XXXI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (10 de novembro de 2007)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

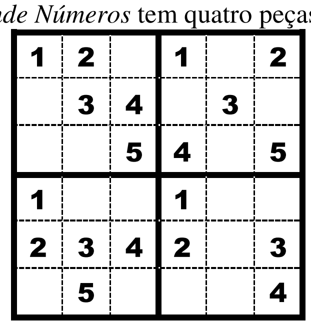
www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

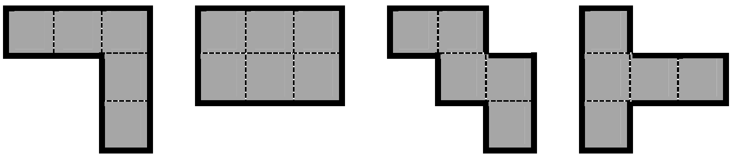
Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O jogo *Esconde Números* tem quatro peças e um tabuleiro dividido em quatro regiões com números pintados, como mostra a figura.



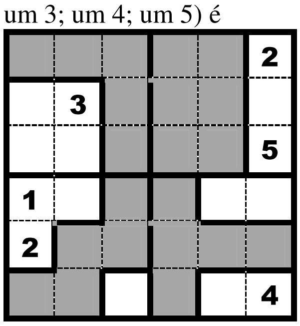
Tabuleiro



Peças

Além do tabuleiro e das peças, o jogo tem cartelas com desafios. Cada desafio corresponde a uma coleção de números, possivelmente com números repetidos ou omitidos. O jogador deve colocar uma peça sobre cada região e cobrir todos os números, exceto os números do desafio.

Por exemplo, uma solução do desafio (um 1; dois 2; um 3; um 4; um 5) é



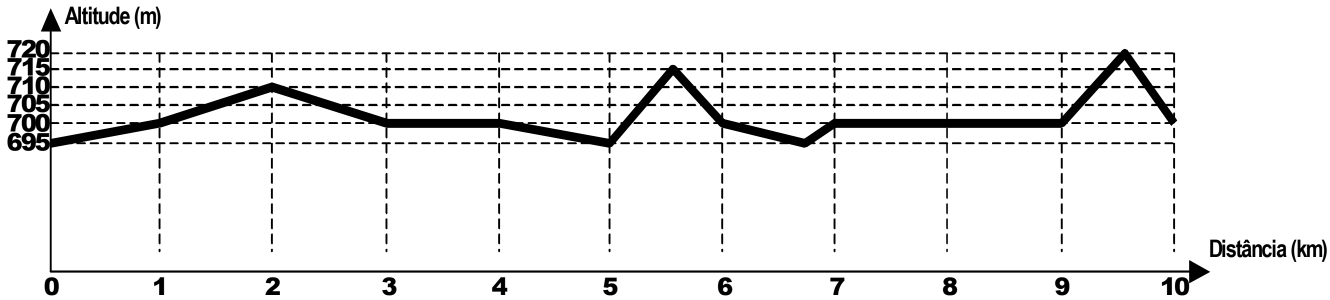
Agora é a sua vez!

Encontre uma solução para o desafio (um 1; um 2; um 3; um 4), desenhando as peças sobre o tabuleiro no seu *Bloco de Resoluções*.

PROBLEMA 2

Amanhã, na avenida da Raia da USP (logo aí ao lado; talvez você consiga vê-la pela janela!), haverá a largada de uma corrida de 10 quilômetros, a Nike 10K.

Um dos aspectos mais importantes para quem participa de corridas longas é a variação de altitude do percurso de prova, ou seja, o quanto as subidas e descidas são inclinadas. Para tanto, a organização do evento fez um gráfico indicando a altitude de acordo com a distância do percurso:



a) Qual é a diferença entre as altitudes do ponto mais alto e do ponto mais baixo do percurso da Nike 10K?

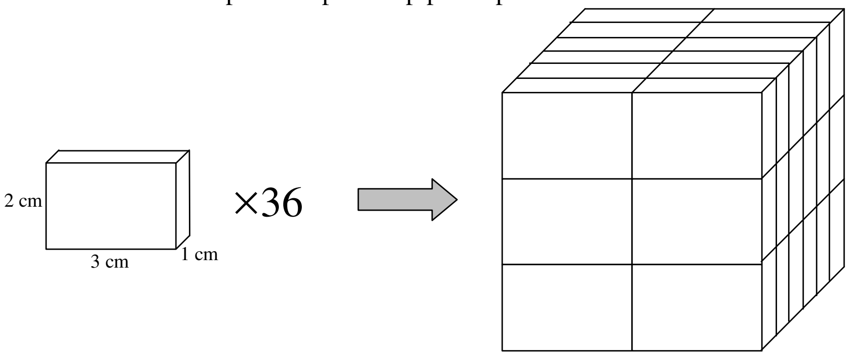
b) Um dos pontos cruciais da corrida de São Silvestre, realizada no último dia do ano em São Paulo, é quando os corredores sobem a avenida Brigadeiro Luiz Antônio, a "subida da Brigadeiro". Sabendo que as altitudes nos quilômetros 13 e 14 da corrida de São Silvestre, que compreendem a avenida, são respectivamente 782 m e 811 m, em qual das duas competições os corredores enfrentam a subida mais inclinada? Não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 3

O professor Piraldo tem uma coleção muito grande de paralelepípedos, todos especiais: eles têm dimensões de medidas inteiras em centímetros e, em cada um deles, suas três dimensões são diferentes. Paralelepípedos que podem pertencer à estimada coleção do professor Piraldo são chamados *paralelepípedos piraldianos*. Exemplos de tais paralelepípedos são o $1\,\text{cm}\times 2\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}$ e o $2\,\text{cm}\times 6\,\text{cm}\times 10\,\text{cm}$. Em compensação, os paralelepípedos $1\,\text{cm}\times 1\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}$ e $2{,}5\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}\times 4\,\text{cm}$ não são piraldianos.

Apesar de não ter cubos em sua coleção, o professor Piraldo gosta de montá-los utilizando paralelepípedos piraldianos. Porém, ele só monta cubos se todos os paralelepípedos utilizados forem iguais, ou seja, ele não mistura paralelepípedos de tamanhos diferentes. Além disso, todos os legítimos cubos montados por Piraldo são maciços, ou seja, ele não deixa espaços ocos.

Um exemplo é um cubo de aresta 6 cm obtido a partir de paralelepípedos piraldianos $1\,\text{cm}\times 2\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}$:



a) Qual é o paralelepípedo piraldiano que deve ser usado para a montagem de um cubo de aresta 4 cm?

b) Qual é o menor cubo que Piraldo pode montar com paralelepípedos piraldianos? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 4

A mãe de Arnaldo pediu para ele ir à papelaria e comprar para ela 16 lápis, 24 canetas e 8 cadernos. Deu a ele R$100,00 para pagar a conta, pois não sabia o valor de cada item. Sabe-se que esses materiais são vendidos por unidade.

Quando ele voltou, entregou a sua mãe o pacote com os materiais e o troco.

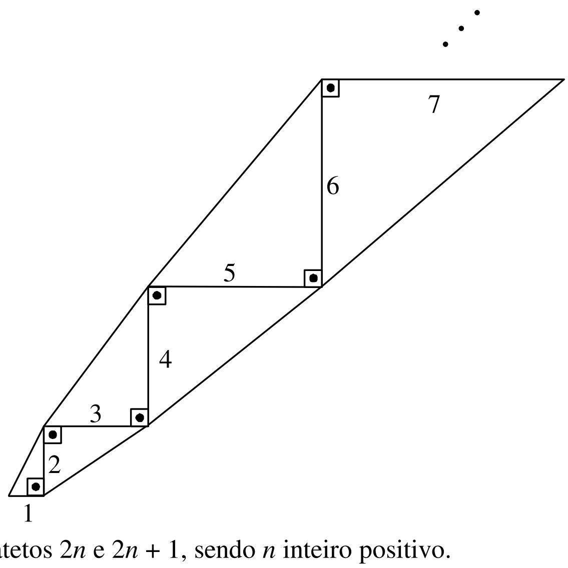
a) Na papelaria, as canetas custam R$1,20 por unidade, ou ainda, 120 centavos de real por unidade. Qual é o valor que Arnaldo gastou, em centavos de real, com as canetas?

b) Mostre que o valor total da compra, em centavos, é um múltiplo de 8.

c) Ela observou que o troco consistia em algumas notas de R$10,00 e apenas uma nota de R$5,00. Imediatamente disse a Arnaldo que o troco estava errado. Como ela pôde descobrir isso tão rapidamente sem saber os preços dos itens?

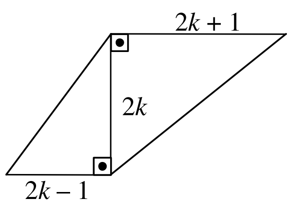
PROBLEMA 5

Melissa colou vários triângulos retângulos, todos com catetos de medidas inteiras e consecutivas. Ela sempre cola os triângulos em catetos de mesma medida. A figura a seguir mostra o começo do trabalho de Melissa:



O último triângulo que ela colou tem catetos $2n$ e $2n + 1$, sendo n inteiro positivo.

a) Sendo a área do triângulo retângulo de catetos a e b igual a $\dfrac{a\cdot b}{2}$, calcule, em termos de k, a área da figura a seguir:



b) Prove que a área da figura de Melissa é igual à soma dos quadrados dos números pares de 2 até $2n$.

c) Mostre que $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2+n(2n+1)$.

Observação: chamamos *triângulo retângulo* todo triângulo que tem um ângulo interno de 90º. Os lados que formam o ângulo de 90º são chamados *catetos*. O lado oposto ao ângulo de 90º é chamado *hipotenusa*.

XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (10 de novembro de 2007)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

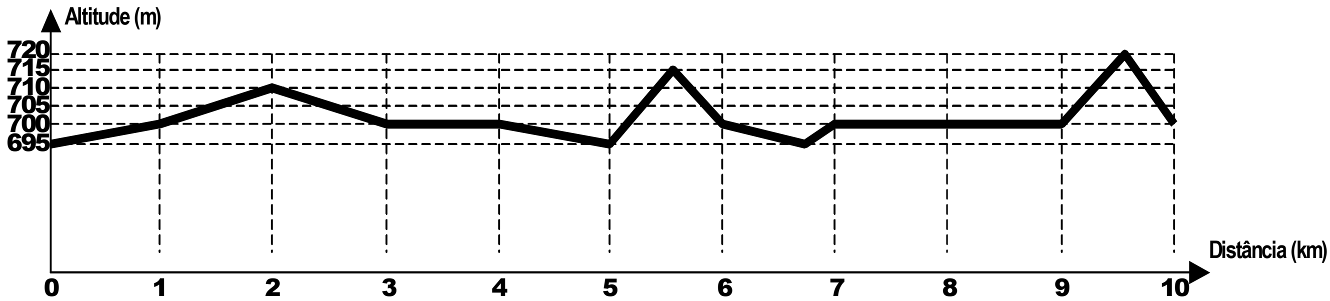
Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Amanhã, na avenida da Raia da USP (logo aí ao lado; talvez você consiga vê-la pela janela!), haverá a largada de uma corrida de 10 quilômetros, a Nike 10K.

Um dos aspectos mais importantes para quem participa de corridas longas é a variação de altitude do percurso de prova, ou seja, o quanto as subidas e descidas são inclinadas. Para tanto, a organização do evento fez um gráfico indicando a altitude de acordo com a distância do percurso:



a) Qual é a diferença entre as altitudes do ponto mais alto e do ponto mais baixo do percurso da Nike 10K?

b) Um dos pontos cruciais da corrida de São Silvestre, realizada no último dia do ano em São Paulo, é quando os corredores sobem a avenida Brigadeiro Luiz Antônio, a "subida da Brigadeiro". Sabendo que as altitudes nos quilômetros 13 e 14 da corrida de São Silvestre, que compreendem a avenida, são respectivamente 782 m e 811 m, em qual das duas competições os corredores enfrentam a subida mais inclinada? Não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 2

A primeira fase da prova da FUVEST, o maior vestibular do Brasil, consiste em 90 questões de múltipla escolha (testes). Cada teste tem 5 alternativas, das quais somente uma é a correta. Os candidatos devem escolher uma das 5 alternativas de cada teste, e a sua pontuação na primeira fase é igual à quantidade de testes que ele acertar.

O estudante Z chuta em todas as provas tipo testes, ou seja, escolhe a alternativa de cada teste ao acaso, sem mesmo lê-lo.

Variáveis cujos valores não podem ser previstos com exatidão, como a quantidade de testes que Z acertaria na FUVEST, são denominadas *variáveis aleatórias* e são o principal objeto de estudo da Estatística.

Duas das medidas mais importantes de uma variável aleatória são o seu *valor esperado* e o seu *desvio padrão*. O *valor esperado* é a média da variável quando se repete o experimento muitas vezes (no nosso caso, qual seria a pontuação média de Z caso ele pudesse fazer a prova da primeira fase da FUVEST várias vezes). O *desvio padrão* mede o quanto a variável aleatória se distancia em média do seu valor esperado. Quanto maior o desvio padrão, maior a variação.

Seja X a variável aleatória que descreve a quantidade de testes que Z acerta em uma prova com n testes. Sendo p e q respectivamente as probabilidades de Z acertar um teste e errar um teste, pode-se mostrar que X tem valor esperado $\mu = n \cdot p$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

Além disso, sabe-se da Estatística que, com aproximadamente 99,9999998% de certeza, a nota de Z em uma prova de n testes é maior ou igual a $\mu - 6\sigma$ e menor ou igual a $\mu + 6\sigma$.

a) Determine os valores das probabilidades p e q de Z acertar um teste e errar um teste, respectivamente.

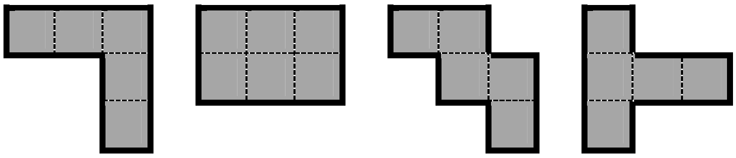
b) O estudante Z quer ser médico. Para ser aprovado em Medicina na FUVEST, no ano passado, ele precisaria acertar 71 dos 90 testes na primeira fase. Supondo que essa pontuação não mude, mostre que, com mais do que 99,9999998% de certeza, ele não será aprovado.

PROBLEMA 3

O jogo *Esconde Números* tem quatro peças e um tabuleiro dividido em quatro regiões com números pintados, como mostra a figura.

1	2		1		2
	3	4		3	
		5	4		5
1			1	6	5
6	4	3	2		3
2	7	5			4

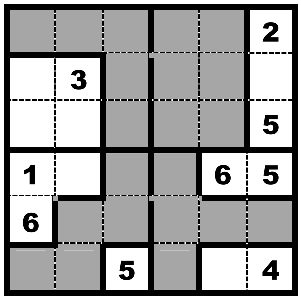
Tabuleiro



Peças

Além do tabuleiro e das peças, o jogo tem cartelas com desafios. Cada desafio corresponde a uma coleção de números, possivelmente com números repetidos ou omitidos. O jogador deve colocar uma peça sobre cada região e cobrir todos os números, exceto os números do desafio.

Por exemplo, uma solução do desafio (um 1; um 2; um 3; um 4; três 5; dois 6) está ao lado.



Observe que as quatro peças na solução do desafio (um 1; um 2; um 3; um 4; três 5; dois 6) cobrem, juntas, sete espaços vazios, ou seja, espaços nos quais não estão marcados números, e quatorze números.

a) Para o desafio (dois 1; dois 2), mostre que as quatro peças deverão cobrir, juntas, exatamente dois espaços vazios e dezenove números.

b) Mostre que o desafio (dois 1; dois 2) tem única solução, ou seja, há uma única maneira de cobrir o tabuleiro de modo que fiquem visíveis apenas dois 1 e dois 2.

PROBLEMA 4

a) Determine constantes $A \in R$ e $B \in R$ tais que $\dfrac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} = A + \dfrac{B}{(2n-1)(2n+1)}$ para todo *n* inteiro positivo.

b) Determine constantes $C \in R$ e $D \in R$ tais que $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{C}{2n-1} + \dfrac{D}{2n+1}$.

c) Podemos dizer que a identidade obtida no item a é um "pequeno milagre" e a do item b é uma aplicação de uma técnica muito importante: escrever como soma de *frações parciais*. Utilizando as duas identidades, calcule a seguinte soma de 1002 termos:

$$\frac{1\cdot 3}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7} + \frac{3\cdot 5}{7\cdot 9} + \cdots + \frac{1002\cdot 1004}{2005\cdot 2007},$$

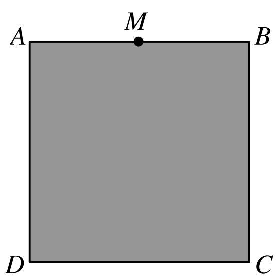
em que cada termo é da forma $\dfrac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}$, com $2 \le n \le 1003$.

PROBLEMA 5

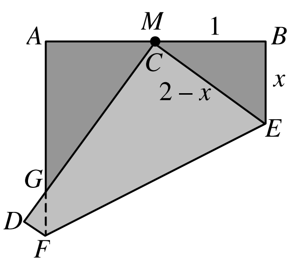
Alguns historiadores afirmam que os antigos egípcios mediam ângulos retos utilizando uma corda marcada por 11 nós igualmente espaçados, dividindo-a em 12 pedaços iguais. Para fazer a medição, a corda era estendida de modo a formar o famoso triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Esse triângulo e todos os triângulos semelhantes a ele são denominados *triângulos egípcios*.

Veremos nesse problema que triângulos egípcios podem aparecer de uma maneira bastante inusitada: com dobraduras!

Considere uma folha de papel na forma de um quadrado *ABCD* de lado 2. Seja *M* o ponto médio de *AB*.

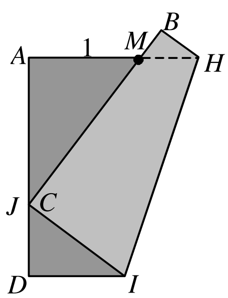


a) Esmeralda dobrou o papel de modo que o vértice *C* coincida com o ponto médio *M*.



Se $x = BE$, note que $EC = EM = 2 - x$. Mostre que o triângulo *BME* é egípcio, ou seja, é semelhante ao triângulo de lados 3, 4 e 5.

b) Diamantino dobrou outra folha igual à de Esmeralda de modo que o vértice *C* fique sobre o lado *AD* e o lado *BC* passe sobre o ponto *M*.



Prove que os triângulos *MAJ*, *JDI* e *BMH* são egípcios.

XXXI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (10 de novembro de 2007)
Nível γ(1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em mil lançamentos de uma moeda honesta, qual é o tamanho da maior seqüência de resultados iguais consecutivos que, em média, é obtida? Neste problema vamos ajudar você a responder a essa questão.

Seja p a probabilidade de obter coroa em um lançamento e seja n o número de lançamentos. (Sim, $p = \frac{1}{2}$ e $n = 1000$. Mas, deste modo, as fórmulas ficam mais simples.)

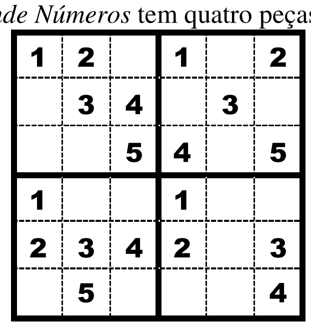
Considere uma seqüência de k lançamentos consecutivos. Na média, em p^k deles obtemos k caras consecutivas; da mesma forma, na média em p^k deles obtemos k coroas consecutivas. Assim, sendo n a quantidade de lançamentos, espera-se $2p^k n$ seqüências de pelo menos k faces iguais consecutivas. Logo o número de seqüências com exatamente k faces iguais consecutivas é, em média, $2p^k n - 2p^{k+1}n = 2np^k(1-p)$, que neste caso é igual a $n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

a) Sendo n inteiro positivo, resolva a equação $n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$ no universo $U = R$.

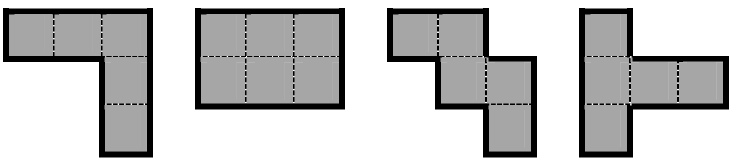
b) Responda à pergunta que fizemos no início do problema.

PROBLEMA 2

O jogo *Esconde Números* tem quatro peças e um tabuleiro dividido em quatro regiões com números pintados, como mostra a figura.

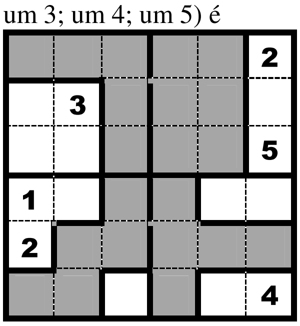


Tabuleiro


Peças

Além do tabuleiro e das peças, o jogo tem cartelas com desafios. Cada desafio corresponde a uma coleção de números, possivelmente com números repetidos ou omitidos. O jogador deve colocar uma peça sobre cada região e cobrir todos os números, exceto os números do desafio.

Por exemplo, uma solução do desafio (um 1; dois 2; um 3; um 4; um 5) é



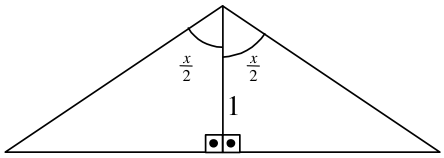
a) De quantas maneiras podemos colocar as peças no tabuleiro?

b) Mostre que a quantidade de desafios é menor ou igual a 2500.

c) Mostre que existem desafios com mais de uma solução.

PROBLEMA 3

a) Observando a figura a seguir, prove que, para $0 < x < \pi$, temos $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.



b) Resolva, no universo $U =]0;\pi[$, a equação $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = \cos x \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

PROBLEMA 4

Sejam *ABCD* um tetraedro de volume *V* e *P*, um ponto em seu interior. Os planos α, β, γ e δ são paralelos às faces *BCD*, *ACD*, *ABD* e *ABC*, respectivamente, e determinam em *ABCD* quatro tetraedros de vértice *P* com volumes V_1, V_2, V_3 e V_4, respectivamente.

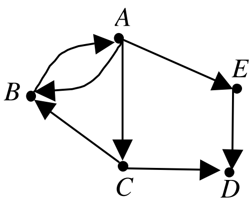
a) Sejam d_1, d_2, d_3 e d_4 as distâncias do ponto *P* às faces *BCD*, *ACD*, *ABD* e *ABC*, respectivamente, e S_1, S_2, S_3 e S_4 as áreas de *BCD*, *ACD*, *ABD* e *ABC*, respectivamente. Prove que $V = \dfrac{1}{3}\left(S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4\right)$.

b) Mostre que, para $1 \le i \le 4$, $\dfrac{S_i d_i}{3} = V \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V_i}{V}}$ e conclua que $\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}$.

PROBLEMA 5

Um *grafo orientado* é formado por um conjunto finito $V = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, cujos elementos denominamos *vértices*, e por um conjunto $E \subset V \times V$; os elementos de E são denominados *arestas*. O estudo de estruturas como essas é uma área muito importante da Matemática contemporânea denominada *Teoria dos Grafos*. Os chamados grafos são vitais para a Computação e suas aplicações estendem-se até aos Negócios e às Ciências Sociais.

Vejamos um exemplo que dá uma mostra bastante simplificada do que pode ser feito em Teoria dos Grafos. Vamos supor que em um estudo sociológico observaram-se as seguintes relações: Arnaldo influencia Bernaldo; Arnaldo influencia Cernaldo; Arnaldo influencia Ernaldo; Bernaldo influencia Arnaldo; Cernaldo influencia Bernaldo; Cernaldo influencia Dernaldo e Ernaldo influencia Dernaldo. Então tomando $V = \{A, B, C, D, E\}$ e $E = \{(A,B), (A,C), (A,E), (B,A), (C,B), (C,D), (E,D)\}$ obtemos o grafo que representa essencialmente a situação descrita, o qual usualmente é representado através de um diagrama como o mostrado abaixo, à esquerda.



$$\text{A(G)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\text{A(G)}]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja *G* um grafo orientado com n vértices. Consideramos a matriz $n \times n$ com $a_{ij} = 1$ se (P_i, P_j) é uma aresta de *G* e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Tal matriz é denominada *matriz de adjacência* de *G* e é indicada por $A(G)$. Acima, à direita, exibimos a matriz de adjacência do exemplo dado e o seu quadrado, $[A(G)]^2 = A(G) \cdot A(G)$.

Um *caminho* entre os vértices P_i e P_j em um grafo orientado *G* é uma seqüência de vértices $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}$ em que $P_{i1} = P_i$, $P_{im} = P_j$ e $(P_{ik}, P_{i(k+1)})$ é uma aresta de *G*, $1 \le k < m$. Ou seja, podemos partir do vértice P_i e, percorrendo arestas de *G*, ir até P_j.

a) Mostre que, em todo grafo orientado *G*, o elemento b_{ij} da matriz $[A(G)]^2$ é igual à quantidade de caminhos entre P_i a P_j com exatamente duas arestas.

b) Prove que existe um caminho entre quaisquer dois vértices (distintos ou não) de um grafo orientado *G* de *n* vértices se, e somente se, $A(G) + [A(G)]^2 + \cdots + [A(G)]^n$ é uma matriz formada apenas por números positivos.