PROBLEMA 4

Seja n um inteiro positivo. Vamos definir a função de Möebius $\mu(n)$. Se na fatoração em primos de n, $n > 1$, todos os expoentes são iguais a 1, então $\mu(n)=(-1)^{\nu}$, em que ν é o número de fatores primos de n. Caso contrário, $\mu(n)=0$. Finalmente, $\mu(1)=1$. Por exemplo: como $2010=2\cdot3\cdot5\cdot67$, $\mu(2010)=(-1)^4=1$; e, como $2009=7^2\cdot41$, $\mu(2009)=0$.

a) Seja $m > 1$ um número com k divisores primos positivos distintos. Prove que a quantidade de divisores d de m tais que $\mu(d)=-1$ é $\binom{k}{1}+\binom{k}{3}+\binom{k}{5}+\cdots$.

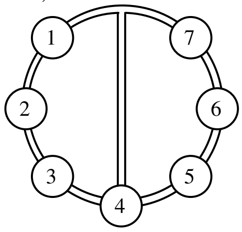
b) Demonstre que para m inteiro, $m > 1$, $\sum_{d|m}\mu(d)=0$. Observe que o somatório em questão percorre todos os divisores de m; por exemplo, para $m = 12$, $\sum_{d|12}\mu(d)=\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\mu(4)+\mu(6)+\mu(12)=1+(-1)^1+(-1)^1+0+(-1)^2+0=0$.

c) Prove que, para $-1 < x < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu(n)\cdot x^n}{1-x^n}=x$.

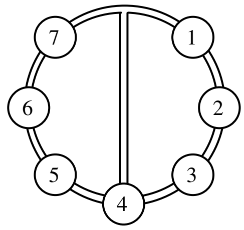
Observação: Nessa questão talvez você deseje utilizar a fórmula da soma da PG infinita: $a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots=\frac{a_1}{1-q}$, $-1 < q < 1$.

PROBLEMA 5

No quebra-cabeça "Cruzando a Ponte", o desafio é transformar a configuração inicial na configuração final.



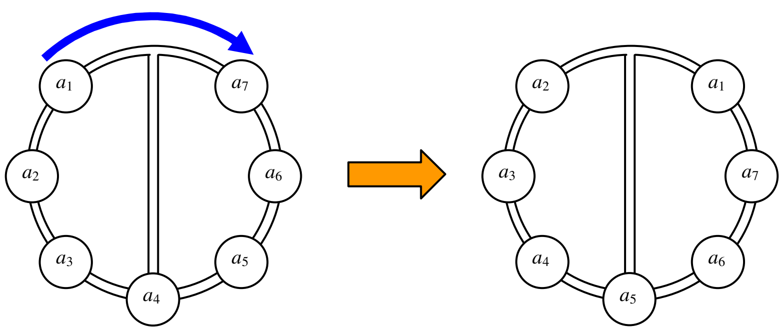
Configuração inicial



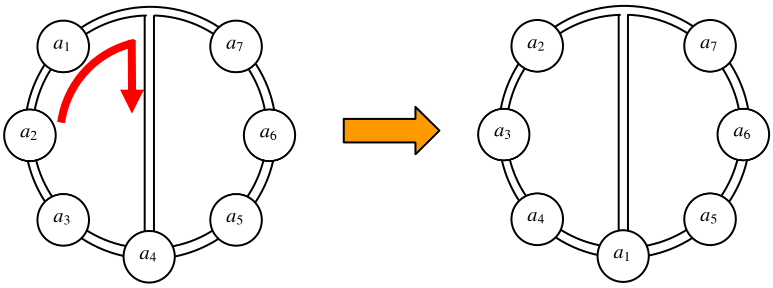
Configuração final

Os movimentos permitidos são:

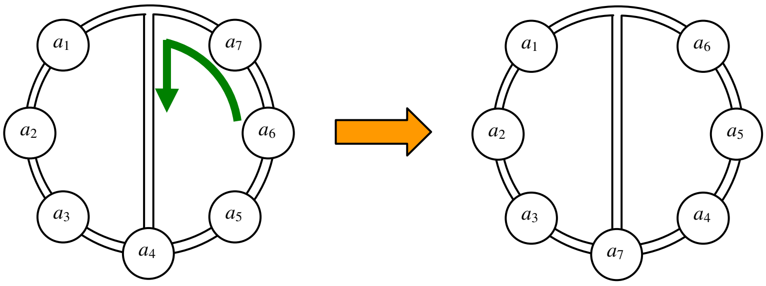
R: Rotacionar os números no sentido horário.



α: Cruzar a ponte com a_1, movendo também os demais números da metade esquerda.



β: Cruzar a ponte com a_7, movendo também os demais números da metade direita.



Mostraremos nessa questão como as permutações podem nos ajudar a resolver quebra-cabeças como o "Cruzando a Ponte" (Um outro exemplo é o célebre Cubo de Rubik™).

● Inicialmente um pouco de notação: (Talvez agora você tenha uma sensação de *déjà vu,* a explicação a seguir já foi dada no problema 5 da Primeira Fase da OPM 2008.)

A permutação $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de 1, 2, …, n pode ser representada como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

E observamos que 1 é levado a a_1, 2 é levado a a_2, etc.

Há uma outra maneira de apresentar permutações. Por exemplo, na permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

temos que o 1 é levado ao 6; o 6, por sua vez, é levado ao 2 e do 2 volta-se para o 1, completando o que passaremos a chamar de *ciclo*. Começando agora pelo 3, menor número que não aparece no ciclo anterior, temos 3 → 7 → 3, fechando mais um ciclo. Finalmente temos um ciclo formado apenas pelo 4, que é levado a ele mesmo, e outro formado apenas pelo 5. Tais características da permutação dada podem ser resumidas escrevendo $(1\ \ 6\ \ 2)(3\ \ 7)(4)(5)$. Em tal notação, vale a pena observar a importância dos parênteses: $(1\ \ 6\ \ 2)(3\ \ 7)(4\ \ 5)$, por exemplo, é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

● Assim, cada movimento corresponde a uma operação sobre o conjunto das permutações de 1, 2, …, 7. Mais uma vez exemplificando:

- Se o nosso primeiro movimento for α, isto é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ ou } (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)(5)(6)(7),$$

então o 1 vai para a 4ª posição, o 4 para a 3ª posição, o 3 para a 2ª, o 2 para a 1ª e os demais números ficam em suas posições iniciais.

- E se fizermos o movimento β seguido de outro β, isto é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ ou } (1)(2)(3)(4\ \ 6)(5\ \ 7),$$

então o 4 vai para a 6ª posição, o 6 para a 4ª, o 5 para a 7ª, o 7 para a 5ª e os demais números ficam em suas posições iniciais.

● E, finalmente, podemos passar para as perguntas! Em todos os itens considere que estamos partindo da configuração inicial.

a) i) Escreva, utilizando a notação de ciclos, qual permutação obtemos ao fazer o movimento α seguido de R (denominaremos tal composição de movimentos αR).

ii) Escreva a permutação obtida ao fazermos $(\alpha R)^5$, ou seja, $\alpha R \alpha R \alpha R \alpha R \alpha R$.

iii) Escreva a permutação obtida ao fazermos $(\alpha R)^{10}$.

b) Mostre como resolver o quebra-cabeça usando apenas os movimentos α e R.

c) Esmeraldinho quebrou seu jogo *Cruzando a Ponte*, de modo que só é possível fazer os movimentos α e β. É ainda possível resolver o quebra-cabeça? Ou Esmeraldinho deve jogar seu brinquedo no cestinho vermelho dos recicláveis?