# *XXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA*

## *Prova da Fase Final (5 de novembro de 2005)*

## *Nível $\alpha$ (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)*

www.opm.mat.br

***Folha de Perguntas***

**Instruções**:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

---

**PROBLEMA 1**

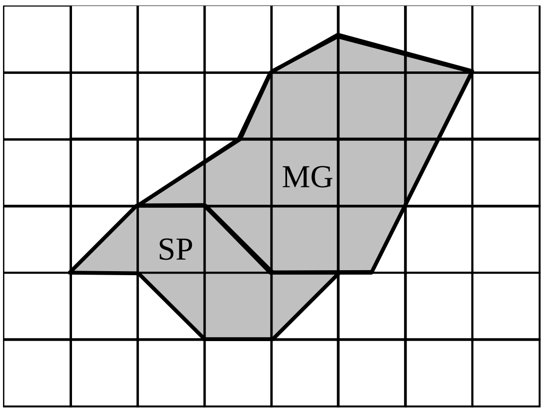
Segundo uma reportagem da revista *Veja*, 20% dos brasileiros nunca foram ao dentista.
Considerando que a população do Brasil é de 170 milhões, dos quais 32 milhões moram na zona rural, responda:
(a) Qual é o número de brasileiros que nunca foram ao dentista?
(b) A partir dos dados do problema, podemos afirmar que há residentes da zona urbana que nunca foram ao dentista?

**PROBLEMA 2**

Segundo a literatura, Tio Patinhas tem 3 acres cúbicos de dinheiro em sua caixa-forte. Consideremos que um acre cúbico é igual ao volume de um cubo cujas faces têm 1 acre de área, de modo que 1 acre cúbico é igual a 257.440 $m^3$.
Para se ter uma idéia de quanto dinheiro ele tem na caixa-forte, vamos imaginar que Tio Patinhas possua apenas moedas de 10 centavos de dólar. Dez dessas moedas ocupam cerca de 3 $cm^3$. Utilizando estas informações, estime quanto dinheiro o Tio Patinhas guarda na sua famosa caixa-forte.

**PROBLEMA 3**

A seguir, apresentamos um mapa estilizado dos estados de São Paulo (SP) e Minas Gerais (MG). Todos os vértices das regiões poligonais que representam os estados são ou vértices do quadriculado ou pontos médios de lados dos quadrados.




Segundo dados do IBGE, o estado de São Paulo tem 248.209 $km^2$ de área.
A partir do mapa fornecido, calcule a área de Minas Gerais.

**PROBLEMA 4**

Pode-se verificar que $\dfrac{10^k-1}{9}=\underbrace{11\ldots1}_{k\text{ uns}}$. Por exemplo, $\dfrac{10^7-1}{9}=\dfrac{10.000.000-1}{9}=\dfrac{9.999.999}{9}=\underbrace{11\ldots1}_{7\text{ uns}}$.

(a) Escreva a representação decimal do número $\dfrac{10^{20}-1}{9}+4\cdot\dfrac{10^{10}-1}{9}+1$.

(b) Calcule o valor de $\underbrace{333...333}_{99\text{ dígitos três}}4$ elevado ao quadrado.

**PROBLEMA 5**

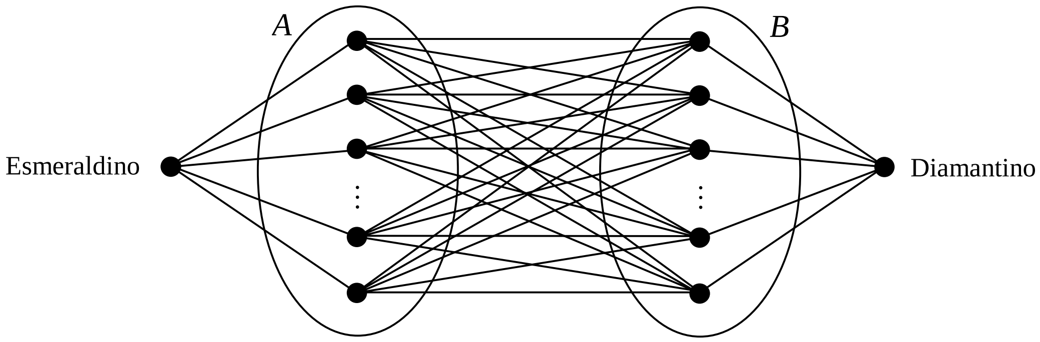
Numa festa de casamento há 500 pessoas. A partir das oito da noite, as pessoas começam a deixar a festa assim:

- No primeiro minuto após as oito horas, ou seja, entre 20h00min00s e 20h00min59s, saem todos os que não têm amigo entre os presentes, caso haja alguém nessas condições.
- No minuto seguinte, ou seja, entre 20h01min00s e 20h01min59s, vão embora todos os que têm exatamente 1 amigo entre os presentes (só sai neste intervalo quem satisfizer tal condição).
- Decorrido mais um minuto, ou seja, entre 20h02min00s e 20h02min59s, vão embora todos os que têm exatamente 2 amigos entre os que ainda estão presentes (só sai neste intervalo quem satisfizer tal condição).
- Entre 20h03min00s e 20h03min59s, vão embora todos os que têm exatamente 3 amigos entre os que ainda estão presentes (só sai neste intervalo quem satisfizer tal condição).
- E assim sucessivamente, para 4 amigos, 5 amigos, 6 amigos, ..., 499 amigos.

Finalmente, quinhentos minutos transcorridos desde as oito da noite, às 04h20min00s da manhã, os últimos presentes, caso haja algum, vão embora e o salão de festas é fechado.

Para responder aos itens abaixo considere que, infelizmente, nesta festa não são feitas novas amizades.

(a) Uma situação possível está representada na figura a seguir, em que os pontos representam as pessoas e dois pontos estão ligados caso as pessoas correspondentes sejam amigas.




Cada um dos grupos *A* e *B* têm 249 pessoas. Cada uma das pessoas de um grupo é amiga de todas as pessoas do outro grupo e pessoas de um mesmo grupo não são amigas. Esmeraldino é amigo de todas as pessoas do grupo *A* e Diamantino, de todas as pessoas do grupo *B*. E ninguém é amigo de mais ninguém.

Na situação descrita acima, quantas pessoas ficam até o salão fechar?

(b) Existe alguma situação em que as 500 pessoas ficam até o salão fechar?

Lembre-se que você deve justificar suas respostas.

# XXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

## Prova da Fase Final (5 de novembro de 2005)

## Nível $\beta$ (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

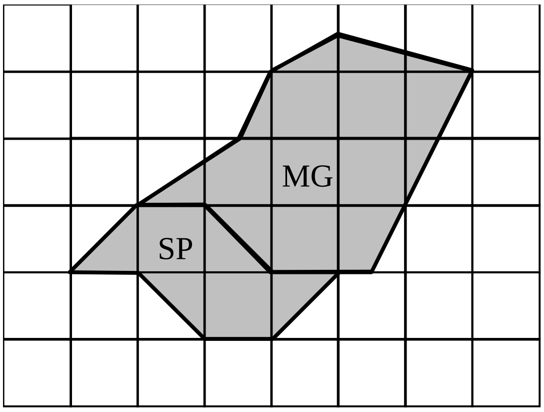
www.opm.mat.br

***Folha de Perguntas***

**Instruções**:
• A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
• Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
• Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
• Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
• Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
• Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

---

**PROBLEMA 1**
A seguir, apresentamos um mapa estilizado dos estados de São Paulo (SP) e Minas Gerais (MG). Todos os vértices das regiões poligonais que representam os estados são ou vértices do quadriculado ou pontos médios de lados dos quadrados.




Segundo dados do IBGE, o estado de São Paulo tem 248.209 km$^2$ de área.

(a) A partir do mapa fornecido, calcule a área de Minas Gerais.
(b) Ainda segundo o IBGE, a área de Minas Gerais é 586.528 km$^2$. Mostre que a diferença entre a área real e o valor calculado no item (a) é menor do que 1% da área real (ou seja, que o erro percentual cometido é menor do que 1%).

**PROBLEMA 2**
Billie Bonka é dono de uma fabulosa indústria de doce de leite. Para manter a indústria funcionando, ele precisa comprar leite constantemente. O senhor Bonka também é um exímio matemático e administrador e concluiu que o gasto anual total $C$ que ele tem com compra e armazenagem de leite é obtido a partir da equação

$$C = D \cdot P + C_A \cdot \frac{Q}{2} + C_S \cdot \frac{D}{Q}, \text{ em que}$$

- $D$ é a *demanda*, ou seja, a quantidade de litros de leite necessária por ano para fabricar os maravilhosos doces de leite;
- $P$ é o preço de um litro de leite;
- $C_A$ é o que se gasta para armazenar o leite ao longo de um ano;
- $C_S$ é o gasto com o serviço prestado pelo fornecedor de leite;
- $Q$ é a quantidade de litros de leite comprada a cada pedido.

Neste problema, determinaremos o menor valor possível para $C$.
Sabemos que $D$ = 200.000 litros, $P$ = 2 reais, $C_A$ = 10.000 reais e $C_S$ = 1.000 reais.

(a) Quais são os possíveis valores de $Q$ para os quais o gasto anual total $C$ é R$8.525.000,00?

(b) Billie Bonka aprendeu na Faculdade de Engenharia de Produção que o gasto anual mínimo é obtido para $Q = \sqrt{\dfrac{2C_S D}{C_A}}$.

Encontre o gasto anual total $C$ mínimo na situação apresentada.

**PROBLEMA 3**

Pode-se verificar que $\dfrac{10^k - 1}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ uns}}$. Por exemplo, $\dfrac{10^7 - 1}{9} = \dfrac{10.000.000 - 1}{9} = \dfrac{9.999.999}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{7 \text{ uns}}$.

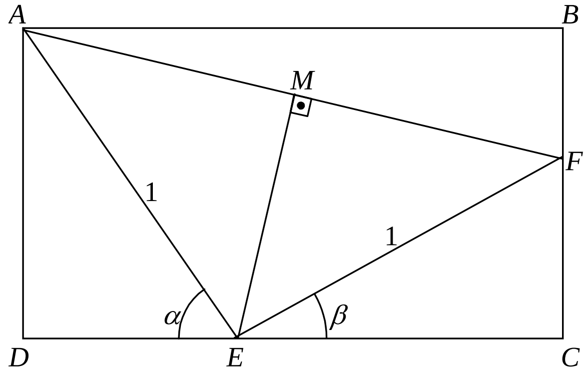
(a) Escreva a representação decimal do número $\dfrac{10^{20} - 1}{9} + 4 \cdot \dfrac{10^{10} - 1}{9} + 1$.

(b) Simplifique e, então, fatore a expressão $\dfrac{x^2 - 1}{9} + 4 \cdot \dfrac{x - 1}{9} + 1$.

(c) Mostre que existe um quadrado perfeito cuja representação decimal inicia-se com 100 algarismos 1, isto é, os seus 100 primeiros algarismos da esquerda para a direita são todos iguais a 1.

**PROBLEMA 4**

Na figura a seguir, *ABCD* é um retângulo.




(a) Calcule as medidas dos ângulos $A\hat{F}E$ e $B\hat{A}F$ em função de $\alpha$ e $\beta$.

(b) Mostre que $CD = \cos\alpha + \cos\beta$.

(c) Prove que $AF = 2\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

(d) A partir dos itens anteriores, demonstre uma das fórmulas de Prostaférese: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$.

**PROBLEMA 5**

Numa festa de casamento há 500 pessoas. A partir das oito da noite, as pessoas começam a deixar a festa assim:

• No primeiro minuto após as oito horas, ou seja, entre 20h00min00s e 20h00min59s, saem todos os que não têm amigo entre os presentes, caso haja alguém nessas condições.

• No minuto seguinte, ou seja, entre 20h01min00s e 20h01min59s, vão embora todos os que têm exatamente 1 amigo entre os presentes (só sai neste intervalo quem satisfizer tal condição).

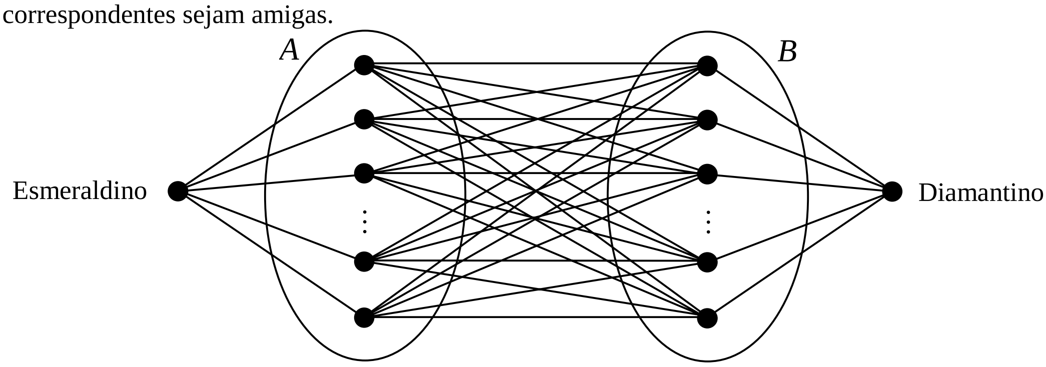
• Decorrido mais um minuto, ou seja, entre 20h02min00s e 20h02min59s, vão embora todos os que têm exatamente 2 amigos entre os que ainda estão presentes (só sai neste intervalo quem satisfizer tal condição).

• Entre 20h03min00s e 20h03min59s, vão embora todos os que têm exatamente 3 amigos entre os que ainda estão presentes (só sai neste intervalo quem satisfizer tal condição).

• E assim sucessivamente, para 4 amigos, 5 amigos, 6 amigos, ..., 499 amigos.

Finalmente, quinhentos minutos transcorridos desde as oito da noite, às 04h20min00s da manhã, os últimos presentes, caso haja algum, vão embora e o salão de festas é fechado.

(a) Uma situação possível está representada na figura a seguir, em que os pontos representam as pessoas e dois pontos estão ligados caso as pessoas correspondentes sejam amigas.




Cada um dos grupos *A* e *B* têm 249 pessoas. Cada uma das pessoas de um grupo é amiga de todas as pessoas do outro grupo e pessoas de um mesmo grupo não são amigas. Esmeraldino é amigo de todas as pessoas do grupo *A* e Diamantino, de todas as pessoas do grupo *B*. E ninguém é amigo de mais ninguém.

Na situação descrita acima, quantas pessoas ficam até o salão fechar?

(b) Existe alguma situação em que 499 pessoas ficam até o salão fechar?

Lembre-se que você deve justificar suas respostas.

# XXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

## Prova da Fase Final (5 de novembro de 2005)

## Nível $\gamma$ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

***Folha de Perguntas***

**Instruções**:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

---

**PROBLEMA 1**

Billie Bonka é dono de uma fabulosa indústria de doce de leite. Para manter a indústria funcionando, ele precisa comprar leite constantemente. O senhor Bonka também é um exímio matemático e administrador e concluiu que o gasto anual total $C$ que ele tem com compra e armazenagem de leite é obtido a partir da equação

$$C = D \cdot P + C_A \cdot \frac{Q}{2} + C_S \cdot \frac{D}{Q}, \text{ em que}$$

- $D$ é a *demanda*, ou seja, a quantidade de litros de leite necessária por ano para fabricar os maravilhosos doces de leite;
- $P$ é o preço de um litro de leite;
- $C_A$ é o que se gasta para armazenar o leite ao longo de um ano;
- $C_S$ é o gasto com o serviço prestado pelo fornecedor de leite;
- $Q$ é a quantidade de litros de leite comprada a cada pedido.

Neste problema, determinaremos o menor valor possível para $C$.
Sabemos que $D$ = 200.000 litros, $P$ = 2 reais, $C_A$ = 10.000 reais e $C_S$ = 1.000 reais.

(a) Quais são os possíveis valores de $Q$ para os quais o gasto anual total $C$ é R$8.525.000,00?

(b) Billie Bonka aprendeu na Faculdade de Engenharia de Produção que o gasto anual mínimo é obtido para $Q = \sqrt{\dfrac{2C_S D}{C_A}}$.

Encontre o gasto anual total $C$ mínimo na situação apresentada.

**PROBLEMA 2**

Até algumas décadas atrás, calculadoras e computadores não eram tão comuns. Quando queríamos saber, por exemplo, o valor de um logaritmo, tínhamos de consultar uma “Tábua de Logaritmos”. Uma típica tábua de logaritmos era formada por páginas e páginas de tabelas as quais permitiam que o usuário obtivesse com boa aproximação os valores de logaritmos decimais.
Em 1881 (acredite, os computadores não existiam!), o matemático Simon Newcomb publicou um artigo no qual observava que, nas tábuas de logaritmos encontradas em bibliotecas, as primeiras páginas eram as mais sujas e as páginas seguintes tornavam-se progressivamente mais limpas. Pela maneira como os logaritmos eram dispostos em tais tabelas, ele inferiu que os pesquisadores das diversas áreas das Ciências utilizavam mais números começados com 1 do que começados por 2, mais números começados com 2 do que começados por 3 e assim por diante. Esta engenhosa observação levou-o a concluir que, nas Ciências, a probabilidade de que um número tenha seu primeiro algarismo significativo igual a $d$ é $P(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$, $1 \le d \le 9$.

A descoberta de Newcomb passou despercebida até ser redescoberta pelo físico Benford que, ao analisar tabelas com dados tão diversos como raízes quadradas e calores específicos de compostos, obteve evidência empírica para ela. Por este motivo, tal propriedade de probabilidades recebe o nome de *Lei de Benford*.

(a) Mostre que a função probabilidade $P(d)$ está bem definida, ou seja, $P(d) \ge 0$ para $1 \le d \le 9$ e a soma de todos os valores de $P(d)$ é 1, isto é, $P(1) + P(2) + \cdots + P(9) = 1$.

(b) Na lista de constantes físicas recomendada pelo *Committee On Data for Science and Technology* há 183 constantes (dados de 1998). Utilizando a Lei de Benford, estime o número de constantes cujo primeiro algarismo significativo é 9.
Adote $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$.

**PROBLEMA 3**

Dois tenistas, Berrando Gemigemi, o *Geminho*, e Kustavo Guerten, o *Kuka*, disputam o *tiebreaker* de um jogo de tênis. Num tiebreaker, vence quem fizer 7 pontos, vencendo com pelo menos dois pontos de vantagem. Caso isto não ocorra, ou seja, se em algum momento o jogo estiver empatado em 6-6, o jogo continua até que um dos jogadores obtenha uma vantagem de dois pontos. Algumas possíveis pontuações finais num tiebreaker são 7-5, 7-0, 2-7, 6-8 e 19-17.

Suponha que Geminho, logo após ganhar o último ponto, tem probabilidade 0,5 de ganhar o próximo ponto. Contudo, se perder o último ponto, Geminho fica mais atento e tem probabilidade 0,7 de ganhar o ponto seguinte. Em tênis, um ponto não pode terminar empatado, ou seja, as probabilidades de Kuka vencer nas duas situações citadas são 1 – 0,5 = 0,5 e 1 – 0,7 = 0,3, respectivamente.

(a) Suponha que Geminho perdeu o primeiro ponto. Qual a probabilidade de Geminho vencer o terceiro ponto?

(b) Seja $p_n$, $n$ inteiro positivo, a probabilidade de Geminho vencer o $n$-ésimo ponto e $q_n = 1 - p_n$ a probabilidade de Kuka ganhar o $n$-ésimo ponto.

Considere a matriz $T = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Prove que a matriz $\begin{pmatrix} p_{k+1} & q_{k+1} \end{pmatrix}$ é igual ao produto $\begin{pmatrix} p_k & q_k \end{pmatrix} \cdot T$ .

(c) Pode-se provar que a probabilidade de Geminho vencer o $n$-ésimo ponto, para $n$ suficientemente grande, fica arbitrariamente próxima do valor $p$ tal que a matriz $M_{1\times 2} = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ satisfaz $M = M \cdot T$ .

Calcule $p$.

**PROBLEMA 4**

(a) Seja $ABC$ um triângulo e $S$ a sua circunferência circunscrita. Seja $L$ um ponto no arco $AB$ de $S$ o qual não contém $C$.

Prove que os segmentos $AL$ e $BL$ têm mesma medida se, e somente se, $CL$ é bissetriz do ângulo $B\hat{C}A$ .

(b) Seja $\Gamma$ uma circunferência e seja o segmento $AB$ um de seus diâmetros. O plano $\alpha$ contém $AB$ e é perpendicular ao plano da circunferência $\Gamma$. Seja $C$ um ponto do plano $\alpha$, fora da reta $AB$. A bissetriz do ângulo $B\hat{C}A$ corta $AB$ em $P$. Seja $DE$ uma corda de $\Gamma$ a qual contém $P$.

Prove que $CP$ é bissetriz do ângulo $D\hat{C}E$ .

**PROBLEMA 5**

Em 2002, foi descoberto um algoritmo que verifica se um número é primo ou não em tempo polinomial, ou seja, de modo relativamente rápido. Uma grande conquista da Matemática do nosso século!

Como se calculou o tempo que esse algoritmo demora? Um dos passos cruciais para esse cálculo está relacionado com as estimativas que faremos a seguir.

(a) Sabendo que $\binom{2m+1}{0} + \binom{2m+1}{1} + \binom{2m+1}{2} + \cdots + \binom{2m+1}{2m+1} = 2^{2m+1}$, prove que $\binom{2m+1}{m} < 2^{2m}$ para todo $m$ inteiro positivo.

(b) Definimos $n^\#$, o *primorial de n*, como o produto de todos os primos positivos menores ou iguais a $n$. Por exemplo, $12^\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Prove que $\dfrac{(2m+1)^\#}{(m+1)^\#}$ divide $\binom{2m+1}{m}$ e conclua que $\dfrac{(2m+1)^\#}{(m+1)^\#} < 2^{2m}$ .

(c) Demonstre que $2005^\# < (2^{2005})^2$.