XXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (20 de agosto de 2005)

Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Nas *Folhas de Respostas* coloque todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Repartiram-se 24 moedas de R$1,00 entre quatro jovens, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo, de modo que: cada um recebeu uma quantidade par e positiva de moedas; as quatro quantidades eram diferentes; Arnaldo recebeu a maior quantia; Bernaldo recebeu menos que 7 moedas; Cernaldo recebeu metade do que Arnaldo ganhou; Dernaldo recebeu a menor quantia.
Quantas moedas cada um recebeu?

PROBLEMA 2

A Fuvest, maior vestibular do país, seleciona os estudantes que ingressarão na Universidade de São Paulo (USP). Em valores aproximados, a cada ano são 150 mil candidatos, dos quais são escolhidos os 10 mil novos estudantes da USP.
A Fuvest é composta de duas fases. Em cada curso, o número de estudantes que são aprovados para a segunda fase é aproximadamente igual a três vezes o número de vagas. Por exemplo, na carreira de Engenharia e Computação são oferecidas 900 vagas e, dos 9000 candidatos iniciais, 2700 classificam-se para a segunda fase.
Em Medicina, 90% dos candidatos são eliminados na primeira fase. Qual é o quociente $\frac{\text{número de candidatos}}{\text{número de vagas}}$ da carreira de Medicina na primeira fase?

PROBLEMA 3

Na Microlândia, há quatro times de futebol. O regulamento do campeonato microlandense de futebol, ou como é chamado carinhosamente pelos seus habitantes, o *Microlandião*, é o seguinte: na fase classificatória, cada um dos quatro times joga com todos os outros três exatamente uma vez. Em cada jogo, uma vitória vale 3 pontos, um empate vale 1 ponto e uma derrota vale zero ponto. As duas equipes que conseguirem as maiores quantidades de pontos são classificadas para a grande final do Microlandião. Caso seja necessário, há um sorteio para definir as equipes classificadas. Por exemplo, se os times têm 9, 4, 4 e 0 pontos, respectivamente, há um sorteio para definir a segunda equipe que participará da final.
(a) Qual é a menor pontuação possível de uma equipe classificada para a final?
(b) Qual é a maior pontuação possível de uma equipe que não foi classificada para a final?

PROBLEMA 4

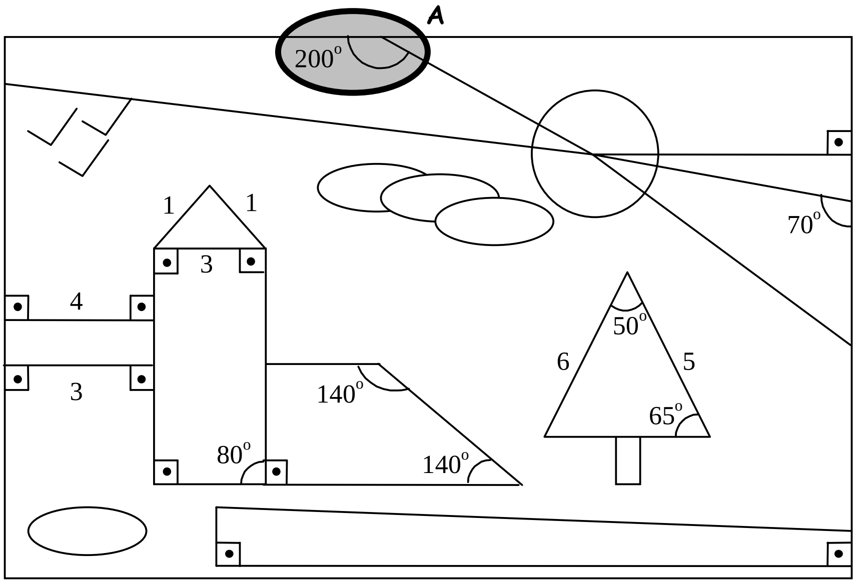
Um cubo de madeira de aresta 6 cm foi pintado de vermelho. Em seguida, foi serrado e dividido em oito cubos de aresta 3 cm e as faces que não estavam pintadas de vermelho foram então pintadas de amarelo. Em seguida, cada um dos oito cubos de aresta 3 cm foi dividido em vinte e sete cubinhos de aresta 1 cm e as faces que não estavam pintadas de vermelho ou amarelo foram então pintadas de azul.
É possível montar um cubo azul de aresta 6 cm com os cubinhos de aresta 1 cm? Não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 5

Na folha em anexo, um estudante fez alguns desenhos e marcou algumas medidas. Há 7 erros matemáticos na figura. Já marcamos um deles.
Agora é sua vez: na folha em anexo, indique e diga quais são os outros seis erros.

PROBLEMA 5 – Nível α – OPM 2005 – Primeira Fase **Entregue esta folha junto com as Folhas de Respostas.*

Nome: ____



A: Este ângulo deve ser menor do que 180°.

B:

C:

D:

E:

F:

G:

XXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (20 de agosto de 2005)
Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Nas *Folhas de Respostas* coloque todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1
A Fuvest, maior vestibular do país, seleciona os estudantes que ingressarão na Universidade de São Paulo (USP). Em valores aproximados, a cada ano são 150 mil candidatos, dos quais são escolhidos os 10 mil novos estudantes da USP.
A Fuvest é composta de duas fases. Em cada curso, o número de estudantes que são aprovados para a segunda fase é aproximadamente igual a três vezes o número de vagas. Por exemplo, na carreira de Engenharia e Computação são oferecidas 900 vagas e, dos 9000 candidatos iniciais, 2700 classificam-se para a segunda fase.
Em Medicina, 90% dos candidatos são eliminados na primeira fase. Qual é o quociente $\dfrac{\text{número de candidatos}}{\text{número de vagas}}$ da carreira de Medicina na primeira fase?

PROBLEMA 2
(a) Resolva a equação $2x^2 - x = 1999000$.
(b) Fatore a expressão $12x^2 - x - 1$, isto é, escreva este polinômio como um produto de polinômios do primeiro grau.
(c) Utilizando os itens anteriores, verifique que o número 1999000 + 9999999 é composto.

PROBLEMA 3
Um cubo de madeira de aresta 6 cm foi pintado de vermelho. Em seguida, foi serrado e dividido em oito cubos de aresta 3 cm e as faces que não estavam pintadas de vermelho foram então pintadas de amarelo. Em seguida, cada um dos oito cubos de aresta 3 cm foi dividido em vinte e sete cubinhos de aresta 1 cm e as faces que não estavam pintadas de vermelho ou amarelo foram então pintadas de azul.
É possível montar um cubo azul de aresta 6 cm com os cubinhos de aresta 1 cm? Não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 4
Os barcos A e B partiram de um mesmo ponto, com velocidades constantes, e seguiram em direções perpendiculares. O barco A partiu uma hora após o barco B. Trinta minutos após a partida de A, a distância entre os dois barcos era 25 km. Passada mais uma hora, a distância entre os dois barcos era 65 km.
Encontre as velocidades, em km/h, dos dois barcos.

PROBLEMA 5
Na Microlândia, as crianças brincam de transformar uma palavra em outra mudando uma letra por vez.
Por exemplo, para transformar OPMS, que significa “Matemática” em Microlandês, em MATH, que significa “legal”, elas podem fazer

$$\text{OPMS} \to \text{OPHS} \to \text{OPHI} \to \text{OPTI} \to \text{OPTH} \to \text{OITH} \to \text{MITH} \to \text{MATH}$$

Todas as palavras utilizadas devem fazer parte do vocabulário microlandês. Acima, por exemplo:
OPHS significa “escritório”; OPHI, “bom dia”; OPTI, “guaxinim”; OPTH, “guaxinim com cauda dourada”; OITH, “couve-gigante” e MITH, “floco de neve de cor roxa depois de derretido”.

Sabendo que a Língua Microlandesa utiliza o mesmo alfabeto que o nosso e toda palavra de quatro letras em Microlandês tem pelo menos uma vogal, mostre que em qualquer transformação de OPMS em MATH sempre teremos de utilizar alguma palavra que contém duas vogais.

XXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (20 de agosto de 2005)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Nas *Folhas de Respostas* coloque todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Sabe-se que, sendo n um inteiro maior do que 1, a quantidade de números primos positivos menores ou iguais a n é aproximadamente $\frac{n}{\ln n}$, sendo $\ln n$ o logaritmo de n na base e, onde $e \approx 2{,}7$.

Considerando os números inteiros positivos menores ou iguais a um milhão: há mais primos ou quadrados perfeitos?

Você pode querer utilizar a aproximação $\ln 10 \approx 2{,}3$.

PROBLEMA 2

Um cubo de madeira de aresta 6 cm foi pintado de vermelho. Em seguida, foi serrado e dividido em oito cubos de aresta 3 cm e as faces que não estavam pintadas de vermelho foram então pintadas de amarelo. Em seguida, cada um dos oito cubos de aresta 3 cm foi dividido em vinte e sete cubinhos de aresta 1 cm e as faces que não estavam pintadas de vermelho ou amarelo foram então pintadas de azul.

É possível montar um cubo azul de aresta 6 cm com os cubinhos de aresta 1 cm? Não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 3

Seja $ABCD$ um retângulo. Considere os pontos E e F sobre a diagonal AC tais que $AE = AB$ e $AF = AD$. Sejam G e H as projeções ortogonais de E e F sobre o lado AB, respectivamente.

(a) Sendo $m(B\hat{A}C) = \alpha$, prove que $AG = AC \cdot \cos^2 \alpha$.

(b) Prove que $AG + FH = AC$.

PROBLEMA 4

Na Microlândia, as crianças brincam de transformar uma palavra em outra mudando uma letra por vez.

Por exemplo, para transformar OPMS, que significa "Matemática" em Microlandês, em MATH, que significa "legal", elas podem fazer

$$\text{OPMS} \to \text{OPHS} \to \text{OPHI} \to \text{OPTI} \to \text{OPTH} \to \text{OITH} \to \text{MITH} \to \text{MATH}$$

Todas as palavras utilizadas devem fazer parte do vocabulário microlandês. Acima, por exemplo:

OPHS significa "escritório"; OPHI, "bom dia"; OPTI, "guaxinim"; OPTH, "guaxinim com cauda dourada"; OITH, "couve-gigante" e MITH, "floco de neve de cor roxa depois de derretido".

Sabendo que a Língua Microlandesa utiliza o mesmo alfabeto que o nosso e toda palavra de quatro letras em Microlandês tem pelo menos uma vogal, mostre que em qualquer transformação de OPMS em MATH sempre teremos de utilizar alguma palavra que contém duas vogais.

PROBLEMA 5

Sete pessoas estão esperando, em fila, para entrar em uma sala onde sentarão em sete cadeiras arrumadas em linha, uma do lado da outra.

As pessoas entrarão e, enquanto for possível, irão sentar-se isoladas, isto é, em uma cadeira cujas cadeiras vizinhas (à esquerda e à direita ou só de um dos lados caso seja uma cadeira de uma das pontas) estejam ambas vazias.

De quantas maneiras distintas as pessoas podem se distribuir pelas cadeiras?

Dica: considere em separado o caso em que a quarta pessoa a entrar na sala encontra uma cadeira isolada para sentar-se e os casos em que ela não encontra.