XXXI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (18 de agosto de 2007)
Instruções Gerais

www.opm.mat.br

Caro Responsável,

Você está recebendo o material referente à Primeira Fase da XXXI Olimpíada Paulista de Matemática, a OPM-2007, que deve ser realizada no dia 18/08/2007, às 8h. Caso seja necessário, pode-se iniciar a prova, no máximo, até às 9h. Fique atento:

I) A duração da prova é de 3h30min. É necessário providenciar cópias das provas e também folhas de papel (almaço ou sulfite) para os estudantes resolverem a prova, que chamaremos de *Folhas de Respostas*.

Os estudantes devem colocar em suas *Folhas de Respostas* os seguintes dados pessoais:

- nome completo,
- nível (α, β ou γ),
- série,
- nome da escola, dizendo se é particular ou pública,
- telefone para contato,
- e-mail (caso possua),
- data de nascimento.

II) Os gabaritos e critérios de correção estarão disponíveis para todos os interessados em nossa página http://www.opm.mat.br a partir de 22 de agosto, quarta-feira, para visualização e impressão.

III) A partir de 27 de agosto, segunda-feira, estará disponível em nossa página

http://www.opm.mat.br/opm2007/download/relatorioprimeirafase.htm

o *Relatório de Desempenho dos Estudantes* na Primeira Fase da OPM. *Atenção*: é necessário digitar em seu navegador o endereço acima, pois não há link para ele em nossa página. Para poder acessar, preencher e enviar o relatório, serão enviados novos login e senha, diferentes dos usados para baixar as provas. Caso não os receba até o dia 27 de agosto, escreva para info@opm.mat.br , solicitando-os.

No *Relatório de Desempenho dos Estudantes* deverão ser relacionados, em ordem decrescente de notas, os cinco estudantes que obtiveram melhor desempenho em cada um dos níveis. Esclarecemos que estes estudantes estarão apenas INDICADOS para a Fase Final, mas que ainda **NÃO** estão classificados para a Fase Final. Salientamos ainda que cada escola pode indicar no máximo 5 estudantes em cada nível. Não há exceções. Havendo empate, caberá ao responsável decidir quais serão os indicados.

Após receber o *Relatório de Desempenho dos Estudantes* na Primeira Fase de cada uma das escolas participantes, a Comissão Organizadora da OPM irá analisá-los e então divulgará, apenas no site da OPM, a *Lista de Convocados para a Fase Final*, sendo este o único instrumento válido de convocação. Assim recomendamos que nenhum resultado seja antecipadamente divulgado.

As provas dos indicados no *Relatório de Desempenho dos Estudantes na Primeira Fase* deverão ser guardadas até a realização da Fase Final, podendo ser requisitadas a qualquer momento para análise.

Muita atenção: o prazo final para o preenchimento e envio do *Relatório de Desempenho dos Estudantes* na Primeira Fase é 14 de setembro, sexta-feira.

IV) A *Lista de Convocados para a Fase Final* estará no site da OPM a partir de 02 de outubro, terça-feira. A Fase Final será realizada no dia 10 de novembro, às 8h, no Instituto de Física da USP – Cidade Universitária, em São Paulo. A premiação acontecerá no mesmo dia, a partir das 16h30min, em São Paulo.

Qualquer irregularidade deve ser imediatamente comunicada: nosso e-mail é info@opm.mat.br

Boa sorte a todos. E grato por sua colaboração.

Comissão Organizadora – OPM 2007.

XXXI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (18 de agosto de 2007)
Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

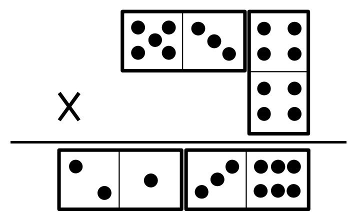
Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Um jogo de dominós é composto por 28 peças diferentes. Em cada peça há um retângulo 2×1, com dois valores impressos que variam de 0 a 6.

A seguir exibimos uma multiplicação de um número de 3 algarismos por outro de 1 algarismo, montada com o auxílio de quatro peças de um jogo de dominós.



Note que, de fato, $534\times 4 = 2136$.

Com as 24 peças restantes, sem repeti-las, apresente outras 2 multiplicações corretas seguindo o modelo do exemplo dado, ou seja, utilizando 4 peças em cada uma.

PROBLEMA 2

Arnaldo e Bernaldo passavam férias na Argentina e ao visitarem um ponto turístico, um fotógrafo perguntou-lhes se gostariam de tirar uma foto. Disse também que poderiam escolher uma das três opções para realizar o pagamento: ou US\$5,00 (dólares) ou R\$10,00 (reais) ou \$15,00 (pesos argentinos).

Nesse dia, o câmbio oferecido pelos bancos para essas moedas era o seguinte: US\$1,00 correspondia a R\$1,89 e também a \$3,14.

a) Usando o câmbio oferecido pelos bancos naquele dia, US\$5,00 correspondiam a quantos reais?

b) Qual das três opções de pagamento era a melhor? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 3

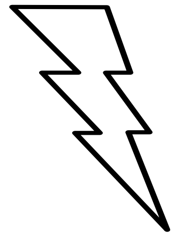
Um fazendeiro tem seis barris, de capacidades 15, 16, 18, 19, 20 e 31 litros. Cinco contêm leite e um contém suco de uva. Os barris estão todos fechados e não podem ser abertos.

Ele vendeu parte do leite para Arnaldo e vendeu para Bernaldo o dobro de litros de leite que havia vendido para Arnaldo. Com isso, o fazendeiro ficou só com o barril de suco de uva.

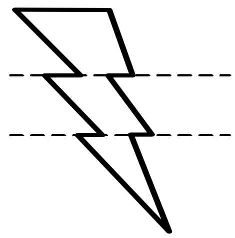
Qual é a capacidade do barril de suco de uva?

PROBLEMA 4

Um bruxo não tão famoso, *Parry Hotter*, tem em sua testa uma tatuagem com a forma de um raio, representada pelo polígono a seguir.



a) O número de lados desse polígono é igual à quantidade de inimigos que ele tem, os *Dormensais da Sorte*. Para derrotá-los, ele precisa conhecer um número de magias igual ao cubo do número de inimigos.
Quantas magias ele precisa conhecer?
b) Uma análise mais cuidadosa da tatuagem mostra que os lados indicados estão sobre uma mesma reta.



Qual a soma dos ângulos internos desse polígono?
Atenção! O número de ângulos internos é igual ao número de lados. E você pode querer usar o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º e a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º.

PROBLEMA 5

Uma caixa na forma de um bloco retangular de dimensões internas 4 cm, 5 cm e 5 cm está vazia e deve ser preenchida com cubos de madeira, de modo que não sobre espaço em seu interior. As medidas das arestas dos cubos devem ser todas inteiras em cm. Isto é, pode-se utilizar quantos cubos forem necessários de 1, 2, 3 ou 4 cm de aresta.
Agora é sua vez!
a) Pode-se preencher totalmente a caixa com 37 cubos.
Copie a tabela a seguir na sua *Folha de Respostas* e preencha-a, indicando quantos cubos de cada tamanho precisamos para preencher a caixa com 37 cubos. Não é obrigatório usar cubos de todos os tamanhos.

Aresta	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
Quantidade				

b) Pode-se preencher totalmente a caixa com *menos de* 37 cubos.
Copie a tabela a seguir na sua *Folha de Respostas* e preencha-a, indicando quantos cubos de cada tamanho são necessários para preencher a caixa com *menos de* 37 cubos. Não é obrigatório usar cubos de todos os tamanhos.

Aresta	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
Quantidade				

XXXI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (18 de agosto de 2007)

Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

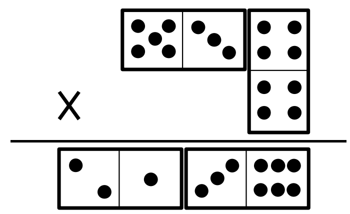
Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Um jogo de dominós é composto por 28 peças diferentes. Em cada peça há um retângulo 2×1, com dois valores impressos que variam de 0 a 6.

A seguir exibimos uma multiplicação de um número de 3 algarismos por outro de 1 algarismo, montada com o auxílio de quatro peças de um jogo de dominós.



Note que, de fato, $534\times 4 = 2136$.

Com as 24 peças restantes, sem repeti-las, apresente outras 2 multiplicações corretas seguindo o modelo do exemplo dado, ou seja, utilizando 4 peças em cada uma.

PROBLEMA 2

a) Fatore $(a^3 + ab^2)^2 + (a^2b + b^3)^2$.

b) Escreva 13^3 como soma de dois quadrados perfeitos. Isto é, encontre dois números inteiros positivos x e y tais que $13^3 = x^2 + y^2$.

PROBLEMA 3

Os antigos Pitagóricos definiram o que hoje denominamos Média Aritmética, Média Geométrica e Média Harmônica, além de várias outras, através da seguinte formulação:

Sejam a, b e c números reais positivos tais que $a < b < c$. Deste modo, as diferenças $b - a$, $c - a$ e $c - b$ são todas positivas. O número b é uma "média" de a e c se a razão entre duas das diferenças citadas é igual à razão entre dois dos três números originais (não necessariamente distintos).

Por exemplo, a partir de $\dfrac{c-b}{b-a} = \dfrac{b}{a}$ obtemos $b = \sqrt{a\cdot c}$ (Média Geométrica).

a) Mostre que, de fato, a partir de $\dfrac{c-b}{b-a} = \dfrac{b}{a}$ obtemos $b = \sqrt{a\cdot c}$.

b) Considerando agora $\dfrac{c-b}{b-a} = \dfrac{a}{b}$ (Atenção! A proporção mudou!), calcule a média b entre $a = 1$ e $c = 2$.

PROBLEMA 4

Nas eleições de alguns países, dois partidos acabam recebendo quase todos os votos e o sistema funciona assim: em cada distrito eleitoral, o partido que recebe a maior votação ganha todas as cadeiras no parlamento reservadas para aquele distrito, não importando quantos votos a mais ele recebeu.

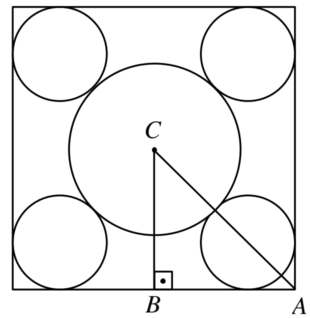
Nesses países, observou-se que os resultados finais das eleições seguem a *Regra do Cubo*: suponha que o partido X recebeu um total de x votos nas eleições e o partido Y recebeu um total de y votos nas eleições; então a razão entre o número de cadeiras de X e Y no parlamento é muito próximo de $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3$.

Agora é a sua vez! Em um país que satisfaz tais condições, o Partido X deseja obter dois terços das cadeiras do parlamento. Qual deve ser o percentual de votos de X nas eleições?

Você pode querer utilizar a aproximação $\sqrt[3]{2} \cong 1{,}26$.

PROBLEMA 5

Na figura a seguir, as quatro circunferências menores têm raio 1 e são tangentes a dois lados do quadrado. A circunferência maior, de centro C, tem raio 2 e é tangente externamente às quatro menores. O ponto A é um dos vértices do quadrado. O ponto B é a projeção de C sobre um lado que contém A.



a) Mostre que o triângulo retângulo ABC é isósceles.
b) Demonstre que o centro de uma das circunferências menores pertence ao segmento AC.
c) Calcule a área do quadrado.

XXXI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (18 de agosto de 2007)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

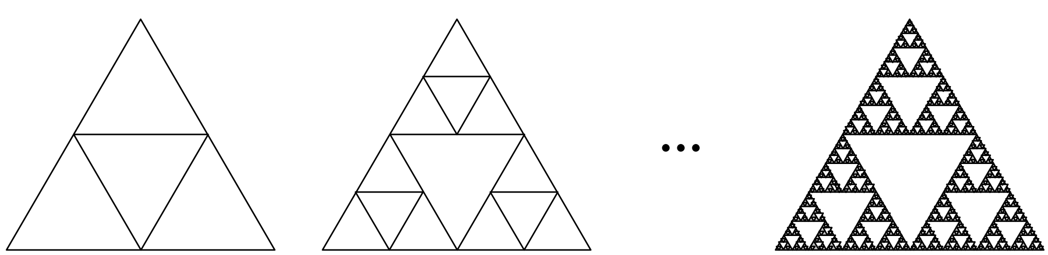
Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1
O número de e-mails internacionais diários, em milhões, é aproximadamente igual a $f(t) = 38{,}57t^2 - 24{,}29t + 79{,}14$, sendo $t \geq 0$ e t medido em anos com $t = 0$ correspondendo ao início de 1998.
a) Qual foi a quantidade de e-mails internacionais diários no início do ano 2000?
b) Considerando a aproximação dada, quantos e-mails internacionais diários a mais foram enviados no início de 2006, em relação ao início de 1998?

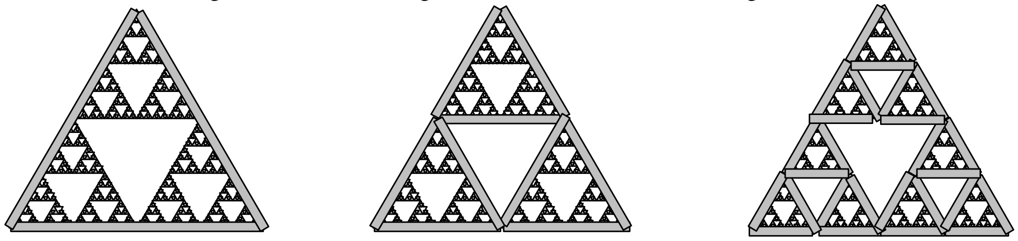
PROBLEMA 2
Nas eleições de alguns países, dois partidos acabam recebendo quase todos os votos e o sistema funciona assim: em cada distrito eleitoral, o partido que recebe a maior votação ganha todas as cadeiras no parlamento reservadas para aquele distrito, não importando quantos votos a mais ele recebeu.
Nesses países, observou-se que os resultados finais das eleições seguem a *Regra do Cubo*: suponha que o partido X recebeu um total de x votos nas eleições e o partido Y recebeu um total de y votos nas eleições; então a razão entre o número de cadeiras de X e Y no parlamento é muito próximo de $\left(\frac{x}{y}\right)^3$.
Agora é a sua vez! Em um país que satisfaz tais condições, o Partido X deseja obter dois terços das cadeiras do parlamento. Qual deve ser o percentual de votos de X nas eleições?
Você pode querer utilizar a aproximação $\sqrt[3]{2} \cong 1{,}26$.

PROBLEMA 3
Uma maneira de se definir dimensão de alguns objetos é utilizar a idéia de *réguas*. Suponha que usemos uma certa quantidade de réguas retas para medir um objeto. Se precisamos de 2^d vezes mais réguas cuja medida é metade da anterior para medir o mesmo objeto, dizemos que a dimensão do objeto é d. Por exemplo, para medirmos um segmento de 1 metro podemos utilizar 1 régua de 1 metro, 2 de 0,5 metro ou 4 de 0,25 metro. Como sempre precisamos de 2^1 vezes mais réguas menores para medir o mesmo objeto, a dimensão do segmento de reta é 1.

Com essa definição, alguns objetos têm dimensão não inteira. Um exemplo é o *triângulo de Sierpinski*. Para obtê-lo, ligamos os pontos médios de infinitos triângulos eqüiláteros, como mostra a figura a seguir:



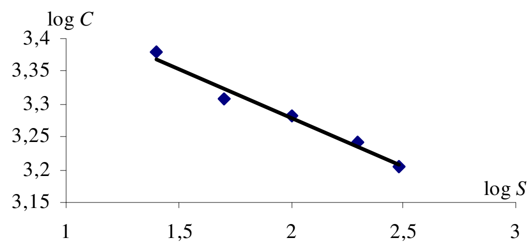
Note que podemos medi-lo com 3 réguas de 1 metro, 9 réguas de 0,5 metro ou ainda 27 réguas de 0,25 metro.



a) Qual é a dimensão do triângulo de Sierpinski?
b) Em 1950, o matemático e pacifista Lewis Fry Richardson decidiu estudar a relação entre a probabilidade de dois países entrarem em guerra e o comprimento da fronteira comum a eles. Ao coletar dados, porém, Richardson percebeu, por exemplo, que livros davam valores notadamente diferentes para a fronteira entre Portugal e Espanha: entre 987 e 1214 quilômetros.

Assim, Richardson passou a investigar o quanto o comprimento de fronteiras variam de acordo com a unidade de medida utilizada.

Outro matemático, Benoît Mandelbrot, definiu o conceito de *dimensão* de fronteira, generalizando a idéia das réguas. Considerando os dados de Richardson, ele obteve gráficos do tipo $\log C \times \log S$, sendo C o comprimento obtido com a unidade de medida S. O gráfico correspondente à costa da Austrália é

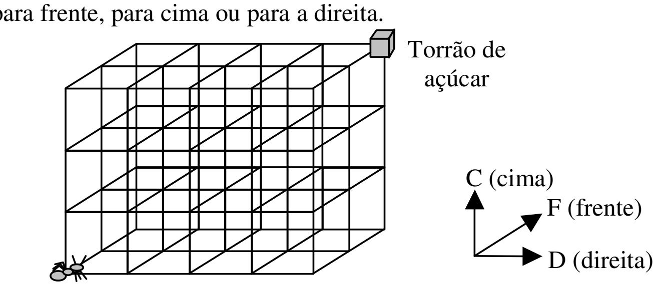


A dimensão da costa australiana é, então, a constante d tal que $C = k \cdot S^{1-d}$, sendo k também uma constante. Sabendo que a equação da reta acima é $\log C = -0{,}15 \log S + 3{,}58$, determine a dimensão da costa australiana.

PROBLEMA 4
a) Prove que se $\cos\theta$ é racional então $\cos 3\theta$ é racional.
b) Demonstre que $\cos 10^\circ$ é irracional.
Você pode querer utilizar as seguintes fórmulas:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

PROBLEMA 5
Uma formiga está em um canto de uma armação de varetas de dimensões 2, 3 e 4. No canto oposto ao da formiga, está um torrão de açúcar. Ela é esperta e só anda para frente, para cima ou para a direita.



a) Mostre que o número de caminhos que a formiga pode percorrer para chegar ao canto com o torrão de açúcar é igual à quantidade de anagramas da palavra FFCCCDDDD.
b) Quantos caminhos distintos a formiga pode percorrer para chegar ao torrão?
c) Sejam a, b e c inteiros positivos. Prove que o número $\dfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$ é inteiro.