XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (11 de novembro de 2006)

Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Para um medicamento experimental ser testado, ele deve ser comparado com um placebo (substância inerte).
Um novo medicamento, o *OPMinol*, foi testado em dois grupos A e B, sem pessoas em comum.

(a) No grupo A, o OPMinol foi administrado a 100 pessoas, sendo que em 66 delas obteve-se o efeito desejado; o placebo foi aplicado em 40 pessoas, e em 24 destas o efeito desejado foi constatado. Os resultados estão resumidos na tabela abaixo. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a, calculando as porcentagens de sucessos do OPMinol e do placebo, respectivamente.

Grupo A	Número de pessoas testadas	Sucessos	Porcentagem de sucessos
OPMinol	100	66	
Placebo	40	24	

(b) Os resultados do grupo B estão resumidos na tabela a seguir. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a, determinando o número de pessoas nas quais o medicamento foi aplicado e o número de casos em que o placebo foi bem sucedido.

Grupo B	Número de pessoas testadas	Sucessos	Porcentagem de sucessos
OPMinol		180	90%
Placebo	500		87%

(c) Para aprovar o medicamento no teste, é necessário que no resultado total (isto é, juntando-se os dois grupos) ele possua uma maior porcentagem de sucessos quando comparada ao placebo. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a. Em seguida, diga se o OPMinol deve ser aprovado ou não. Dois valores já foram colocados para você.

Grupos A e B juntos	Número de pessoas testadas	Sucessos	Porcentagem de sucessos
OPMinol		246	
Placebo	540		

PROBLEMA 2

O *coeficiente de isolamento* é uma medida da capacidade de isolamento térmico de um material: quanto maior este coeficiente, menor é a quantidade de calor perdida através de uma parede feita deste material. Ou seja, quanto maior o coeficiente de isolamento, melhor o material protege do frio.
A quantidade de calor Q perdida por uma parede em uma hora depende não só do material utilizado para construí-la, mas também de sua área e da diferença entre as temperaturas interna e externa. Q é dado pela fórmula

$$Q = \frac{\text{Área} \times \text{Diferença de temperatura}}{\text{Coeficiente de isolamento}}$$

onde Q é dado em BTU por hora, a área da parede é dada em pés quadrados e a diferença de temperatura é dada em graus Fahrenheit. A unidade BTU é a abreviatura de *British Thermal Unit*. Sendo essa uma unidade de origem britânica, a fórmula acima utiliza unidades do antigo sistema de medidas desenvolvido no Reino Unido. Desta forma, devemos fazer os cálculos somente com essas unidades. Caso os dados estejam em outras unidades, devemos convertê-las.
Na casa de Aino, em Helsinque, Finlândia, a parede que separa a sua sala e o lado de fora tem 9 pés de altura e 12 pés de largura. Em um certo dia no inverno, a temperatura interna da casa era de 20 graus Celsius.

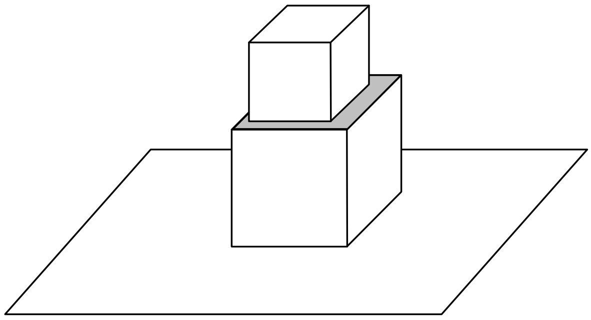
(a) Para converter graus Celsius em Fahrenheit, utilizamos a fórmula $F = \frac{9 \cdot C}{5} + 32$, sendo F e C a temperatura em graus Fahrenheit e Celsius, respectivamente. Qual era a temperatura, em graus Fahrenheit, dentro da sala de Aino?

(b) Se a parede for construída com blocos com coeficiente de isolamento igual a 1,8 e a perda de calor através dela é 4320 BTU por hora, qual era a temperatura, em graus Celsius, fora da casa de Aino?

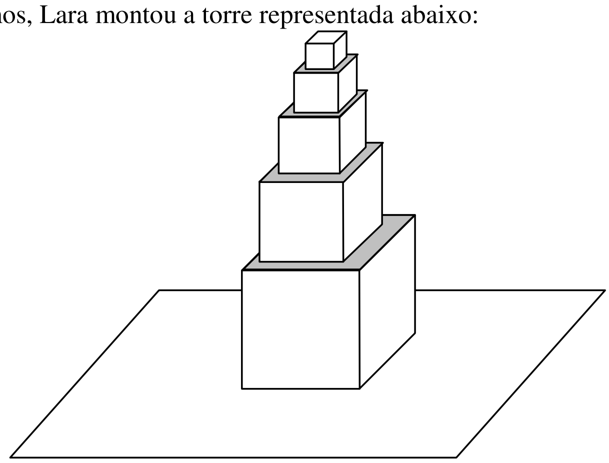
(c) No rigoroso inverno finlandês, a menor temperatura é –40 graus Fahrenheit e deseja-se que a temperatura interna da casa seja sempre de pelo menos 60 graus Fahrenheit. Suponha que a perda média de calor nos dias mais frios seja 4800 BTU por hora. Para isto, qual o menor coeficiente de isolamento dos blocos que se pode utilizar para construir a parede?

PROBLEMA 3

Lara estava brincando no tapete e resolveu montar uma torre. Ela começou colando dois cubos, obtendo o sólido representado abaixo:



Esse sólido tem 24 arestas (12 de cada cubo) e 11 faces (5 de cada cubo e a que está destacada).
Ao terminar de colar os seus 5 cubinhos, Lara montou a torre representada abaixo:



(a) Quantas arestas e faces tem a torre completa?
(b) A aresta do maior cubo mede x cm e a aresta de cada um dos outros cubos é 3 cm menor que a aresta do cubo imediatamente abaixo. Sabendo-se que soma das áreas das quatro faces destacadas é 240 cm^2, calcule x.

PROBLEMA 4

No planeta *Fungus*, há três tribos: os *angos*, os *mincos* e os *zambos*. *Angos* sempre falam a verdade, *mincos* sempre mentem e *zambos* podem mentir ou falar a verdade. Apesar disso, eles são idênticos na aparência e usam até roupas iguais!
(a) Ao chegar a *Fungus*, a tradição do planeta impõe que pelo menos um representante de cada tribo o receba. Na sua visita, você encontra três seres. Eles conhecem de qual tribo é cada um dos outros, mas são de poucas palavras: cada um só fala quando perguntado e responde apenas a questões do tipo "... é um ...?" (como, por exemplo, "Ele é um ango?" ou "Você é um zambo?") com um sim ou um não.
Descreva como descobrir a tribo de cada um. *Atenção*: Você pode fazer quantas perguntas desejar.
(b) Agora suponha que quatro seres lhe recebam. Como manda a tradição, há pelo menos um de cada tribo. Novamente eles conhecem as identidades um dos outros e só respondem às perguntas descritas no item a. Sempre é possível descobrir a tribo de cada um? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 5

No código numérico de diversos produtos, como, por exemplo, aquele que aparece no código de barras, utiliza-se o seguinte esquema para detectar erros de digitação: multiplicando-se cada dígito alternadamente por 1 e 3 e adicionando-se os resultados, sempre se obtém um múltiplo de 10. Por exemplo, um possível código de um produto é 4905370265546, pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+4\times3+6\times1=120$$

é um múltiplo de 10.
Por outro lado, 4905370265564 não pode ser o código de um produto pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+6\times3+4\times1=124$$

não é um múltiplo de 10.
Assim, conferindo esta conta, o computador é capaz de detectar erros de digitação.
(a) O último dígito do código de um produto é chamado *dígito de verificação*. O dígito de verificação que aparece na embalagem de um desodorante está ilegível. Abaixo, ele está indicado por um ■:

789103304863■

Qual é esse dígito?
(b) Como você pode observar nos dois primeiros exemplos, os dois últimos dígitos trocaram de lugar. Esse é um dos erros mais comuns de digitação, a *transposição*. Mais precisamente, a *transposição de dois dígitos consecutivos* ocorre quando em vez de se digitar *ab* digita-se *ba*, onde *a* e *b* representam algarismos distintos.

(i) Um corretivo líquido tem código 789**72**54113302. Mostre que, mesmo que haja uma transposição entre os dígitos 7 e 2, obtemos um possível código de um produto. Ou seja, caso ocorra essa transposição, ela não será detectada.

(ii) Como vimos no item anterior, o esquema acima é capaz de detectar *quase todos* os erros de transposição. Determine todos os pares de dígitos consecutivos distintos *ab* cuja transposição *ba* **não** é detectada pelo esquema acima em qualquer código. Observe que, pelo item anterior, 72 é um desses pares.

(c) Quantos códigos de produto são da forma 7897073010*xyz*, em que *x*, *y* e *z* são dígitos?

XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (11 de novembro de 2006)

Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Para um medicamento experimental ser testado, ele deve ser comparado com um placebo (substância inerte).
Um novo medicamento, o *OPMinol*, foi testado em dois grupos A e B, sem pessoas em comum.

(a) No grupo A, o OPMinol foi administrado a 100 pessoas, sendo que em 66 delas obteve-se o efeito desejado; o placebo foi aplicado em 40 pessoas, e em 24 destas o efeito desejado foi constatado. Os resultados estão resumidos na tabela abaixo. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a, calculando as porcentagens de sucessos do OPMinol e do placebo, respectivamente.

Grupo A	Número de pessoas testadas	Sucessos	Porcentagem de sucessos
OPMinol	100	66	
Placebo	40	24	

(b) Os resultados do grupo B estão resumidos na tabela a seguir. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a, determinando o número de pessoas nas quais o medicamento foi aplicado e o número de casos em que o placebo foi bem sucedido.

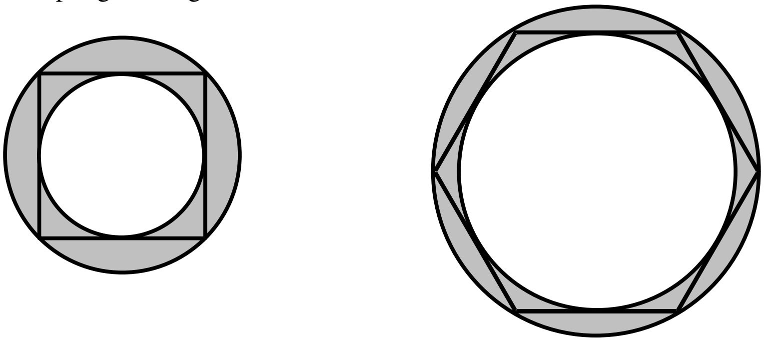
Grupo B	Número de pessoas testadas	Sucessos	Porcentagem de sucessos
OPMinol		180	90%
Placebo	500		87%

(c) Para aprovar o medicamento no teste, é necessário que no resultado total (isto é, juntando-se os dois grupos) ele possua uma maior porcentagem de sucessos quando comparada ao placebo. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a. Em seguida, diga se o OPMinol deve ser aprovado ou não. Dois valores já foram colocados para você.

Grupos A e B juntos	Número de pessoas testadas	Sucessos	Porcentagem de sucessos
OPMinol		246	
Placebo	540		

PROBLEMA 2

(a) Nas figuras a seguir, temos dois polígonos regulares e suas circunferências inscrita e circunscrita.



Em cada uma das figuras, a área em destaque entre as circunferências inscrita e circunscrita é $4\pi\ \text{cm}^2$. Mostre que as medidas dos lados do quadrado e do hexágono são iguais.

(b) Considere um polígono regular de 2006 lados cuja área entre as circunferências inscrita e circunscrita é $4\pi\ \text{cm}^2$. Qual é a medida de seu lado?

PROBLEMA 3

No código numérico de diversos produtos, como, por exemplo, aquele que aparece no código de barras, utiliza-se o seguinte esquema para detectar erros de digitação: multiplicando-se cada dígito alternadamente por 1 e 3 e adicionando-se os resultados, sempre se obtém um múltiplo de 10. Por exemplo, um possível código de um produto é 4905370265546, pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+4\times3+6\times1=120$$

é um múltiplo de 10.

Por outro lado, 4905370265564 não pode ser o código de um produto pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+6\times3+4\times1=124$$

não é um múltiplo de 10.

Assim, conferindo esta conta, o computador é capaz de detectar erros de digitação.

(a) O último dígito do código de um produto é chamado *dígito de verificação*. O dígito de verificação que aparece na embalagem de um desodorante está ilegível. Abaixo, ele está indicado por um ■:

789103304863■

Qual é esse dígito?

(b) Como você pode observar nos dois primeiros exemplos, os dois últimos dígitos trocaram de lugar. Esse é um dos erros mais comuns de digitação, a *transposição*. Mais precisamente, a *transposição de dois dígitos consecutivos* ocorre quando em vez de se digitar *ab* digita-se *ba*, onde *a* e *b* representam algarismos distintos.

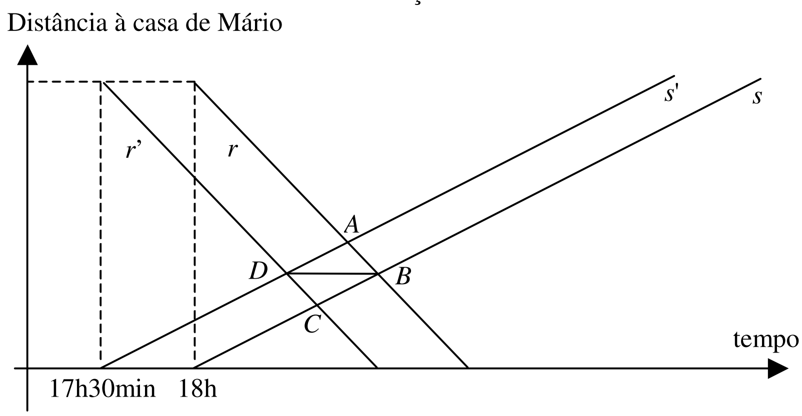
(i) Um corretivo líquido tem código 789**72**54113302. Mostre que, mesmo que haja uma transposição entre os dígitos 7 e 2, obtemos um possível código de um produto. Ou seja, caso ocorra essa transposição, ela não será detectada.

(ii) Como vimos no item anterior, o esquema acima é capaz de detectar *quase todos* os erros de transposição. Determine todos os pares de dígitos consecutivos distintos *ab* cuja transposição *ba* **não** é detectada pelo esquema acima em qualquer código. Observe que, pelo item anterior, 72 é um desses pares.

PROBLEMA 4

Joana e Mário partiram de suas respectivas casas simultaneamente às 18h, um de encontro ao outro. Ambos desenvolvem velocidades constantes e diferentes. Sabe-se que se Joana tivesse partido às 17h30min, Mário teria andado 2 quilômetros a menos.

No gráfico a seguir, as retas *r* e *s* representam as distâncias de Joana e Mário à casa de Mário, respectivamente, em função do tempo, na situação em que ambos partem simultaneamente. A reta *r*' representa a distância de Joana à casa de Mário se Joana saísse às 17h30min. Nesse problema descobriremos o que aconteceria se Mário tivesse partido às 17h30min e Joana tivesse partido às 18h. A reta *s*' representa a distância de Mário à sua casa nesta última situação.



(a) A partir do significado físico da tangente do ângulo que as retas formam com o eixo do tempo, ou seja, o quociente $\frac{\textit{Variação do espaço}}{\textit{Variação do tempo}}$, justifique por que o quadrilátero *ABCD* é um paralelogramo.

(b) Mostre que a reta *BD* é paralela ao eixo do tempo.

(c) Se Mário tivesse partido às 17h30min e Joana partisse às 18h, quanto a menos Joana teria andado?

PROBLEMA 5

(a) Sejam *x*, *y*, *z*, *w* e α números reais tais que $\frac{x}{y}=\frac{z}{w}=\alpha$.

Prove que se $y+w\neq0$ então $\frac{x+z}{y+w}=\alpha$.

(b) Os números reais *a*, *b*, *c* e *r* são tais que

$$\frac{b(c-a)}{a(b-c)}=\frac{c(b-a)}{b(c-a)}=r$$

Mostre que $\frac{1}{r}+1=r$ e calcule todos os valores que *r* pode assumir. Não se esqueça de que, para provar que um valor de *r* é possível, você também deve mostrar que realmente existem valores *a*, *b* e *c* que satisfazem as igualdades acima.

XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (11 de novembro de 2006)
Nível γ(1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

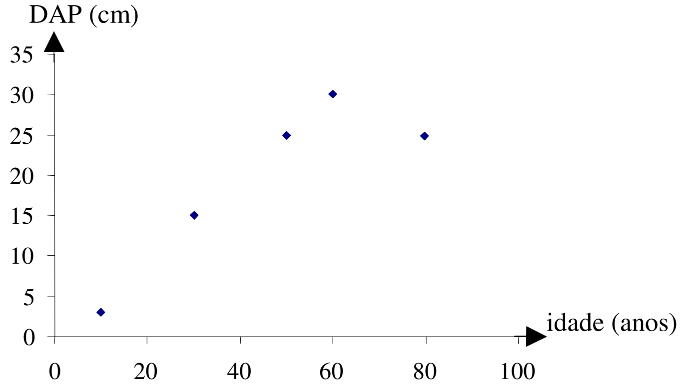
Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em uma floresta, é de se esperar que árvores com troncos mais grossos sejam mais velhas. Com o intuito de verificar a relação entre o tamanho da árvore e a sua idade, foram medidas as idades, em anos, e o DAP (diâmetro à altura do peito) de 5 carvalhos no norte dos EUA, sendo obtidos os seguintes resultados aproximados:

Idade (anos)	10	30	50	60	80
DAP (cm)	3	15	25	30	25

O gráfico do DAP em função da idade é



Nesse problema, sendo x a idade, determinaremos a reta de equação $y = ax + b$ que melhor se aproxima desses dados, no sentido que a soma dos quadrados dos erros (diferença entre o DAP e o y correspondente) é mínima. Os procedimentos descritos nos itens (a) e (b) são um exemplo do *Método dos Mínimos Quadrados*, muito utilizado em todas as áreas do conhecimento para estudar possíveis relações entre duas ou mais variáveis.

(a) Seja A uma matriz de cinco linhas e duas colunas: a primeira coluna contém as idades tabuladas das árvores e a segunda coluna tem todas as entradas iguais a 1. Além disso, seja B a matriz coluna cuja entrada na linha i, $1 \le i \le 5$, é o DAP correspondente à idade que aparece na linha i de A. Escreva explicitamente A e B.

(b) Pode-se demonstrar que os valores a e b são as soluções do sistema $A^t \cdot A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^t \cdot B$, em que A^t é a matriz transposta de A. Encontre a e b.

(c) De acordo com os resultados obtidos nos itens anteriores, quanto é o DAP de um carvalho de 40 anos?

PROBLEMA 2

No código numérico de diversos produtos, como, por exemplo, aquele que aparece no código de barras, utiliza-se o seguinte esquema para detectar erros de digitação: multiplicando-se cada dígito alternadamente por 1 e 3 e adicionando-se os resultados, sempre se obtém um múltiplo de 10. Por exemplo, um possível código de um produto é 4905370265546, pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+4\times3+6\times1=120$$

é um múltiplo de 10.

Por outro lado, 4905370265564 não pode ser o código de um produto pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+6\times3+4\times1=124$$

não é um múltiplo de 10.

Assim, conferindo esta conta, o computador é capaz de detectar erros de digitação.

(a) O último dígito do código de um produto é chamado *dígito de verificação*. O dígito de verificação que aparece na embalagem de um desodorante está ilegível. Abaixo, ele está indicado por um ■:

789103304863■

Qual é esse dígito?

(b) Como você pode observar nos dois primeiros exemplos, os dois últimos dígitos trocaram de lugar. Esse é um dos erros mais comuns de digitação, a *transposição*. Mais precisamente, a *transposição de dois dígitos consecutivos* ocorre quando em vez de se digitar *ab* digita-se *ba*, onde *a* e *b* representam algarismos distintos.

(i) Um corretivo líquido tem código 789**72**54113302. Mostre que, mesmo que haja uma transposição entre os dígitos 7 e 2, obtemos um possível código de um produto. Ou seja, caso ocorra essa transposição, ela não será detectada.

(ii) Como vimos no item anterior, o esquema acima é capaz de detectar *quase todos* os erros de transposição. Determine todos os pares de dígitos consecutivos distintos *ab* cuja transposição *ba* **não** é detectada pelo esquema acima em qualquer código. Observe que, pelo item anterior, 72 é um desses pares.

PROBLEMA 3

Neste problema determinaremos todas as funções f com domínio nos reais positivos e assumindo valores reais tais que $x^{f(y)} = y^{f(x)}$ para quaisquer x, y.

(a) Prove que, para toda função satisfazendo a condição dada, $f(1) = 0$.

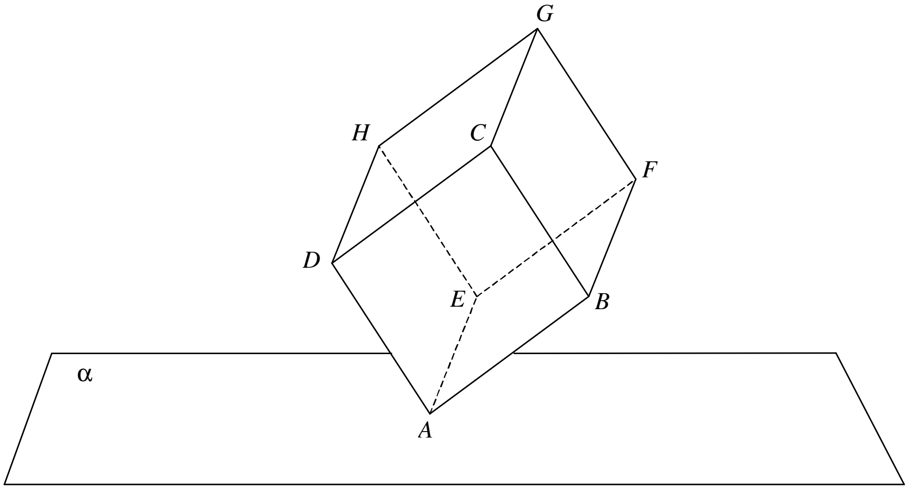
(b) Prove que, para toda função satisfazendo a condição dada, $\frac{f(x)}{\ln x}$ é constante, $x \neq 1$.

A expressão $\ln x$ representa o logaritmo neperiano de x (base $e \approx 2{,}72$).

(c) Determine todas as funções f que satisfazem a condição dada.

PROBLEMA 4

Na figura a seguir, *ABCDEFGH* é um cubo de aresta 5, sendo que o vértice *A* pertence a um plano α. As distâncias dos vértices *B* e *E* ao plano α são iguais a 3.



(a) Calcule a distância do vértice *F* ao plano α.

(b) Mostre que o plano determinado pelos pontos *A*, *D* e *F* é perpendicular ao plano α.

(c) Prove que a reta *CH* é paralela ao plano α e calcule a sua distância a esse plano.

PROBLEMA 5

Nos aviões, o cartão de embarque indica, entre outras coisas, o lugar onde o passageiro deve se sentar.

Murali, o primeiro passageiro a embarcar em um avião, com lugar para 100 pessoas, perdeu seu cartão de embarque, e por isso sentou-se em um assento que escolheu aleatoriamente. Em seguida, cada um dos demais 99 passageiros sentou-se em seu lugar, se este estava livre, ou caso contrário escolheu ao acaso um dos assentos vagos.

Seja $P(k)$ a probabilidade de o k-ésimo passageiro a embarcar sentar-se em seu lugar designado.

(a) Calcule $P(2)$, $P(3)$ e $P(4)$.

(b) Encontre uma expressão para $P(k)$, $2 \leq k \leq 100$. Não se esqueça de que você deve justificar sua resposta.