XXXII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (8 de novembro de 2008)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1
Gustav Cerbas, pai de Arnald, tem uma forma interessante de estimular o seu filho a poupar.
Arnald guarda apenas moedas de R$1,00 e R$0,50 no seu cofrinho e Gustav troca as moedas guardadas por cédulas. As vantajosas trocas ocorrem de acordo com a tabela a seguir:

Valor poupado por Arnald	Valor recebido na troca
8 moedas de R$1,00	1 nota de R$10,00
9 moedas de R$0,50	1 nota de R$5,00

Por exemplo, se Arnald tiver 18 moedas de R$1,00 e 14 moedas de R$0,50, ele receberá duas notas de R$10,00 e uma nota de R$5,00. E ainda restarão 2 moedas de R$1,00 e 5 moedas de R$0,50 para ele.

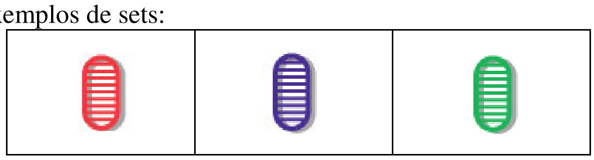
Arnald juntou R$69,00 em moedas. As quantidades de moedas de cada valor são iguais.
a) Quantas notas de R$10,00 e quantas notas de R$5,00 ele vai receber de seu pai?
b) Depois da troca, quantas moedas de cada valor sobrarão no cofrinho?
c) Na padaria do seu bairro, Arnald pode trocar uma moeda de R$1,00 por duas de R$0,50 ou duas de R$0,50 por uma de R$1,00. Considerando essa possibilidade, qual é o maior valor total, incluindo notas e moedas, que Arnald pode conseguir a partir dos 69 reais que tem inicialmente em seu cofrinho?

PROBLEMA 2
SET® é um jogo de cartas inventado em 1974 pela geneticista de populações Marsha Jean Falco. Ela estava estudando epilepsia em cães da raça pastor alemão e começou a representar as informações genéticas obtidas desenhando símbolos e então procurando padrões nos dados. Percebendo o potencial para transformar isso em um jogo desafiante e encorajada pela família e amigos, Marsha desenvolveu e passou a comercializar o SET.

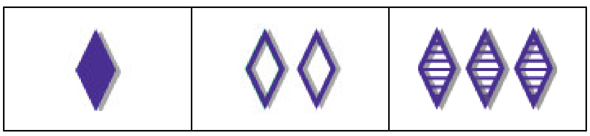
Em cada carta há uma figura na qual podem ser observadas quatro características com três possibilidades para cada uma:
- Quantidade – uma, duas ou três vezes o mesmo símbolo.
- Formato – três formatos distintos (veja as figuras a seguir).
- Cor – vermelho, verde ou azul.
- Preenchimento – total, parcial ou sem preenchimento.

São colocadas na mesa doze cartas e o objetivo do jogo é formar combinações (*sets*) de três cartas nas quais, para cada uma das quatro características, ou são todas iguais ou são todas diferentes.

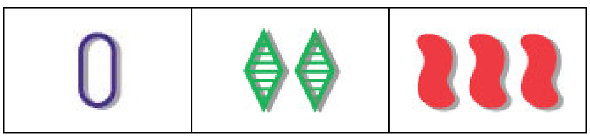
Veja exemplos de sets:



Quantidade: todas iguais (uma vez o símbolo)
Forma: todas iguais
Cor: todas diferentes
Preenchimento: todas iguais (parcial)

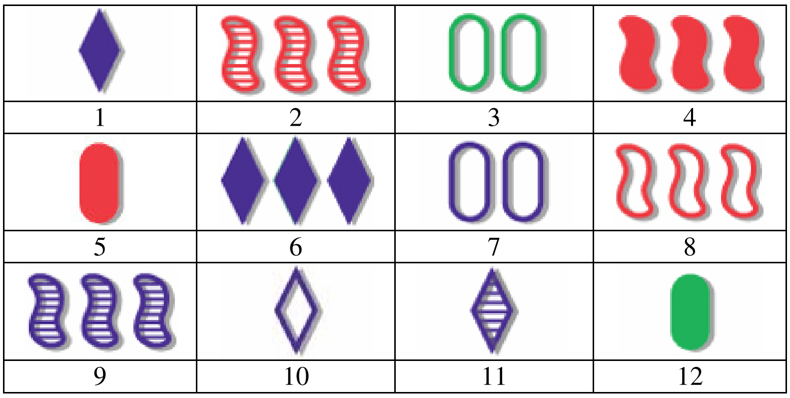


Quantidade: todas diferentes
Forma: todas iguais
Cor: todas iguais
Preenchimento: todas diferentes



Quantidade: todas diferentes
Forma: todas diferentes
Cor: todas diferentes
Preenchimento: todas diferentes

a) Há seis sets entre as doze cartas numeradas a seguir. Um deles é {2, 4, 8}. Liste os outros cinco sets. Para isso, não desenhe as cartas; utilize a numeração indicada.



Fonte: www.setgame.com

b) Considere um conjunto de 9 cartas de mesma cor e mesmo preenchimento. Quantos sets tem tal conjunto?

PROBLEMA 3

As pesquisas eleitorais são feitas com uma quantidade relativamente pequena de pessoas. Por exemplo, na eleição da cidade de São Paulo, costumam ser entrevistadas cerca de duas mil pessoas. Um número bem pequeno considerando que há aproximadamente 7,5 milhões de eleitores na cidade.

Neste problema, veremos que essa quantidade de pessoas é suficiente para se ter uma boa idéia dos percentuais de intenções de voto de cada candidato.

Em toda pesquisa eleitoral, é calculada a *margem de erro* das porcentagens de cada candidato. Por exemplo, se um candidato tem 23% com margem de erro de 3 pontos percentuais, então ele deve receber entre 23% – 3% = 20% e 23% + 3% = 26% dos votos. O cálculo da margem de erro E para cada candidato é baseado em conhecimentos de Estatística, sendo feito a partir da fórmula

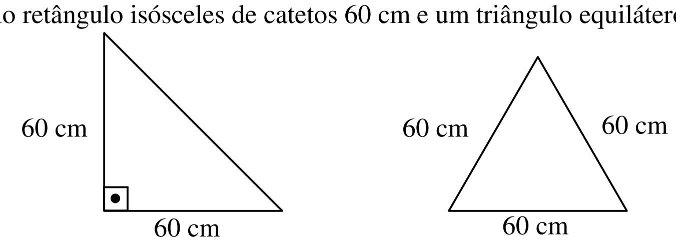
$$E = Z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\text{, em que}$$

- n é a quantidade de pessoas entrevistadas;
- p é a porcentagem de entrevistados que são favoráveis ao candidato;
- Z é um valor tabelado. O valor adotado pelos institutos de pesquisa é $Z = 1{,}96$, o qual assegura que, com 95% de certeza, a intenção de votos está dentro da margem de erro.

a) Suponha que em uma pesquisa foram entrevistadas 1600 pessoas e o candidato Obamaldo foi escolhido por 36% desse total. Calcule E nesse caso e determine o intervalo em que está o percentual de intenções de voto para Obamaldo.
b) Os institutos de pesquisa normalmente entrevistam 2500 pessoas para garantir uma margem de erro de no máximo 2 pontos percentuais. Quantas pessoas são necessárias para se garantir uma margem de erro de no máximo 1 ponto percentual?

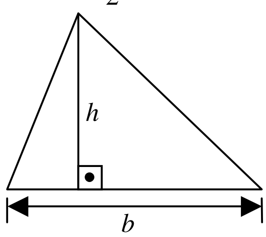
PROBLEMA 4

a) A seguir, exibimos um triângulo retângulo isósceles de catetos 60 cm e um triângulo equilátero de lado 60 cm.

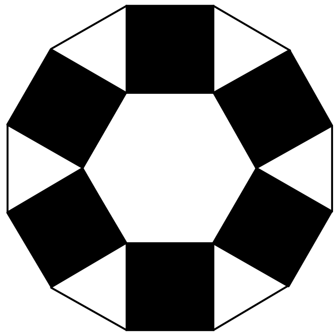


Qual das duas figuras tem área maior? Você não precisa calcular as áreas; basta dizer (e, é claro, justificar) qual é a maior.

Você pode querer utilizar o fato de que a área do triângulo é $\frac{b \cdot h}{2}$, *sendo b a base e h, a altura.*



Um arquiteto projetou a decoração do centro do chão de uma cozinha com a seguinte composição de pisos brancos (um hexágono regular e seis triângulos iguais) e pretos (seis quadrados iguais). O lado do quadrado é 60 cm.



b) Encontre as medidas dos ângulos internos de cada triângulo.
c) Na composição, qual das áreas totais é maior: a branca ou a preta?

PROBLEMA 5
Um baralho contendo cartas numeradas 1, 2, 3, …, $2n$ é embaralhado da seguinte forma:

- divide-se o monte de cartas na metade, formando-se dois montes: o primeiro com as n primeiras cartas e o segundo, com as n seguintes;
- intercalam-se as cartas dos dois montes, sempre começando do segundo monte.

Por exemplo, para $n = 3$ e as cartas estão inicialmente na ordem crescente e, embaralhando repetidas vezes, obtemos

1,2,3,4,5,6 → 4,1,5,2,6,3 → 2,4,6,1,3,5 → 1,2,3,4,5,6

Desembaralhatus!, como diria Parry Hotter. Após três embaralhadas o monte de cartas volta à ordem original!

A embaralhada pode ser representada através de diagramas:

Ou seja: Após cada uma das três embaralhadas, a 1ª carta é levada para a 2ª posição, a 2ª carta é levada para a 4ª posição, a 4ª carta é levada para a 1ª posição. E a 3ª carta é levada para a 6ª posição, a 6ª carta é levada para a 5ª posição e a 5ª carta é levada para a 3ª posição.

a) Desenhe os diagramas correspondentes para um baralho com 32 cartas ($n = 16$).
b) Qual é o número mínimo de embaralhadas que devem ser feitas para que um baralho com 32 cartas volte à ordem original?

XXXII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (8 de novembro de 2008)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

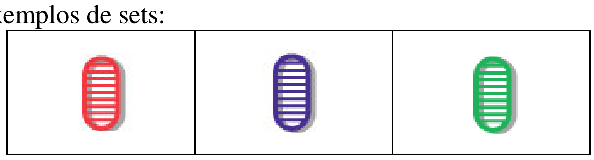
Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1
SET® é um jogo de cartas inventado em 1974 pela geneticista de populações Marsha Jean Falco. Ela estava estudando epilepsia em cães da raça pastor alemão e começou a representar as informações genéticas obtidas desenhando símbolos e então procurando padrões nos dados. Percebendo o potencial para transformar isso em um jogo desafiante e encorajada pela família e amigos, Marsha desenvolveu e passou a comercializar o SET.

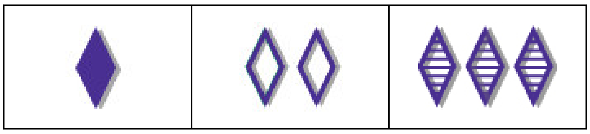
Em cada carta há uma figura na qual podem ser observadas quatro características com três possibilidades para cada uma:
- Quantidade – uma, duas ou três vezes o mesmo símbolo.
- Formato – três formatos distintos (veja as figuras a seguir).
- Cor – vermelho, verde ou azul.
- Preenchimento – total, parcial ou sem preenchimento.

São colocadas na mesa doze cartas e o objetivo do jogo é formar combinações (*sets*) de três cartas nas quais, para cada uma das quatro características, ou são todas iguais ou são todas diferentes.

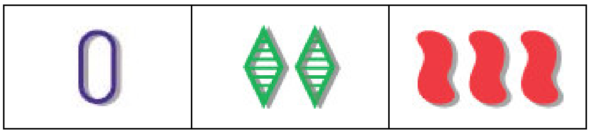
Veja exemplos de sets:



Quantidade: todas iguais (uma vez o símbolo)
Forma: todas iguais
Cor: todas diferentes
Preenchimento: todas iguais (parcial)

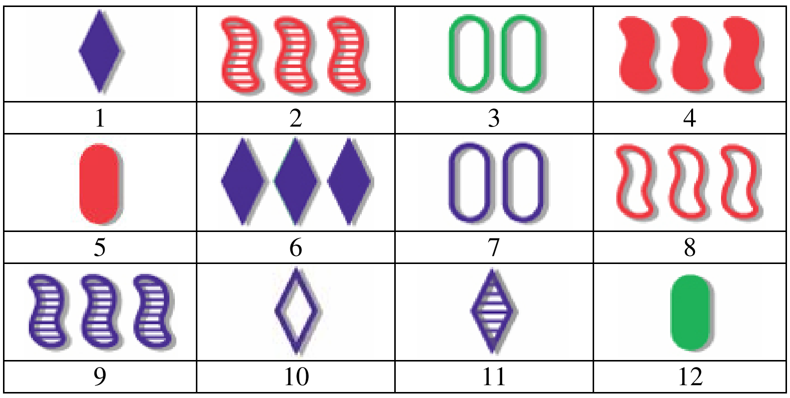


Quantidade: todas diferentes
Forma: todas iguais
Cor: todas iguais
Preenchimento: todas diferentes



Quantidade: todas diferentes
Forma: todas diferentes
Cor: todas diferentes
Preenchimento: todas diferentes

a) Há seis sets entre as doze cartas numeradas a seguir. Um deles é {2, 4, 8}. Liste os outros cinco sets. Para isso, não desenhe as cartas; utilize a numeração indicada.



Fonte: www.setgame.com

b) Considere um conjunto de 9 cartas de mesma cor e mesmo preenchimento. Quantos sets tem tal conjunto?

PROBLEMA 2
As pesquisas eleitorais são feitas com uma quantidade relativamente pequena de pessoas. Por exemplo, na eleição da cidade de São Paulo, costumam ser entrevistadas cerca de duas mil pessoas. Um número bem pequeno considerando que há aproximadamente 7,5 milhões de eleitores na cidade.

Neste problema, veremos que essa quantidade de pessoas é suficiente para se ter uma boa idéia dos percentuais de intenções de voto de cada candidato.

Em toda pesquisa eleitoral, é calculada a *margem de erro* das porcentagens de cada candidato. Por exemplo, se um candidato tem 23% com margem de erro de 3 pontos percentuais, então ele deve receber entre 23% – 3% = 20% e 23% + 3% = 26% dos votos. O cálculo da margem de erro E para cada candidato é baseado em conhecimentos de Estatística, sendo feito a partir da fórmula

$$E = Z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \text{, em que}$$

- n é a quantidade de pessoas entrevistadas;
- p é a porcentagem de entrevistados que são favoráveis ao candidato;
- Z é um valor tabelado. O valor adotado pelos institutos de pesquisa é $Z = 1{,}96$, o qual assegura que, com 95% de certeza, a intenção de votos está dentro da margem de erro.

a) Suponha que em uma pesquisa foram entrevistadas 1600 pessoas e o candidato Obamaldo foi escolhido por 36% desse total. Calcule E nesse caso e determine o intervalo em que está o percentual de intenções de voto para Obamaldo.
b) Os institutos de pesquisa normalmente entrevistam 2500 pessoas para garantir uma margem de erro de no máximo 2 pontos percentuais. Quantas pessoas são necessárias para se garantir uma margem de erro de no máximo 1 ponto percentual?

PROBLEMA 3
Considere um tabuleiro com 3 linhas e 3 colunas. Em cada casa do tabuleiro é colocado um número inteiro positivo. O tabuleiro é chamado *quadrado mágico* quando as somas dos números em cada uma das três colunas, em cada uma das três linhas e nas duas diagonais são todas iguais. Um exemplo de quadrado mágico é

Q_1

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Note que, de fato,

$$2 + 7 + 6 = 9 + 5 + 1 = 4 + 3 + 8 = 15$$
$$2 + 9 + 4 = 7 + 5 + 3 = 6 + 1 + 8 = 15$$
$$2 + 5 + 8 = 4 + 5 + 6 = 15$$

a) Seja a inteiro maior do que 2. Complete o quadrado mágico a seguir no bloco de resoluções.

Q_2

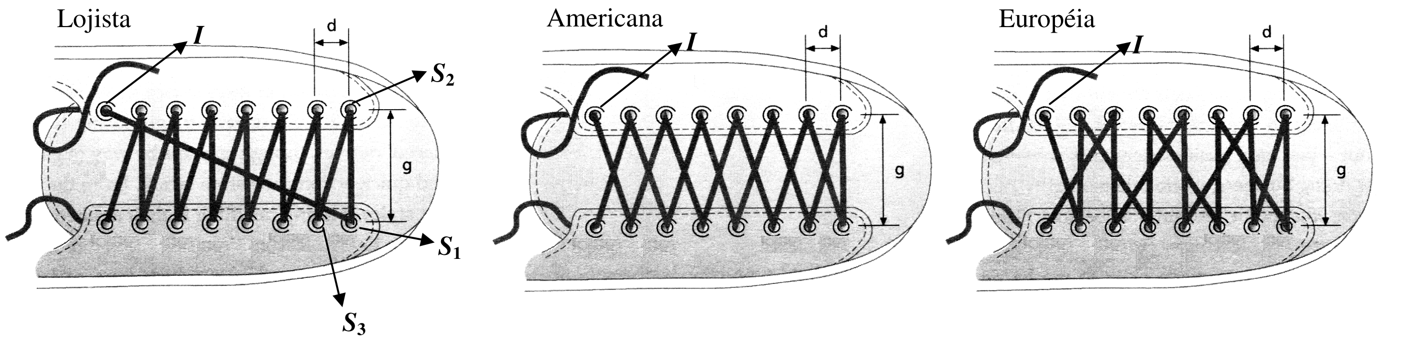
$a + 1$		$2a - 3$
	a	
		$a - 1$

b) Considere agora o produto dos números de cada linha, coluna e diagonal. Em Q_1, a soma dos produtos das linhas é $2 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 8 = 225$, a soma dos produtos das colunas é $2 \cdot 9 \cdot 4 + 7 \cdot 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \cdot 8 = 225$ e a soma dos produtos das diagonais é $2 \cdot 5 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 200$.
Mostre que, em Q_2, a soma dos produtos das linhas é igual à soma dos produtos das colunas.

c) Encontre a de modo que, em Q_2, as somas dos produtos das linhas, das colunas e das diagonais são todas iguais.

PROBLEMA 4

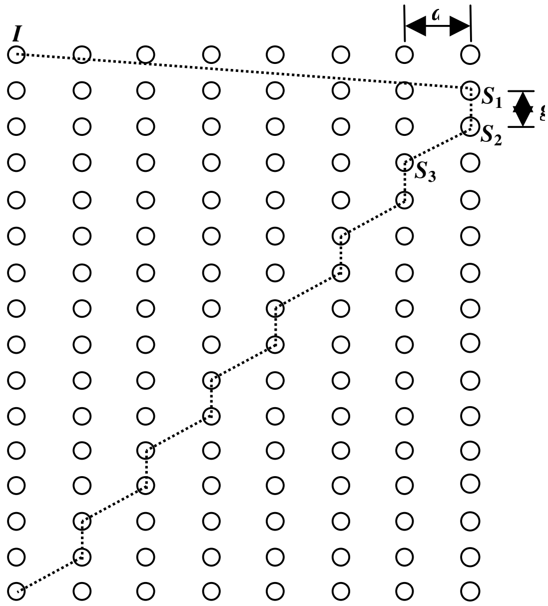
Os fabricantes constantemente desenham novas maneiras de passar o cadarço (acredite, essa é a palavra) nos seus tênis. Abaixo mostramos três formas famosas, chamadas *Lojista*, *Americana* e *Européia*.



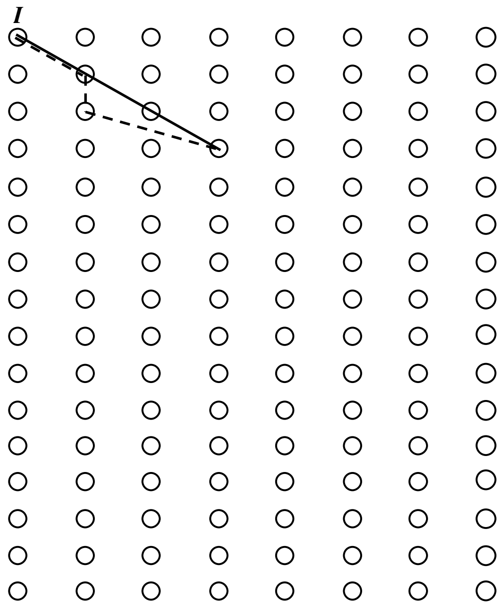
Fonte: *How to Cut a Cake*, Ian Stewart

Fica então a pergunta: dentre as três, qual utiliza menos cadarço? Nesse problema, mostraremos uma maneira de obter a resposta.

Abaixo representamos as passadas do cadarço na forma *Lojista*. A primeira linha de círculos representa os oito furos superiores do tênis (veja a figura acima) e a segunda linha, os oito furos inferiores. As próximas linhas representam, alternadamente, os furos superiores e inferiores. Ou seja: a terceira linha representa novamente os furos superiores; a quarta, os furos inferiores, e assim por diante. O cadarço é representado por uma linha pontilhada. Observe a presença dos pontos I, S_1, S_2 e S_3 em ambas as figuras.



a) Agora é a sua vez! Continue, no bloco de resoluções, a representação das passadas do cadarço nas formas *Americana* (—) e *Européia* (- - -).



b) Qual das duas formas, a *Americana* ou a *Européia*, utiliza menos cadarço, sabendo que a parte deixada para se amarrar é a mesma nos dois? Não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 5

O primeiro termo de uma seqüência numérica é 1. O n-ésimo termo, $n \geq 2$, é obtido da seguinte forma: se o maior divisor ímpar de n deixa resto 1 na divisão por 4, então somamos 1 ao termo anterior; se o maior divisor ímpar de n deixa resto 3 na divisão por 4, então subtraímos 1 do termo anterior.

Acompanhe o cálculo dos primeiros termos da seqüência. Lembre-se que o primeiro termo é 1.

n	Maior divisor ímpar de n	Resto do divisor na divisão por 4	Soma 1 ou subtrai 1?	Anterior $\pm$ 1 = n-ésimo termo
2	1	1	+1	1 + 1 = 2
3	3	3	–1	2 – 1 = 1
4	1	1	+1	1 + 1 = 2
5	5	1	+1	2 + 1 = 3
6	3	3	–1	3 – 1 = 2
7	7	3	–1	2 – 1 = 1
8	1	1	+1	1 + 1 = 2
9	9	1	+1	2 + 1 = 3
10	5	1	+1	3 + 1 = 4
11	11	3	–1	4 – 1 = 3

Isto é, os onze primeiros termos da seqüência são 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3.

Observe agora as tabelas abaixo.

n	9	10	11	12	13	14	15	16
Soma 1 ou subtrai 1?	+1	+1	–1	–1	+1	–1	–1	+1

n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Soma 1 ou subtrai 1?	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	–1	+1

Vemos que a seqüência na qual aparecem os +1 e –1 na primeira tabela (+1, +1, –1, –1, +1, –1, –1, +1) é exatamente a mesma em que eles aparecem na parte destacada da segunda. E podemos perceber ainda que as quantidades de +1 e –1 nos intervalos dados são iguais: 4 de cada no intervalo de 9 a 16 e 8 de cada no intervalo de 17 a 32.

a) Calcule o 2^k-ésimo termo, com k inteiro positivo.

b) Determine a posição de um termo da seqüência que é igual a 10 (existem infinitos!).

XXXII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (8 de novembro de 2008)
Nível γ(1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Muitas vezes queremos calcular a probabilidade condicional $P(A \mid B)$ de ocorrer um evento *A* sabendo que ocorreu o evento *B*, mas temos a probabilidade de ocorrer *B* sabendo que ocorreu *A*, $P(B \mid A)$. Nesses casos, podemos aplicar o *teorema de Bayes*:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid \overline{A}) \cdot P(\overline{A})}$$

em que $\overline{A}$ é o complementar de *A*, ou seja, $\overline{A} = \{x : x \notin A\}$.

Uma das aplicações mais recentes do teorema de Bayes é nos filtros de spam utilizados em e-mails. O filtro é treinado para barrar um e-mail que potencialmente é spam a partir das palavras contidas nele. Utilizando o teorema de Bayes, o filtro determina a probabilidade de o e-mail ser spam e, dependendo do valor encontrado, o coloca automaticamente na pasta de spam.

Considere os seguintes eventos:
- *S*: o e-mail é spam;
- *M*: o e-mail contém a palavra “emagreça”;

Suponha que:
- A probabilidade de um e-mail ser spam é $P(S) = 30\%$;
- A probabilidade de um spam conter a palavra “emagreça” é $P(M \mid S) = 40\%$;
- A probabilidade de um e-mail que não é spam conter a palavra “emagreça” é $P(M \mid \overline{S}) = 1\%$.

Calcule:

a) A probabilidade $P(\overline{M} \mid \overline{S})$ de um e-mail que não é spam não conter a palavra “emagreça”.

b) A probabilidade $P(S \mid M)$ de um e-mail que contém a palavra “emagreça” ser spam.

c) A probabilidade $P(S \mid \overline{M})$ de um e-mail que não contém a palavra “emagreça” ser spam.

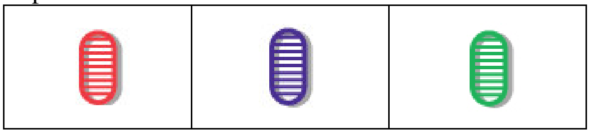
PROBLEMA 2

SET® é um jogo de cartas inventado em 1974 pela geneticista de populações Marsha Jean Falco. Ela estava estudando epilepsia em cães da raça pastor alemão e começou a representar as informações genéticas obtidas desenhando símbolos e então procurando padrões nos dados. Percebendo o potencial para transformar isso em um jogo desafiante e encorajada pela família e amigos, Marsha desenvolveu e passou a comercializar o SET.

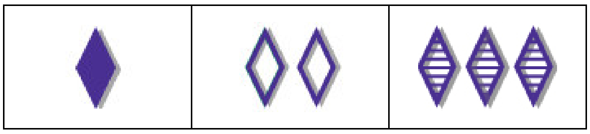
Em cada carta há uma figura na qual podem ser observadas quatro características com três possibilidades para cada uma:
- Quantidade – uma, duas ou três vezes o mesmo símbolo.
- Formato – três formatos distintos (veja as figuras a seguir).
- Cor – vermelho, verde ou azul.
- Preenchimento – total, parcial ou sem preenchimento.

São colocadas na mesa doze cartas e o objetivo do jogo é formar combinações (*sets*) de três cartas nas quais, para cada uma das quatro características, ou são todas iguais ou são todas diferentes.

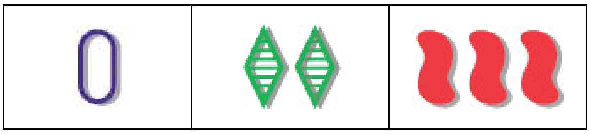
Veja exemplos de sets:



Quantidade: todas iguais (uma vez o símbolo)
Forma: todas iguais
Cor: todas diferentes
Preenchimento: todas iguais (parcial)

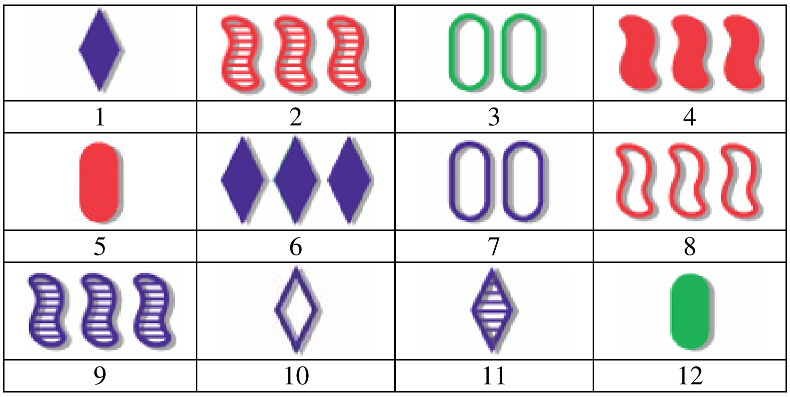


Quantidade: todas diferentes
Forma: todas iguais
Cor: todas iguais
Preenchimento: todas diferentes



Quantidade: todas diferentes
Forma: todas diferentes
Cor: todas diferentes
Preenchimento: todas diferentes

a) Há seis sets entre as doze cartas numeradas a seguir. Um deles é {2, 4, 8}. Liste os outros cinco sets. Para isso, não desenhe as cartas; utilize a numeração indicada.



Fonte: www.setgame.com

b) Considere um conjunto de 9 cartas de mesma cor e mesmo preenchimento. Quantos sets tem tal conjunto?
c) Existe um conjunto de 9 cartas que possui mais sets do que os conjuntos descritos no item anterior? Não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 3
Um dos mais importantes resultados da teoria de matrizes é o *Teorema de Cayley-Hamilton*:

> *Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais. Denominamos* $p(x) = \det(xI_n - A)$ *polinômio característico de A, sendo* I_n *a identidade de ordem* n. *Então* $p(A) = 0_n$, *em que* 0_n *é a matriz nula de ordem n.*

Para $n = 2$ pode-se verificar que o polinômio característico de A é $p(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$, em que $\text{tr}(A)$ é o traço da matriz A, isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal, e $\det(A)$ é o determinante da matriz A.

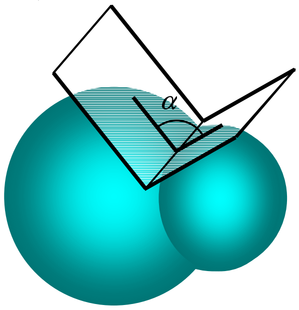
a) Prove o Teorema de Cayley-Hamilton para $n = 2$, ou seja, mostre que $A^2 - \text{tr}(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = 0_2$.
Atenção: A igualdade $p(A) = \det(A \cdot I_2 - A)$ não tem sentido, pois $p(A)$ é uma matriz e $\det(A \cdot I_2 - A)$ é um número. Isto é, a demonstração **<u>não</u>** é assim (não mesmo!)

b) Considere as equações da forma $aX^2 + bX + cI_2 = 0_2$, em que a incógnita X é uma matriz quadrada de ordem 2, a, b e c são parâmetros reais e $a \neq 0$.

Tais equações sempre possuem soluções com todas as entradas reais?

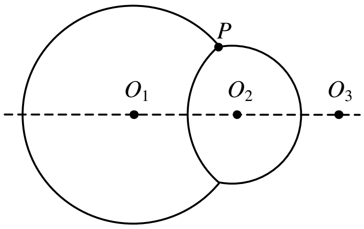
PROBLEMA 4

Embora a maior parte da Matemática estudada no Ensino Médio tenha sido desenvolvida há pelo menos três séculos, os matemáticos seguem trabalhando em busca de novos resultados. Um deles foi demonstrado em 2000, e é conhecido como *teorema da bolha dupla*: a superfície de área mínima que delimita duas regiões de volumes V_1 e V_2 no espaço é formada por duas superfícies esféricas, separadas por uma terceira superfície esférica, tal como duas bolhas de sabão.



Ângulo entre duas superfícies é o ângulo formado entre os planos tangentes às duas superfícies em sua interseção. O ângulo entre quaisquer duas das três superfícies esféricas citadas no teorema é $\alpha = 120$ graus.

a) Abaixo mostramos uma secção longitudinal das três superfícies.



Sendo O_1, O_2 e O_3 os centros das superfícies esféricas e P um ponto comum às três superfícies, calcule a medida do ângulo $O_1\hat{P}O_2$.

b) Sejam r, s e t os raios das superfícies esféricas, sendo t o menor. Prove que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t}$.

PROBLEMA 5

O primeiro termo de uma seqüência numérica é 1. O n-ésimo termo, $n \geq 2$, é obtido da seguinte forma: se o maior divisor ímpar de n deixa resto 1 na divisão por 4, então somamos 1 ao termo anterior; se o maior divisor ímpar de n deixa resto 3 na divisão por 4, então subtraímos 1 do termo anterior.

Acompanhe o cálculo dos primeiros termos da seqüência. Lembre-se que o primeiro termo é 1.

n	Maior divisor ímpar de n	Resto do divisor na divisão por 4	Soma 1 ou subtrai 1?	Anterior $\pm$ 1 = n-ésimo termo
2	1	1	+1	1 + 1 = 2
3	3	3	–1	2 – 1 = 1
4	1	1	+1	1 + 1 = 2
5	5	1	+1	2 + 1 = 3
6	3	3	–1	3 – 1 = 2
7	7	3	–1	2 – 1 = 1
8	1	1	+1	1 + 1 = 2
9	9	1	+1	2 + 1 = 3
10	5	1	+1	3 + 1 = 4
11	11	3	–1	4 – 1 = 3

Isto é, os onze primeiros termos da seqüência são 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3.

Observe agora as tabelas abaixo.

n	9	10	11	12	13	14	15	16
Soma 1 ou subtrai 1?	+1	+1	–1	–1	+1	–1	–1	+1

n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Soma 1 ou subtrai 1?	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	–1	+1

Vemos que a seqüência na qual aparecem os +1 e –1 na primeira tabela (+1, +1, –1, –1, +1, –1, –1, +1) é exatamente a mesma em que eles aparecem na parte destacada da segunda. E podemos perceber ainda que as quantidades de +1 e –1 nos intervalos dados são iguais: 4 de cada no intervalo de 9 a 16 e 8 de cada no intervalo de 17 a 32.

a) Calcule o 2^k-ésimo termo, com k inteiro positivo.

b) Prove que todos os termos da seqüência são positivos.

c) Existe algum termo da seqüência igual a 2008?