XXXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (19 de setembro de 2009)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Algumas pessoas têm a habilidade de fazer "de cabeça" e rapidamente operações matemáticas envolvendo números com muitos algarismos. Esse é um dos truques mais festejados dos "matemágicos".

A indiana Shankuntala Devi, por exemplo, teve o seu nome estampado nas páginas do New York Times ao conseguir somar 25.842 + 111.201.721 + 370.247.830 + 55.511.315 e depois multiplicar o valor obtido por 9.878 em menos de 20 segundos.

Uma das técnicas utilizadas por Devi é o chamado Método *Criss-Cross*. Mostramos a seguir uma aplicação simples, envolvendo a multiplicação de dois números de dois algarismos.

8 3	8 X 3	8 3
|		|
6 7	6 7	6 7
$7 \times 3 = \mathbf{2}\underline{1}$	$\mathbf{2} + (7 \times 8 + 6 \times 3) = \mathbf{7}\underline{6}$	$\mathbf{7} + (6 \times 8) = \underline{55}$

Logo $83 \times 67 = \underline{55}\ \underline{6}\ \underline{1}$.

Nesse caso o método é justificado pelas identidades

$$83 \times 67 = (8\times10 + 3) \times (6\times10 + 7) = 3\times7 + (8\times7 + 3\times6) \times 10 + (8\times6) \times 10^2$$

Baseado no exemplo dado, resolva os itens a seguir.

a) Complete os diagramas impressos na folha anexa mostrando como deve ser o Criss-Cross para a multiplicação de dois números de três algarismos. **Atenção:** os diagramas estão também representados abaixo, mas você deve completar os da folha anexa pois somente eles serão considerados para a correção.

8 5 3	8 5 3	8 5 3	8 5 3	8 5 3
7 6 2	7 6 2	7 6 2	7 6 2	7 6 2

$853\times762 =$

b) Exiba as identidades que justificam a aplicação do Criss-Cross apresentada no item a.

PROBLEMA 2

O truque favorito do grande matemágico Benjamini é o seguinte:

● Ele pede para uma pessoa na plateia pensar em um número de sete algarismos. Esse número não deve ser revelado.

● Então pede para ela inverter o número (primeiro algarismo vira o último, o segundo vira o penúltimo e assim por diante) e subtrair o maior do menor (pode usar lápis e papel, pois a conta é grande). Nada é revelado ainda.

● Finalmente pede para a pessoa convidada ir falando na ordem os sete algarismos obtidos (mesmo os possíveis zeros à esquerda devem ser falados), sendo que um dos algarismos ela não deve dizer, desafiando Benjamini com "Descubra!".

● Após o convidado concluir a sua participação, para espanto de todos, Benjamini imediatamente diz o algarismo que ele não falou.

Por exemplo:

● A pessoa escolhe o número 2485772.

● O número invertido é 2775842. Subtraindo: 2775842 – 2485772 = 0290070.

● O convidado, então, diz Zero, Dois, Nove, Zero, Zero, Descubra!, Zero.

● E o triunfante Benjamini, diz de imediato "Sete!", recebendo as suas merecidas palmas.

O segredo de Benjamini é que ele sabe que o número obtido após a subtração deve ser múltiplo de onze. E sabe também o critério de divisibilidade por onze:

> Seja $a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ a representação decimal de um número inteiro n. O número n é múltiplo de 11 se, e somente se, $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ é múltiplo de 11. Por exemplo: 4770216 é múltiplo de 11, pois $(6+2+7+4) - (1+0+7) = 11$ é um múltiplo de 11; já 5672109 não é múltiplo de 11, pois (9 + 1 + 7 + 5) – (0 + 2 + 6) = 14 não é múltiplo de 11.

Explicando o truque: 0290070 é múltiplo de 11, pois (0 + 0 + 9 + 0) – (7 + 0 + 2) = 0 que é múltiplo de 11.

a) Um membro da plateia disse: Quatro, Três, Dois, Zero, Descubra!, Cinco, Cinco.

Faça como o grande Benjamini e determine o algarismo que falta.

b) Um outro membro da plateia disse: Seis, Zero, Oito, Descubra!, Zero, Oito, Quatro. E Benjamini, para surpresa de todos, afirmou que não diria o algarismo porque o resultado da conta estava errado!

Baseado no critério de divisibilidade por onze, explique mais esse mistério envolvendo o maior dos matemágicos.

PROBLEMA 3

Esmeralda foi ao supermercado e comprou vários produtos. Ela precisa colocá-los em sacos plásticos, sendo que cada um suporta no máximo 1 kg. As massas, em gramas, dos quinze produtos que Esmeralda comprou são

900, 900, 800, 800, 700, 700, 600, 500, 500, 400, 400, 400, 300, 300 e 300

Ela não coloca um saco dentro do outro. E utiliza o menor número de sacos para levar suas compras. Sendo assim:

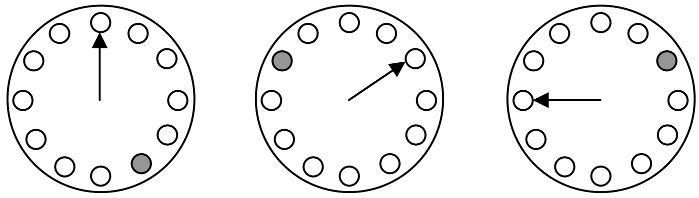
a) Qual é a massa total, em kg, de todos os produtos que Esmeralda comprou?

b) Quantos produtos necessariamente devem ir sozinhos em um saco plástico?

c) Quantos sacos são necessários para carregar todos os produtos que Esmeralda comprou?

PROBLEMA 4

Uma escola ultramoderna utiliza relógios ultramodernos. No lugar dos números de 1 a 12, o relógio tem 12 lâmpadas. Não há ponteiro das horas nem marcações numéricas; em seu lugar, a luz fica acesa, sinalizando a hora. Mas o relógio ainda conserva o ponteiro dos minutos, que começa na posição vertical e segue no sentido horário, completando os 60 minutos em uma volta. Veja o relógio em algumas situações:



5h00min 10h10min 2h45min

a) Às 11h20min da manhã, enquanto o professor estava fora da sala de aula, alguns alunos giraram o relógio 90º no sentido anti-horário, sem tocar no ponteiro dos minutos. Logo após, o professor retornou para a sala de aula. Qual o horário que ele viu no relógio?

b) A biblioteca da escola funciona da 1h às 5h30min da tarde. Os mesmos alunos entraram na biblioteca e, à 1h40min, enquanto a bibliotecária saiu, eles giraram o relógio, sem tocar no ponteiro dos minutos. Quando ela voltou eles disseram, com cara de espanto, que estava quase na hora de fechar (ou seja, eles giraram o relógio de modo a obter o horário mais próximo do horário de fechamento da biblioteca). A bibliotecária, muito distraída, foi enganada, e fechou a biblioteca antes da hora, quando o relógio indicava, falsamente, 5h30min da tarde. Qual era o horário correto no instante do fechamento?

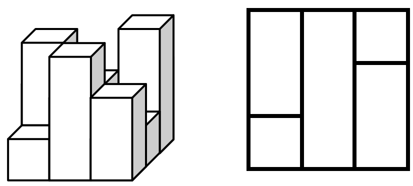
PROBLEMA 5

Um *Sudokubinho* é um quebra-cabeça em que se deve preencher uma tabela de n linhas e n colunas com números de 1 a n de acordo com as seguintes regras:

- Em cada linha dentro da tabela aparece cada número exatamente uma vez;
- Em cada coluna dentro da tabela aparece cada número exatamente uma vez;
- Cada número dentro da tabela representa, naquela casa, um "prédio" com a altura correspondente ao número. Os números fora da tabela indicam quantos prédios são visíveis na linha ou coluna correspondente naquela posição.

A tabela a seguir mostra um exemplo resolvido e os prédios correspondentes.

Perspectiva Vista Frontal



			3	
	2	1	3	
	3	2	1	3
2	1	3	2	
			2	

Veja que nessa coluna são visíveis apenas 2 "prédios", primeiro o de altura 2 e, então, o de altura 3.

Agora é sua vez! Resolva na folha anexa os seguintes *Sudokubinhos*:

	1		
3			

	3				
					2
					1
2					
					4
			2		

Atenção: os Sudokubinhos também estão representados acima, mas você deve completar os da folha anexa pois somente eles serão considerados para a correção.

Nome: ____

PROBLEMA 1

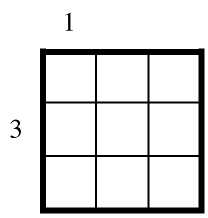
a)

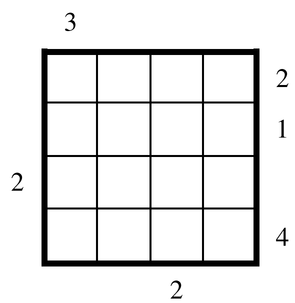
8	5	3	8	5	3	8	5	3	8	5	3	8	5	3
7	6	2	7	6	2	7	6	2	7	6	2	7	6	2

$$853 \times 762 =$$

b)

PROBLEMA 5





Observação: você ***não precisa*** *desenhar os prédios ao resolver o problema, basta preencher a tabela.*

XXXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (19 de setembro de 2009)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O truque favorito do grande matemágico Benjamini é o seguinte:

● Ele pede para uma pessoa na plateia pensar em um número de sete algarismos. Esse número não deve ser revelado.

● Então pede para ela inverter o número (primeiro algarismo vira o último, o segundo vira o penúltimo e assim por diante) e subtrair o maior do menor (pode usar lápis e papel, pois a conta é grande). Nada é revelado ainda.

● Finalmente pede para a pessoa convidada ir falando na ordem os sete algarismos obtidos (mesmo os possíveis zeros à esquerda devem ser falados), sendo que um dos algarismos ela não deve dizer, desafiando Benjamini com "Descubra!".

● Após o convidado concluir a sua participação, para espanto de todos, Benjamini imediatamente diz o algarismo que ele não falou.

Por exemplo:

● A pessoa escolhe o número 2485772.

● O número invertido é 2775842. Subtraindo: 2775842 – 2485772 = 0290070.

● O convidado, então, diz Zero, Dois, Nove, Zero, Zero, Descubra!, Zero.

● E o triunfante Benjamini, diz de imediato "Sete!", recebendo as suas merecidas palmas.

O segredo de Benjamini é que ele sabe que o número obtido após a subtração deve ser múltiplo de onze. E sabe também o critério de divisibilidade por onze:

> Seja $a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ a representação decimal de um número inteiro n. O número n é múltiplo de 11 se, e somente se, $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ é múltiplo de 11. Por exemplo: 4770216 é múltiplo de 11, pois $(6+2+7+4) - (1+0+7) = 11$ é um múltiplo de 11; já 5672109 não é múltiplo de 11, pois (9 + 1 + 7 + 5) – (0 + 2 + 6) = 14 não é múltiplo de 11.

Explicando o truque: 0290070 é múltiplo de 11, pois (0 + 0 + 9 + 0) – (7 + 0 + 2) = 0 que é múltiplo de 11.

a) Um membro da plateia disse: Quatro, Três, Dois, Zero, Descubra!, Cinco, Cinco.

Faça como o grande Benjamini e determine o algarismo que falta.

b) Um outro membro da plateia disse: Seis, Zero, Oito, Descubra!, Zero, Oito, Quatro. E Benjamini, para surpresa de todos, afirmou que não diria o algarismo porque o resultado da conta estava errado!

Baseado no critério de divisibilidade por onze, explique mais esse mistério envolvendo o maior dos matemágicos.

PROBLEMA 2

Esmeralda foi ao supermercado e comprou vários produtos. Ela precisa colocá-los em sacos plásticos, sendo que cada um suporta no máximo 1 kg. As massas, em gramas, dos quinze produtos que Esmeralda comprou são

900, 900, 800, 800, 700, 700, 600, 500, 500, 400, 400, 400, 300, 300 e 300

Ela não coloca um saco dentro do outro. E utiliza o menor número de sacos para levar suas compras. Sendo assim:

a) Qual é a massa total, em kg, de todos os produtos que Esmeralda comprou?

b) Quantos produtos necessariamente devem ir sozinhos em um saco plástico?

c) Quantos sacos são necessários para carregar todos os produtos que Esmeralda comprou?

PROBLEMA 3

São dados um conjunto de n números e um conjunto de pessoas. Considere que distribuímos os números para as pessoas de acordo as seguintes regras:

- Cada pessoa recebe exatamente um número;
- Pessoas distintas podem receber o mesmo número;
- Cada número tem a mesma chance de aparecer.

O matemático Paul Halmos mostrou o seguinte fato: satisfeitas as condições acima, o número mínimo de pessoas para que haja mais de 50% de chance de que existam duas pessoas recebendo o mesmo número é aproximadamente $1{,}18\sqrt{n}$.

a) Uma das aplicações mais interessantes desse resultado é a determinação do número mínimo de pessoas em um grupo de modo que haja uma chance maior do que 50% de duas delas fazerem aniversário no mesmo dia e mês. Determine esse número.

b) A população de Campinas é de aproximadamente um milhão de pessoas. Suponha agora cada habitante de Campinas receba uma senha, que consiste em uma sequência de 10 letras escolhidas ao acaso. Lembre-se de que o alfabeto tem 26 letras.

b1) Quantas são as possíveis sequências de 10 letras? Você pode deixar a sua resposta indicada.

b2) A chance de duas pessoas de Campinas terem recebido senhas iguais é maior ou menor do que 50%?

PROBLEMA 4

Nesta questão iremos obter a fórmula que fornece as raízes de uma equação de segundo grau. A generalização dessa ideia leva a um algoritmo que permite a obtenção das fórmulas para as equações de 3º e 4º graus (via a chamada *resolvente de Lagrange*).

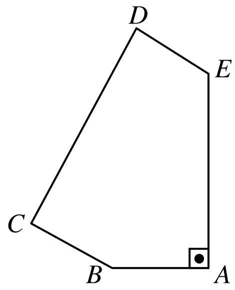
Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais a, b, c, $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac \geq 0$. Pode-se demonstrar que a soma das duas raízes reais x_1 e x_2 (possivelmente iguais) dessa equação é $-\frac{b}{a}$ e o produto é $\frac{c}{a}$.

a) Obtenha o valor de $(x_1 - x_2)^2$ em termos de a, b, c.

b) Utilizando as identidades $2x_1 = (x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)$ e $2x_2 = (x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)$, obtenha as raízes da equação do 2º grau a partir de seus coeficientes.

PROBLEMA 5

Seja $ABCDE$ um pentágono com $AB = BC = DE = 5$, $AE = 12$, $CD = 13$ e ângulo $B\hat{A}E$ reto.



Note que, somente com os dados acima, o pentágono não está unicamente determinado, já que, ao fixarmos os vértices A, B e E, podemos deslocar os lados BC, CD e DE, variando as posições dos vértices C e D.

a) É possível que ocorra $AC = AE$? Justifique e, em caso afirmativo, calcule a área do pentágono $ABCDE$ nesse caso.

b) É possível que ocorra $AE = CE$? Justifique e, em caso afirmativo, calcule a área do pentágono $ABCDE$ nesse caso.

c) É possível que ocorra $AC = CE$? Justifique e, em caso afirmativo, calcule a área do pentágono $ABCDE$ nesse caso.

XXXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (19 de setembro de 2009)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O truque favorito do grande matemágico Benjamini é o seguinte:

● Ele pede para uma pessoa na plateia pensar em um número de sete algarismos. Esse número não deve ser revelado.

● Então pede para ela inverter o número (primeiro algarismo vira o último, o segundo vira o penúltimo e assim por diante) e subtrair o maior do menor (pode usar lápis e papel, pois a conta é grande). Nada é revelado ainda.

● Finalmente pede para a pessoa convidada ir falando na ordem os sete algarismos obtidos (mesmo os possíveis zeros à esquerda devem ser falados), sendo que um dos algarismos ela não deve dizer, desafiando Benjamini com "Descubra!".

● Após o convidado concluir a sua participação, para espanto de todos, Benjamini imediatamente diz o algarismo que ele não falou.

Por exemplo:

● A pessoa escolhe o número 2485772.

● O número invertido é 2775842. Subtraindo: 2775842 – 2485772 = 0290070.

● O convidado, então, diz Zero, Dois, Nove, Zero, Zero, Descubra!, Zero.

● E o triunfante Benjamini, diz de imediato "Sete!", recebendo as suas merecidas palmas.

O segredo de Benjamini é que ele sabe que o número obtido após a subtração deve ser múltiplo de onze. E sabe também o critério de divisibilidade por onze:

> Seja $a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ a representação decimal de um número inteiro n. O número n é múltiplo de 11 se, e somente se, $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ é múltiplo de 11. Por exemplo: 4770216 é múltiplo de 11, pois $(6+2+7+4) - (1+0+7) = 11$ é um múltiplo de 11; já 5672109 não é múltiplo de 11, pois (9 + 1 + 7 + 5) – (0 + 2 + 6) = 14 não é múltiplo de 11.

Explicando o truque: 0290070 é múltiplo de 11, pois (0 + 0 + 9 + 0) – (7 + 0 + 2) = 0 que é múltiplo de 11.

a) Um membro da plateia disse: Quatro, Três, Dois, Zero, Descubra!, Cinco, Cinco.

Faça como o grande Benjamini e determine o algarismo que falta.

b) Um outro membro da plateia disse: Seis, Zero, Oito, Descubra!, Zero, Oito, Quatro. E Benjamini, para surpresa de todos, afirmou que não diria o algarismo porque o resultado da conta estava errado!

Baseado no critério de divisibilidade por onze, explique mais esse mistério envolvendo o maior dos matemágicos.

PROBLEMA 2

a) Pode-se provar que, para completar um álbum com N figurinhas, N suficientemente grande, é necessário comprar, em média, aproximadamente $N(0{,}58 + \ln N)$ figurinhas, algumas (muitas?) das quais repetidas.

Estime o número de figurinhas necessárias para completar o álbum da Pucca, que tem 170 figurinhas.

b) Pode-se também provar que, se K amigos decidem completar os seus K álbuns com N figurinhas, trocando entre si as repetidas, precisariam comprar ao todo, em média, cerca de $N(\ln N + (K-1)\ln(\ln N) + 0{,}58)$ figurinhas.

Amanda e Bemanda decidiram usar a estratégia acima para completar os seus álbuns da Pucca. Quantas figurinhas a menos cada uma compraria, em média?

Utilize, caso você queira, as aproximações $\ln 170 \cong 5{,}14$ e $\ln(\ln 170) \cong 1{,}64$.

PROBLEMA 3

Neste problema, resolveremos a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ utilizando a fórmula trigonométrica $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$.

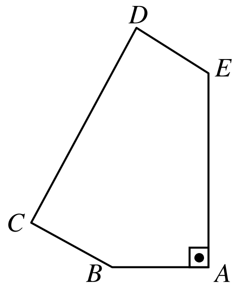
a) Fazendo $x = A\cos t$, obtemos $x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow A^3 \cos^3 t - 3A\cos t = -1$. Determine os valores da constante não nula A para que a última equação seja equivalente a $\cos 3t = B$, sendo B constante.

b) Encontre as três raízes da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Você pode utilizar o fato de que $\cos F = \cos G \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} F = G + k \cdot 360^\circ \\ \text{ou} \\ F = -G + k \cdot 360^\circ \end{array}\right., k \in Z$.

PROBLEMA 4

Seja $ABCDE$ um pentágono com $AB = BC = DE = 5$, $AE = 12$, $CD = 13$ e ângulo $B\hat{A}E$ reto.



Note que, somente com os dados acima, o pentágono não está unicamente determinado, já que, ao fixarmos os vértices A, B e E, podemos deslocar os lados BC, CD e DE, variando as posições dos vértices C e D.

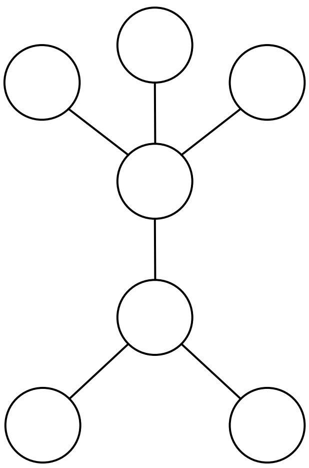
a) É possível que ocorra $AC = AE$? Justifique e, em caso afirmativo, calcule a área do pentágono $ABCDE$ nesse caso.

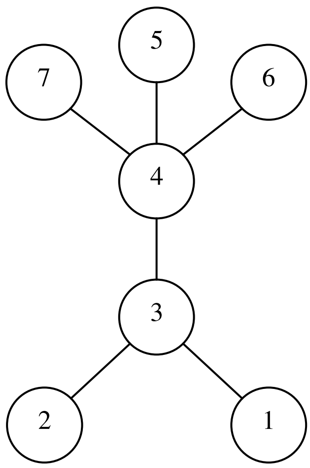
b) É possível que ocorra $AE = CE$? Justifique e, em caso afirmativo, calcule a área do pentágono $ABCDE$ nesse caso.

c) É possível que ocorra $AC = CE$? Justifique e, em caso afirmativo, calcule a área do pentágono $ABCDE$ nesse caso.

PROBLEMA 5

a) Determine o número de maneiras de colocar os números 1, 2, 3, ..., 7 dentro das circunferências de tal modo que, para cada par de circunferências ligadas por um segmento, o maior número seja colocado na circunferência de posição mais alta, como no exemplo da direita.





b) Encontre o número de permutações $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10})$ de 1, 2, 3, ..., 10 tais que $a_i > a_{2i}$ para $1 \le i \le 5$ e $a_i > a_{2i+1}$ para $1 \le i \le 4$.