

XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (19 de agosto de 2006)

Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Esmeralda quer visitar seus primos na Kruguerrândia e, para isso, precisa trocar alguns reais por kruguerrandis (Kr\$), moeda oficial do país que vai visitar.

No Banco Betamerindus, Kr\$1,00 vale R\$2,83 e no Banco Gamerindus, Kr\$1,00 vale R\$2,94. No Betamerindus é cobrada uma taxa fixa de R\$86,35 para qualquer troca de dinheiro. No Gamerindus não é cobrada tal taxa.

- (a) Ela foi aos dois bancos e voltou, de cada um, com Kr\$250,00. Ao todo, quantos reais foram gastos na aquisição dos Kr\$500,00?
 (b) Num outro dia, ela foi aos dois bancos e voltou, de cada um, com a mesma quantidade de kruguerrandis. Ela gastou, no total, R\$951,85. Ao todo, quantos Kruguerrandis ela adquiriu nesse dia?

PROBLEMA 2

Em Música, a escala mais utilizada é a *escala cromática*, que tem doze notas musicais:

Dó, Dó[#], Ré, Ré[#], Mi, Fá, Fá[#], Sol, Sol[#], Lá, Lá[#], Si

As doze notas podem aparecer em diferentes tons. Por exemplo, depois de Si, temos novamente o Dó, porém em um tom diferente. E, assim, sucessivamente.

Uma maneira de iniciar o “Parabéns a Você” é: Dó, Dó, Ré, Dó, Fá, Mi, Dó, Dó, Ré, Dó, Sol, Fá.

Podemos mudar o tom de uma música e, para isso, as diferenças entre notas correspondentes devem ser as mesmas. Por exemplo, “Parabéns a Você” começando com Fá fica assim: Fá, Fá, Sol, Fá, Lá[#], Lá, Fá, Fá, Sol, Fá, Dó, Lá[#].

Na segunda versão, a primeira nota, Fá, está *cinco notas à frente* da sua correspondente na primeira versão, Dó. Bem como todas as demais notas. Em especial, a penúltima nota na segunda versão, Dó, também está *cinco notas à frente* da correspondente na primeira versão, Sol. De fato, temos a seqüência Sol, Sol[#], Lá, Lá[#], Si, e novamente o Dó.

Agora é a sua vez!

(a) As primeiras notas de “Oh Susana” são Dó, Ré, Mi, Sol, Sol, Lá, Sol, Mi, Dó, Ré, Mi, Mi, Ré, Dó, Ré.

Daniel está rouco e transportou “Oh Susana” para um tom mais baixo, *quatro notas atrás*, como indicado na tabela:

Antes:	Dó	Ré	Mi	Sol	Sol	Lá	Sol	Mi	Dó	Ré	Mi	Mi	Ré	Dó	Ré
Depois:	Sol [#]														

Copie a tabela acima na *Folha de Respostas* e complete-a.

(b) Em uma música pode haver dois cantores cantando notas diferentes. Por exemplo, em “Eight Days A Week” (The Beatles), no começo do refrão Paul McCartney canta *sete notas à frente* de John Lennon:

	Eight	days	a	week
John	Lá	Lá	Si	Lá
Paul	Mi	Mi	Fá [#]	Mi

Nas demais oito notas, Paul canta *cinco notas à frente*.

	I	lo-	o-	o-	o-	ove	you	
John	Lá	Si	Lá	Si	Lá	Si	Lá	Fá [#]
Paul								

Copie a tabela acima na *Folha de Respostas* e complete-a com as notas que Paul canta.

PROBLEMA 3

Em 2006, o primeiro dia do ano foi um domingo, o primeiro dia da semana. Qual é o próximo ano em que isso ocorrerá?

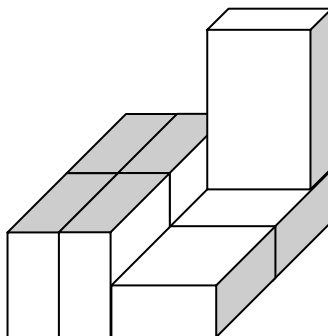
Considere que os anos não bissextos têm 365 dias e os bissextos têm 366 dias. São bissextos:

- os anos que são múltiplos de 4 e não são múltiplos de 100;
- os anos que são múltiplos de 400.

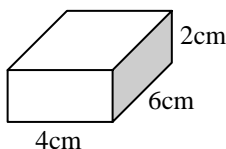
Por exemplo, 1996 e 2000 foram anos bissextos e 1900 não foi um ano bissexto.

PROBLEMA 4

Leonardo colou alguns blocos de madeira do seguinte modo:



As dimensões de cada bloco são as seguintes:



Colando mais alguns blocos aos iniciais, ele quer formar o menor cubo maciço possível.

- Qual é a medida da aresta do cubo formado?
- Quantos blocos ao todo haverá no cubo formado? (Não esqueça de contar os blocos iniciais!)

PROBLEMA 5

Os algarismos do mostrador do relógio digital de Leandro têm os seguintes formatos:

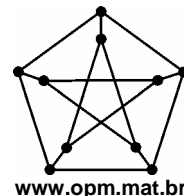
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

O relógio estava marcando **10:30**. Leandro virou o seu relógio de ponta-cabeça e viu então que este marcava **0E:0I**. Aí ele colocou o relógio em frente a um espelho e ficou muito surpreso quando viu que o horário mostrado pela imagem no espelho era **10:30**. Leandro ficou tão empolgado com o fato que decidiu ficar olhando para a imagem de seu relógio de ponta-cabeça no espelho, minuto a minuto, do meio-dia até **23:59**, e disse “eita!” todas as vezes em que isso aconteceu. Quantas vezes ele disse “eita!”?

XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (19 de agosto de 2006)

Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em Música, a escala mais utilizada é a *escala cromática*, que tem doze notas musicais:

Dó, Dó[#], Ré, Ré[#], Mi, Fá, Fá[#], Sol, Sol[#], Lá, Lá[#], Si

As doze notas podem aparecer em diferentes tons. Por exemplo, depois de Si, temos novamente o Dó, porém em um tom diferente. E, assim, sucessivamente.

Uma maneira de iniciar o “Parabéns a Você” é: Dó, Dó, Ré, Dó, Fá, Mi, Dó, Dó, Ré, Dó, Sol, Fá.

Podemos mudar o tom de uma música e, para isso, as diferenças entre notas correspondentes devem ser as mesmas. Por exemplo, “Parabéns a Você” começando com Fá fica assim: Fá, Fá, Sol, Fá, Lá[#], Lá, Fá, Fá, Sol, Fá, Dó, Lá[#].

Na segunda versão, a primeira nota, Fá, está *cinco notas à frente* da sua correspondente na primeira versão, Dó. Bem como todas as demais notas. Em especial, a penúltima nota na segunda versão, Dó, também está *cinco notas à frente* da correspondente na primeira versão, Sol. De fato, temos a seqüência Sol, Sol[#], Lá, Lá[#], Si, e novamente o Dó.

Agora é a sua vez!

(a) As primeiras notas de “Oh Susana” são Dó, Ré, Mi, Sol, Sol, Lá, Sol, Mi, Dó, Ré, Mi, Mi, Ré, Dó, Ré.

Daniel está rouco e transportou “Oh Susana” para um tom mais baixo, *quatro notas atrás*, como indicado na tabela:

Antes:	Dó	Ré	Mi	Sol	Sol	Lá	Sol	Mi	Dó	Ré	Mi	Mi	Ré	Dó	Ré
Depois:	Sol [#]														

Copie a tabela acima na *Folha de Respostas* e complete-a.

(b) Em uma música pode haver dois cantores cantando notas diferentes. Por exemplo, em “Eight Days A Week” (The Beatles), no começo do refrão Paul McCartney canta *sete notas à frente* de John Lennon:

	Eight	days	a	week
John	Lá	Lá	Si	Lá
Paul	Mi	Mi	Fá [#]	Mi

Nas demais oito notas, Paul canta *cinco notas à frente*.

	I	lo-	o-	o-	o-	ove		you
John	Lá	Si	Lá	Si	Lá	Si	Lá	Fá [#]
Paul								

Copie a tabela acima na *Folha de Respostas* e complete-a com as notas que Paul canta.

PROBLEMA 2

Esmeralda quer visitar seus primos na Kruguerrândia e, para isso, precisa trocar alguns reais por kruguerrandis (Kr\$), moeda oficial do país que vai visitar.

No Banco Betamerindus, Kr\$1,00 vale R\$2,83 e no Banco Gamerindus, Kr\$1,00 vale R\$2,94. No Betamerindus é cobrada uma taxa fixa de R\$86,35 para qualquer troca de dinheiro. No Gamerindus não é cobrada tal taxa.

(a) Ela foi aos dois bancos e voltou, de cada um, com Kr\$250,00. Ao todo, quantos reais foram gastos na aquisição dos Kr\$500,00?

(b) A partir de que quantia de kruguerrandis é melhor fazer a aquisição no Banco Betamerindus?

PROBLEMA 3

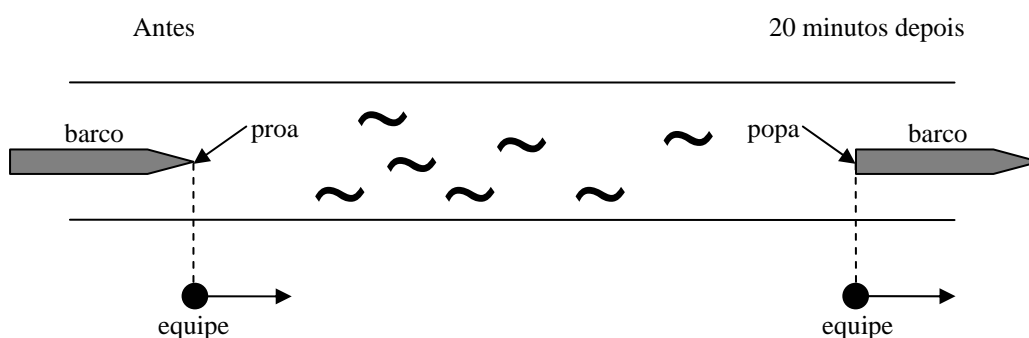
Qual é o menor palíndromo de cinco algarismos que é múltiplo de 99?

Considere que:

- Um número tem cinco algarismos quando é maior ou igual a 10000 e menor ou igual a 99999.
- Um número é um palíndromo quando, ao escrevermos seus algarismos na ordem inversa, obtivermos o mesmo número. Por exemplo, 21812 e 32023 são palíndromos, enquanto 42244 e 59950 não são.
- Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9. Por exemplo, 87633 é divisível por 9, pois $8 + 7 + 6 + 3 + 3 = 27$ é divisível por 9.
- Um número é divisível por 11 quando a soma de seus algarismos de ordem ímpar (unidade, centena, dezena de milhar...) menos a soma dos algarismos de ordem par (dezena, unidade de milhar...) é múltiplo de 11. Por exemplo, 19041 e 31482 são múltiplos de 11 pois $(1 + 0 + 1) - (9 + 4) = -11$ e $(3 + 4 + 2) - (1 + 8) = 0$ são múltiplos de 11; e 20652 não é múltiplo de 11 pois $(2 + 6 + 2) - (0 + 5) = 5$ não é múltiplo de 11.

PROBLEMA 4

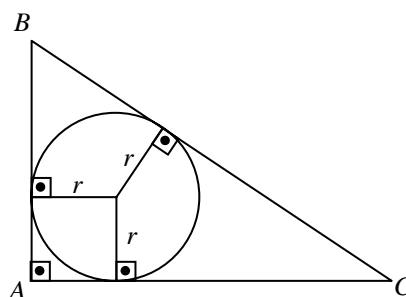
A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) de 2006 foi realizada na Eslovênia. Num passeio, a equipe brasileira estava caminhando a uma velocidade de 3 km/h, seguindo a margem de um trecho reto de um rio, quando perceberam que um barco se aproximava a uma velocidade de 3,4 km/h, no mesmo sentido. Entre o momento que a proa do barco alcançou a equipe e o momento que a popa do barco passou por ela, decorreram 20 minutos.



- (a) Qual a distância que a equipe percorreu nesses 20 minutos?
 (b) Qual é o comprimento do barco?

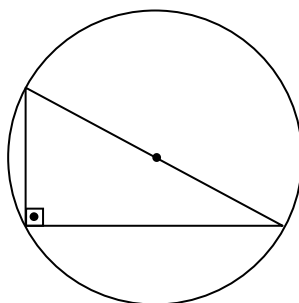
PROBLEMA 5

(a) Seja ABC um triângulo retângulo em A . Sendo r o raio da circunferência inscrita em ABC , prove que $r = \frac{AB + AC - BC}{2}$.



(b) Qual a distância entre os centros das circunferências inscrita e circunscrita do triângulo retângulo de catetos 3cm e 4cm?

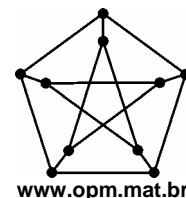
Você pode querer utilizar que o centro da circunferência circunscrita a um triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa.



XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (19 de agosto de 2006)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



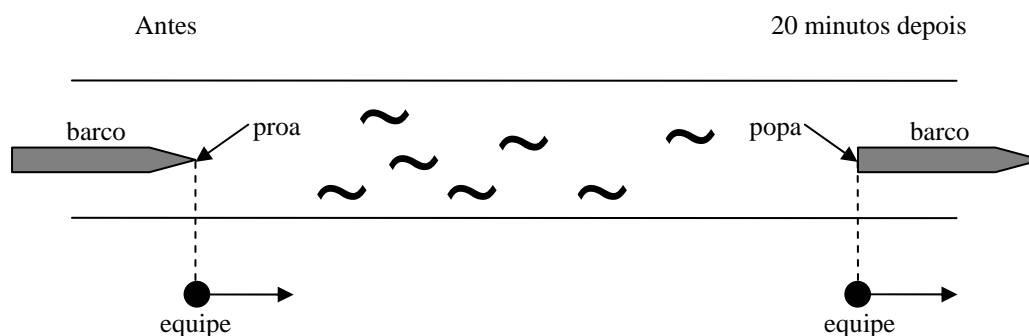
Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) de 2006 foi realizada na Eslovênia. Num passeio, a equipe brasileira estava caminhando a uma velocidade de 3 km/h, seguindo a margem de um trecho reto de um rio, quando perceberam que um barco se aproximava a uma velocidade de 3,4 km/h, no mesmo sentido. Entre o momento que a proa do barco alcançou a equipe e o momento que a popa do barco passou por ela, decorreram 20 minutos.



- (a) Qual a distância que a equipe percorreu nesses 20 minutos?
(b) Qual é o comprimento do barco?

PROBLEMA 2

Qual é o menor palíndromo de cinco algarismos que é múltiplo de 99?

Considere que:

- Um número tem cinco algarismos quando é maior ou igual a 10000 e menor ou igual a 99999.
- Um número é um palíndromo quando, ao escrevermos seus algarismos na ordem inversa, obtivermos o mesmo número. Por exemplo, 21812 e 32023 são palíndromos, enquanto 42244 e 59950 não são.
- Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9. Por exemplo, 87633 é divisível por 9, pois $8 + 7 + 6 + 3 + 3 = 27$ é divisível por 9.
- Um número é divisível por 11 quando a soma de seus algarismos de ordem ímpar (unidade, centena, dezena de milhar...) menos a soma dos algarismos de ordem par (dezena, unidade de milhar...) é múltiplo de 11. Por exemplo, 19041 e 31482 são múltiplos de 11 pois $(1 + 0 + 1) - (9 + 4) = -11$ e $(3 + 4 + 2) - (1 + 8) = 0$ são múltiplos de 11; e 20652 não é múltiplo de 11 pois $(2 + 6 + 2) - (0 + 5) = 5$ não é múltiplo de 11.

PROBLEMA 3

Em Música, a escala mais utilizada é a *escala cromática*, que tem doze notas musicais:

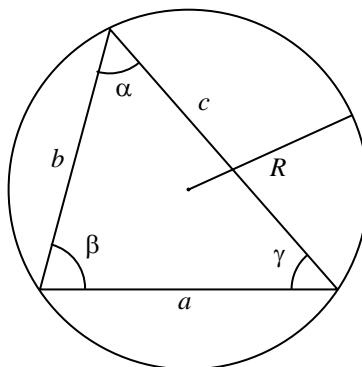
Dó, Dó[#], Ré, Ré[#], Mi, Fá, Fá[#], Sol, Sol[#], Lá, Lá[#], Si

Uma nota musical é, na verdade, uma onda, e o que a determina é sua frequência. Cada nota é igualmente mais alta que a anterior, ou seja, a razão entre as frequências de duas notas consecutivas é constante. E depois de Si, temos novamente o Dó, uma oitava acima. A frequência deste novo Dó é o dobro da frequência do Dó inicial.

Pode-se provar que as frequências das notas musicais são da forma $f_0 \cdot k^n$ para um certo n inteiro. A frequência da nota Lá fundamental é $f_0 = 440$ Hz e k é uma constante.

- (a) Determine k .
- (b) Um piano tem, ao todo, 88 teclas associadas a 88 notas distintas consecutivas. A frequência mais baixa emitida por um piano é 27,5 Hz. Qual a frequência mais alta que um piano emite?
- (c) O ouvido humano consegue perceber frequências de 20 Hz a 20000 Hz. Quantas teclas um piano deveria ter para que fosse possível tocar todas as notas musicais que podem ser percebidas por um ser humano?

Dados: $\log 2 \approx 0,30$ e $\log 11 \approx 1,04$.

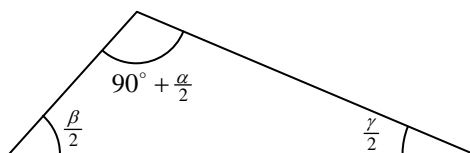


Em qualquer triângulo, de lados a , b e c e raio da circunferência circunscrita R , valem:

- a lei dos co-senos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
- a lei dos senos $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

(a) Aplicando a lei dos co-senos e a lei dos senos, prove que, sendo α , β e γ os ângulos internos de um triângulo,
 $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha$.

(b)



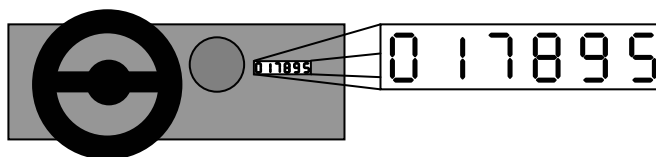
Observando a figura acima, prove que, sendo α , β e γ ângulos internos de um triângulo,

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Você pode querer utilizar os seguintes fatos:

- $\sin(90^\circ + x) = \cos x$
- $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$
- $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$

PROBLEMA 5



O odômetro é um instrumento que mede quantos quilômetros o carro percorreu desde a sua fabricação. Um carro saiu de fábrica com o odômetro defeituoso: ele passa diretamente do dígito **3** para o dígito **5**, sempre pulando o dígito **4**, em todas as suas casas decimais (unidade, dezena, centena, milhar, dezena de milhar e centena de milhar). Por exemplo, ele passa diretamente de **000333** para **000335** e de **00 1939** para **00 1950**.

- (a) Se o odômetro marcar **000 100**, quantos quilômetros o carro realmente já percorreu?
 (b) Se o odômetro marcar **002006**, quantos quilômetros o carro realmente já percorreu?