XXXII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (16 de agosto de 2008)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A Páscoa é celebrada no primeiro domingo após a primeira Lua cheia do Outono e pode ocorrer entre 22 de março e 25 de abril. Existem vários métodos para determinar o dia em que o domingo de Páscoa cai. Um deles é o *método de Gauss*, descrito a seguir para os anos no intervalo de 1901 a 2099. Sejam

- A o resto da divisão do ano por 19;
- B o resto da divisão do ano por 4;
- C o resto da divisão do ano por 7;
- D o resto da divisão de $19A+24$ por 30;
- E o resto da divisão de $2B+4C+6D+5$ por 7.

Desta forma:

- Se $D+E>9$, então o dia é $D+E-9$ e o mês é abril.
- Caso contrário, o dia é $D+E+22$ e o mês é março.

Em que dia e mês será o domingo de Páscoa em 2077, ano do centenário da OPM?

PROBLEMA 2

Um desafio clássico utilizando um tabuleiro de xadrez é o *Passeio do Cavalo*: percorrer todas as casas do tabuleiro utilizando um cavalo. Uma solução está exibida ao lado na qual o número 1 indica a casa inicialmente ocupada pelo cavalo; o número 2, a casa ocupada após a primeira jogada; o número 3, a casa ocupada após a segunda jogada; e assim por diante, até a casa 64, ocupada após a 63ª e última jogada. Observe que o cavalo parou em cada uma das 64 casas do tabuleiro.

46	55	44	19	58	9	22	7
43	18	47	56	21	6	59	10
54	45	20	41	12	57	8	23
17	42	53	48	5	24	11	60
52	3	32	13	40	61	34	25
31	16	49	4	33	28	37	62
2	51	14	29	64	39	26	35
15	30	1	50	27	36	63	38

Passeio do Cavalo

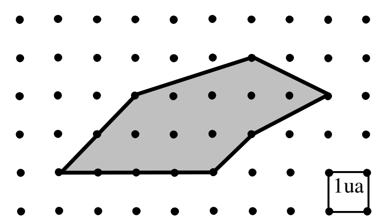
Diamantino resolveu inventar uma variação desse desafio, o *Passeio da Torre*: a torre, que em cada jogada se move quantas casas o jogador quiser em uma das direções horizontal ou vertical, deve percorrer todas as casas do tabuleiro. Mas ele percebeu que isso era muito simples e resolveu mudar o desafio acrescentando as seguintes condições:

- A casa inicial e também a última casa em que a torre deve parar estão marcadas.
- Do segundo movimento em diante, um movimento deve ter sempre direção diferente do anterior. Ou seja, após um movimento na horizontal, o movimento seguinte deve ser na vertical; após um movimento na vertical, o próximo movimento deve ser na horizontal.
- O tabuleiro é 6×6, pois ele não é tão paciente quanto sua irmã Esmeralda.

Agora é a sua vez! Resolva o desafio de Diamantino. No tabuleiro impresso na folha anexa, onde a casa de partida da torre está marcada com o número 1 e a última casa em que a torre deve parar está marcada com o número 36, marque os números de 2 a 35 indicando as casas onde a torre pára após cada um dos seus movimentos.

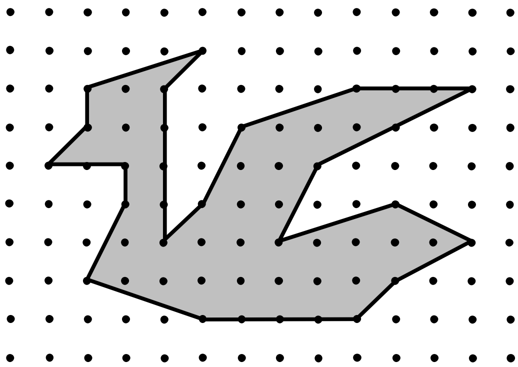
PROBLEMA 3

Polígonos com todos os vértices sobre os pontos de um reticulado podem ter a sua área calculada pela *Fórmula de Pick*: sendo ***i*** o número de pontos do reticulado no interior do polígono e ***b*** o número de pontos do reticulado sobre os lados do polígono, então a área do polígono é $A=i+\frac{b}{2}-1$, sendo a unidade (u.a.) a área dos menores quadradinhos formados pelo reticulado.



Por exemplo, a figura destacada ao lado tem $i=7$ e $b=10$; logo sua área é $A=7+\frac{10}{2}-1=11$ u.a.

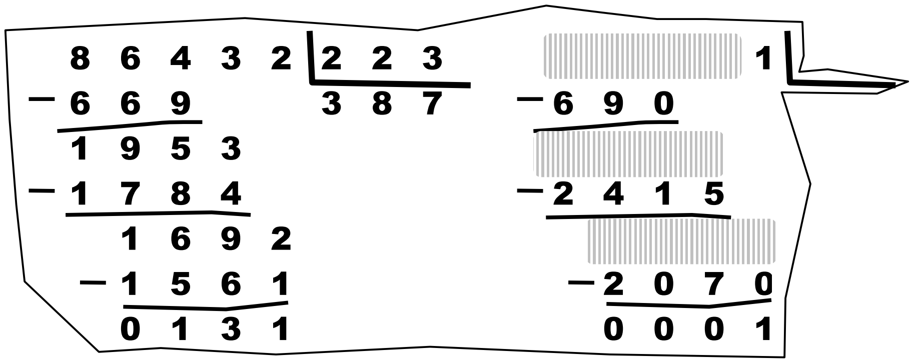
(a) Lara desenhou um pato apenas ligando os pontos de um reticulado. Determine a área ocupada pelo desenho.



(b) Desenhe no reticulado impresso na folha anexa um polígono de área 10 u.a. com a quantidade mínima de pontos sobre os seus lados, ou seja, com *b* mínimo.

PROBLEMA 4

Esmeralda fez a lição de casa, mas o cachorro dela, Totopázio, rasgou a folha que ela deveria entregar. A lição de casa de Esmeralda pedia para dividir números de cinco algarismos por números de três algarismos. Um dos pedaços rasgados está exibido a seguir, com algumas partes borradas.

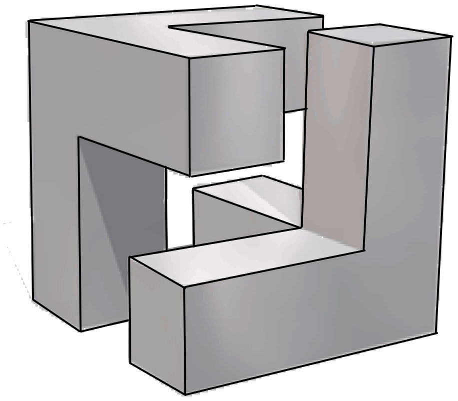


(a) Calcule mdc(690; 2415; 2070).

(b) Sabendo que Esmeralda acertou as divisões, determine o dividendo e o divisor da conta da direita.

PROBLEMA 5

Uma das esculturas do artista brasileiro *Franz Weissmann* é o *Cubo Virtual*:



Considerando que cada uma das peças que compõem a escultura foi montada com 7 cubos maciços e iguais, todos de aresta 3 cm, quantos cubos maciços de aresta 1 cm devem ser acrescentados ao Cubo Virtual para se obter um cubo maciço de aresta 9 cm?

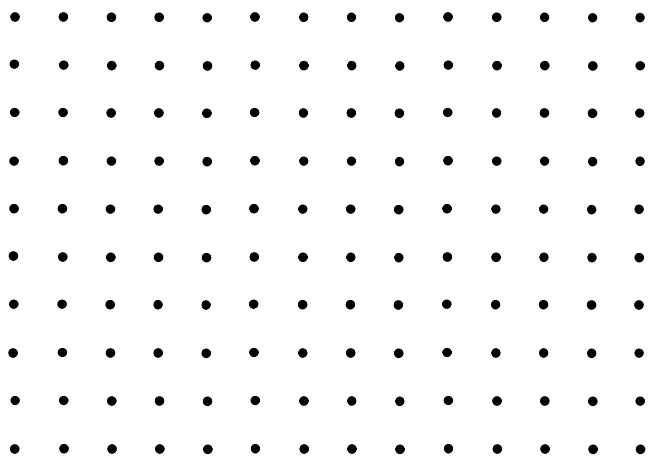
Nome: ____

PROBLEMA 2

1					
36					

Passeio da Torre

PROBLEMA 3



XXXII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (16 de agosto de 2008)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A Páscoa é celebrada no primeiro domingo após a primeira Lua cheia do Outono e pode ocorrer entre 22 de março e 25 de abril. Existem vários métodos para determinar o dia em que o domingo de Páscoa cai. Um deles é o método de Gauss, descrito a seguir para os anos no intervalo de 1901 a 2099. Sejam

- A o resto da divisão do ano por 19;
- B o resto da divisão do ano por 4;
- C o resto da divisão do ano por 7;
- D o resto da divisão de $19A+24$ por 30;
- E o resto da divisão de $2B+4C+6D+5$ por 7.

Desta forma:

- Se $D+E>9$, então o dia é $D+E-9$ e o mês é abril.
- Caso contrário, o dia é $D+E+22$ e o mês é março.

Em que dia e mês será o domingo de Páscoa em 2077, ano do centenário da OPM?

PROBLEMA 2

Um desafio clássico utilizando um tabuleiro de xadrez é o *Passeio do Cavalo*: percorrer todas as casas do tabuleiro utilizando um cavalo. Uma solução está exibida ao lado na qual o número 1 indica a casa inicialmente ocupada pelo cavalo; o número 2, a casa ocupada após a primeira jogada; o número 3, a casa ocupada após a segunda jogada; e assim por diante, até a casa 64, ocupada após a 63ª e última jogada. Observe que o cavalo parou em cada uma das 64 casas do tabuleiro.

46	55	44	19	58	9	22	7
43	18	47	56	21	6	59	10
54	45	20	41	12	57	8	23
17	42	53	48	5	24	11	60
52	3	32	13	40	61	34	25
31	16	49	4	33	28	37	62
2	51	14	29	64	39	26	35
15	30	1	50	27	36	63	38

Passeio do Cavalo

Diamantino resolveu inventar uma variação desse desafio, o *Passeio da Torre*: a torre, que em cada jogada se move quantas casas o jogador quiser em uma das direções horizontal ou vertical, deve percorrer todas as casas do tabuleiro. Mas ele percebeu que isso era muito simples e resolveu mudar o desafio acrescentando as seguintes condições:

- A casa inicial e também a última casa em que a torre deve parar estão marcadas.
- Do segundo movimento em diante, um movimento deve ter sempre direção diferente do anterior. Ou seja, após um movimento na horizontal, o movimento seguinte deve ser na vertical; após um movimento na vertical, o próximo movimento deve ser na horizontal.
- O tabuleiro é 6×6, pois ele não é tão paciente quanto sua irmã Esmeralda.

Agora é a sua vez! Resolva o desafio de Diamantino. No tabuleiro impresso na folha anexa, onde a casa de partida da torre está marcada com o número 1 e a última casa em que a torre deve parar está marcada com o número 36, marque os números de 2 a 35 indicando as casas onde a torre pára após cada um dos seus movimentos.

PROBLEMA 3

Os números reais a, b e c são tais que $a + b + c = 15$ e $ab + bc + ca = 75$.

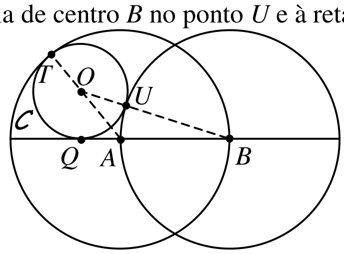
(a) Determine $a^2 + b^2 + c^2$.

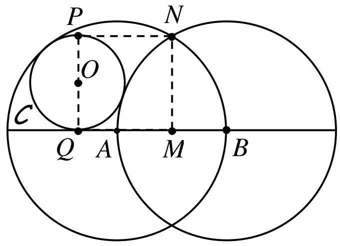
(b) Calcule $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.

(c) Encontre os valores de a, b e c.

PROBLEMA 4

Sejam A e B dois pontos no plano tais que $AB = 2$. Considere duas circunferências: uma tem centro em A e passa por B e a outra tem centro em B e passa por A. A circunferência $\mathcal{C}$, de centro O, é tangente internamente à circunferência de centro em A no ponto T, externamente à circunferência de centro B no ponto U e à reta AB no ponto Q.





Sejam M o ponto médio do segmento AB, N uma interseção das circunferências de centros A e B e PQ um diâmetro da circunferência $\mathcal{C}$, como mostra a figura acima. Sejam também r o raio de $\mathcal{C}$ e $x = AQ$.

(a) Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BOQ, obtenha r em função de x.

(b) Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AOQ e considerando o resultado do item (a), calcule r e x.

(c) Prove que $MNPQ$ é um quadrado. Você pode querer utilizar o fato de que a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

PROBLEMA 5

Dizemos que um inteiro positivo n é *semiperfeito* se ele é a soma de um subconjunto de seus divisores positivos menores do que n. Por exemplo, 20 é semiperfeito pois $20 = 10 + 5 + 4 + 1$.

(a) Mostre que 945 é semiperfeito, ou seja, apresente um subconjunto de divisores positivos menores do que 945 cuja soma é 945.

(b) Prove que todo número semiperfeito ímpar tem mais de sete divisores positivos.

 Entregue esta folha junto com as Folhas de Respostas.

Nome: ____

PROBLEMA 2

1					
36					

Passeio da Torre

XXXII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (16 de agosto de 2008)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em 1956, o norte-americano M. K. Hubbert publicou um artigo sobre as reservas de petróleo nos Estados Unidos, e previu que a extração anual de petróleo no país atingiria o seu máximo em 1970 e depois decairia. A previsão de Hubbert mostrou-se correta, e ele tornou-se famoso por isso.

Hubbert utilizou uma *função logística* para obter a sua descoberta. Funções logísticas são da forma $f(x)=\dfrac{A}{1+e^{-B(x-C)}}$, em que A, B e C são constantes reais e e é a constante de Euler, $e \cong 2{,}718$. Na teoria de Hubbert, $f(x)$ é o total de petróleo cru extraído em um certo país até o ano x. A constante A representa as reservas de petróleo no país em questão. Para os Estados Unidos, as estimativas obtidas por Hubbert foram A = 200 gigabarris (1 gigabarril = 10^9 barris), B = 0,06 e C = 1970.

(a) Calcule a previsão da quantidade de petróleo extraído até 2000.
(b) Determine o erro percentual da previsão em relação ao valor correto, que é cerca de 180 gigabarris.

Você pode querer utilizar a aproximação $e^{1,8} \cong 6$.

PROBLEMA 2

Considere n retas no plano concorrentes duas a duas e tais que não há 3 que se interceptam no mesmo ponto. Seja a_n o número de regiões em que tais retas dividem o plano. Temos, por exemplo, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 11$ e $a_5 = 16$.

Mostraremos agora um recurso muito útil no estudo de seqüências: a *tabela de diferenças*. Na primeira linha escrevemos os termos da seqüência, na segunda a diferença entre os termos consecutivos da primeira linha, na terceira a diferença entre termos consecutivos da segunda linha e assim por diante. Por exemplo, para a_n as três primeiras linhas da tabela de diferenças são:

2		4		7		11		16	…
	2		3		4		5	…	
		1		1		1	…		

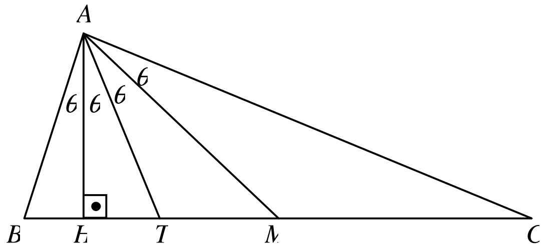
E podemos observar que $a_k - a_{k-1} = k$, $k > 1$ (*).

(a) Fazendo um desenho, mostre que $a_5 = 16$.
(b) Somando as equações (*) para $2 \le k \le n$, obtenha a_n.

Você pode querer utilizar que a soma da PA $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ é $b_1 + b_2 + \cdots + b_m = \dfrac{(b_1+b_m)m}{2}$.

PROBLEMA 3

No triângulo ABC, a altura AH, a bissetriz AT e a mediana AM dividem o ângulo $B\hat{A}C$ em quatro ângulos de mesma medida θ.



(a) Mostre que $AM = \dfrac{BM \cos\theta}{\operatorname{sen} 3\theta} = \dfrac{CM \cos 3\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

(b) Encontre as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

Você pode querer utilizar as seguintes fórmulas:

- $\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$
- $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} A = B + k \cdot 360^\circ \\ \text{ou} \\ A = 180^\circ - B + k \cdot 360^\circ \end{array} \right. , k \in Z$

PROBLEMA 4

Dizemos que um inteiro positivo n é *semiperfeito* se ele é a soma de um subconjunto de seus divisores positivos menores do que n. Por exemplo, 20 é semiperfeito pois 20 = 10 + 5 + 4 + 1.

(a) Mostre que 945 é semiperfeito, ou seja, apresente um subconjunto de divisores positivos menores do que 945 cuja soma é 945.

(b) Prove que todo número semiperfeito ímpar tem mais de sete divisores positivos.

PROBLEMA 5

A permutação $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de 1, 2, 3, …, n pode ser representada como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

e observamos que 1 é levado a a_1, 2 é levado a a_2, 3 a a_3, etc.

Há, assim, uma outra maneira de representar permutações. Por exemplo, na permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 4 & 7 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

temos que o 1 é levado ao 8; o 8, por sua vez, é levado ao 6; o 6 ao 2 e do 2 volta-se para o 1, completando o que passaremos a chamar de *ciclo*. Começando agora pelo 3, menor número que não aparece no ciclo anterior, temos $3 \to 4 \to 7 \to 3$, fechando mais um ciclo. Finalmente temos um último ciclo formado apenas pelo 5, que é levado a ele mesmo. Tais características da permutação dada podem ser resumidas escrevendo $(1 \quad 8 \quad 6 \quad 2)(3 \quad 4 \quad 7)(5)$. Em tal notação, vale a pena observar a importância dos parênteses: $(1 \quad 8 \quad 6 \quad 2 \quad 3)(4 \quad 7 \quad 5)$, por exemplo, é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 1 & 7 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

diferente da inicial.

Dizemos que as permutações apresentadas têm, respectivamente, 3 e 2 ciclos.

Seja $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ o número de permutações de 1, 2, 3, …, n com exatamente k ciclos.

(a) Calcule $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(b) Determine $\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Prove que $\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n! \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$.