XXVIII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final — 6 de Novembro de 2004

Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Sabe-se que a Terra demora 365,2422 dias, ou seja, 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos para dar uma volta em torno do Sol. Esse tempo é chamado de *ano tropical*. Note que um ano tropical tem mais do que 365 dias. Assim, para compensar o tempo a mais que a Terra demora para dar uma volta em torno do Sol, existem os anos bissextos, que têm 366 dias. Os seguintes anos são bissextos:

- Os anos que são múltiplos de 4, mas não de 100;
- Os anos que são múltiplos de 400.

Por exemplo, 1996 e 2000 foram anos bissextos e 1900 não foi um ano bissexto.

(a) No período de 2001 a 2400, quantos anos são bissextos?

(b) Quantas horas 400 anos no nosso calendário têm a mais que 400 anos tropicais?

▸ PROBLEMA 2

Atacando a defasagem salarial decorrente da inflação, os funcionários de faculdades de Los Angeles, EUA, assinaram e enviaram ao governo a seguinte mensagem:

Prezados Senhores,

Estamos unidos num único propósito: queremos um aumento salarial.

	Aumento Salarial(%)	**Inflação Anual**(%)	**Ganho**(%)
1990	0	6	-6
1991	0	$3,5$	$-3,5$
1992	0	$3,2$	$-3,2$
1993	0	$2,5$	$-2,5$
1994	3	$2,5$	$+0,5$
1995	$2,7$	$2,3$	$+0,4$
			$-14,3$

Estamos cansados de trabalhar com números negativos!

(a) Suponha que em 1990 o funcionário Arnald tinha um salário mensal de US$1.000,00. Qual é o salário de Arnald no final de 1995?

(b) Suponha que em 1990 o funcionário Bernald tinha um gasto mensal de US$1.000,00. Qual o gasto mensal de Bernald no final de 1995, levando-se em consideração que ele continua gastando com as mesmas coisas desde 1990?

(c) Baseados na tabela, os funcionários pediram um aumento salarial de 14,3%. Nesse caso, seriam realmente repostas todas as perdas salariais?

▸ PROBLEMA 3

Na Matemática, existem problemas que ninguém, nem mesmo matemáticos profissionais, resolveu ainda. Esses são os chamados *problemas em aberto*.

Um problema em aberto famoso é o *3x + 1*: Considere um número inteiro positivo. Se esse número é ímpar, multiplique-o por 3 e some 1 ao resultado (daí o nome do problema!); se é par, divida-o por 2. Se o número obtido é 1, pare; se não, repita esse procedimento com o número obtido.

Por exemplo, se começamos com o número 20, obtemos os seguintes números:

$$20 \xrightarrow{:2} 10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{\times 3+1} 16 \xrightarrow{:2} 8 \xrightarrow{:2} 4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1$$

O que ninguém sabe é se sempre obtemos o número 1, não importando qual é o número inicial. Já foram testados todos os números até 290 quatrilhões!

(a) Verifique que começando com o número 28, obtemos 1.

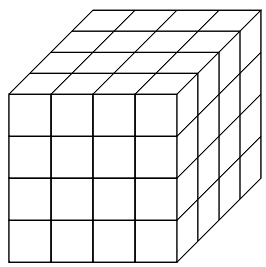
(b) Note que no final do nosso exemplo há uma seqüência de potências de 2 iniciada por 16. O número que antecede 16 não é uma potência de 2.

Existe algum número inicial para o qual os últimos números obtidos formem uma seqüência de potências de 2 iniciada por 32? Não se esqueça: nesse caso, o número que antecede 32 não pode ser 64.

▸ **PROBLEMA 4**

O jogo-da-velha, tradicionalmente jogado em um tabuleiro 3×3, pode ser jogado em vários outros tipos de tabuleiros, conservando-se a mesma regra: alternadamente os jogadores colocam suas marcas no tabuleiro e ganha quem conseguir primeiro um alinhamento de suas marcas. E os tabuleiros utilizados podem até ser tridimensionais!

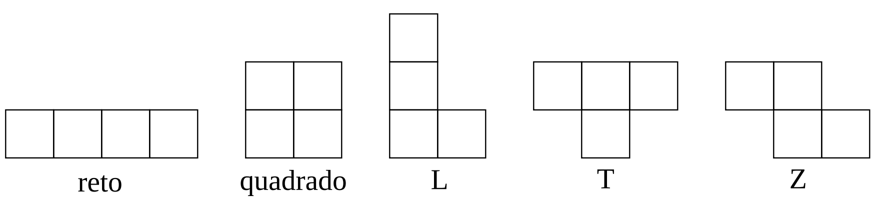
O tabuleiro a seguir é formado por 64 cubinhos. São utilizadas como marcas bolinhas azuis e amarelas. Alternadamente os jogadores colocam uma bolinha da sua cor em um dos cubinhos. Cada cubinho pode conter no máximo uma bolinha e também pode-se colocar bolinhas nos cubinhos do interior do tabuleiro.



De quantas maneiras 4 bolinhas amarelas podem estar alinhadas?

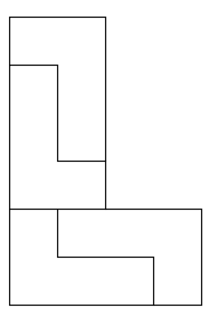
▸ **PROBLEMA 5**

Um *poliminó* é como um dominó, porém pode ser formado por mais que dois quadradinhos. A seguir desenhamos todos os poliminós formados por 4 quadradinhos com seus respectivos nomes.



Dizemos que um poliminó é um *reptile* quando é possível montar, com várias cópias iguais desse poliminó, sem sobreposições ou buracos, um outro poliminó maior e semelhante.

O poliminó L é um reptile, como demonstra a figura a seguir.



(a) O poliminó T é um reptile?

(b) O poliminó Z é um reptile?

XXVIII Olimpíada Paulista de Matemática
Prova da Fase Final — 6 de Novembro de 2004
Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Atacando a defasagem salarial decorrente da inflação, os funcionários de faculdades de Los Angeles, EUA, assinaram e enviaram ao governo a seguinte mensagem:

Prezados Senhores,

Estamos unidos num único propósito: queremos um aumento salarial.

	Aumento Salarial(%)	**Inflação Anual**(%)	**Ganho**(%)
1990	0	6	-6
1991	0	$3,5$	$-3,5$
1992	0	$3,2$	$-3,2$
1993	0	$2,5$	$-2,5$
1994	3	$2,5$	$+0,5$
1995	$2,7$	$2,3$	$+0,4$
			$-14,3$

Estamos cansados de trabalhar com números negativos!

(a) Suponha que em 1990 o funcionário Arnald tinha um salário mensal de US$1.000,00. Qual é o salário de Arnald no final de 1995?

(b) Suponha que em 1990 o funcionário Bernald tinha um gasto mensal de US$1.000,00. Qual o gasto mensal de Bernald no final de 1995, levando-se em consideração que ele continua gastando com as mesmas coisas desde 1990?

(c) Baseados na tabela, os funcionários pediram um aumento salarial de $14,3\%$. Nesse caso, seriam realmente repostas todas as perdas salariais?

▸ PROBLEMA 2

Neste problema, mostraremos que a equação

$$m^2 - 3mn + n^2 = 1$$

é satisfeita por infinitos inteiros positivos m e n.

Observe que uma de suas soluções é $m = 1$ e $n = 3$. Vamos tentar encontrar uma outra solução com $n = 3$. Substituindo, obtemos

$$m^2 - 3m \cdot 3 + 3^2 = 1 \iff m^2 - 9m + 8 = 0 \iff m = 1 \text{ ou } m = 8$$

Assim, obtemos, além da solução $m = 1$ e $n = 3$, a nova solução $m = 8$ e $n = 3$.

Vamos encontrar uma outra solução com $m = 8$. Substituindo,

$$8^2 - 3 \cdot 8 \cdot n + n^2 = 1 \iff n^2 - 24n + 63 = 0$$

Já sabemos que uma das soluções da equação é $n = 3$. Assim, como a soma das raízes é $-\frac{-24}{1} = 24$, a outra raiz é $24-3 = 21$. Assim, uma nova solução é $m = 8$ e $n = 21$.

(a) Agora é a sua vez: sabendo que $m = 8$ e $n = 21$ é uma solução, encontre uma outra solução com $n = 21$.

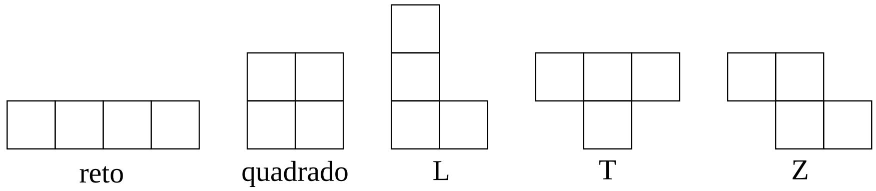
(b) Prove que a equação

$$m^2 - 3mn + n^2 = 1$$

é satisfeita por infinitos inteiros positivos m e n.

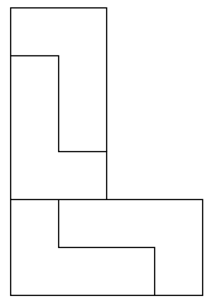
PROBLEMA 3

Um *poliminó* é como um dominó, porém pode ser formado por mais que dois quadradinhos. A seguir desenhamos todos os poliminós formados por 4 quadradinhos com seus respectivos nomes.



Dizemos que um poliminó é um *reptile* quando é possível montar, com várias cópias iguais desse poliminó, sem sobreposições ou buracos, um outro poliminó maior e semelhante.

O poliminó L é um reptile, como demonstra a figura a seguir.

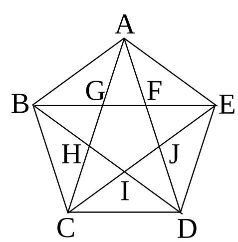


(a) O poliminó T é um reptile?

(b) O poliminó Z é um reptile?

PROBLEMA 4

Seja $ABCDE$ um pentágono regular de lado 1 e F, G, H, I e J as interseções de suas diagonais.



(a) Determine as medidas dos ângulos $A\hat{B}G$ e $G\hat{B}H$.

(b) Mostre que o triângulo ABH é isósceles, e que os triângulos ABC e BHC são semelhantes.

(c) Demonstre que o comprimento da diagonal do pentágono regular de lado unitário é $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, a chamada *razão áurea*.

PROBLEMA 5

O planeta Beta-Centaurus é habitado por seres quadrúpedes, mas estilosos: eles sempre usam 4 meias de cores distintas. Os beta-centaurianos gostam tanto de meias que cada um possui uma gaveta só para elas.

Gugus, o Ministro da Matemática de Beta-Centaurus, é muito desorganizado e sempre perde a hora. Todos os dias, para não chegar atrasado no trabalho, ele retira desordenadamente várias meias da gaveta (que está sempre bagunçada!), escolhe as que vai usar e deixa para colocá-las no seu trajeto para o Ministério.

A gaveta de Gugus tem sempre as mesmas meias (nada se suja em Beta-Centaurus), cada uma de uma única cor: vermelha, verde, azul ou branca. Ele possui 111 meias ao todo.

Após algum tempo, Gugus percebeu que precisa retirar pelo menos 100 meias da gaveta para ter certeza de que entre elas haja 4 meias de cores distintas.

Durante um congresso, ele ganhou uma meia amarela exclusiva da grife *OPM's Style* que, desde então, nunca mais tirou. Pelo menos quantas meias Gugus precisa retirar da gaveta para ter certeza de que entre elas haverá 3 meias de cores distintas?

XXVIII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final — 6 de Novembro de 2004

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

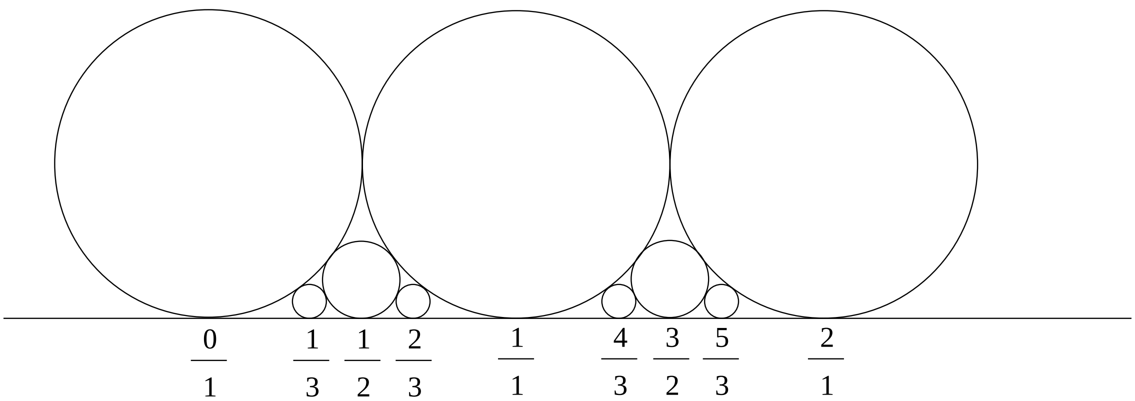
- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Chamamos de *seqüência de Farey de ordem* n a seqüência obtida quando escrevemos em ordem crescente as frações irredutíveis, com denominador menor ou igual a n, localizadas no intervalo $[0;1]$. Por exemplo, a seqüência de Farey de ordem 6 é

$$\frac{0}{1};\frac{1}{6};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{1}{1}$$

Lester R. Ford criou uma interpretação geométrica para as seqüências de Farey: tangenciando cada número racional não negativo $\frac{p}{q}$, sendo p e q primos entre si, construímos uma circunferência de diâmetro $\frac{1}{q^2}$. Algumas dessas circunferências, que são denominadas *circunferências de Ford*, são mostradas na figura a seguir.



(a) Verifique que as circunferências que tocam os pontos $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{1}$ são tangentes.

(b) Mostre que as circunferências que tocam os pontos da forma $\frac{1}{q}$ são tangentes à circunferência que toca o ponto $\frac{0}{1}$.

▸ PROBLEMA 2

Existe um número γ tal que $\log_2 x + \log_3 x = \log_\gamma x$ para todo x real positivo?

Observação: Você pode querer utilizar os seguintes fatos:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \qquad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

para a, b *e* c *reais positivos*, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

▸ PROBLEMA 3

São dados 11000 pontos no interior de um cubo de aresta 15. Neste problema provaremos que existe uma esfera de raio unitário que contém em seu interior 6 dos pontos dados.

Considere o cubo dividido em n^3 cubinhos iguais.

(a) Para que valores de n garantimos a existência de 6 pontos dados no interior de um dos cubinhos menores?

(b) Determine os valores de n para os quais os cubinhos correspondentes têm diagonal menor ou igual a 2 e conclua a demonstração.

▸**PROBLEMA 4**

Nesse problema, encontraremos uma fórmula fechada para o n-ésimo termo da famosa seqüência de Fibonacci.

(a) Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Verifique que $A = M \cdot D \cdot M^{-1}$.

(b) Sendo F_n o n-ésimo termo da seqüência de Fibonacci, definimos

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ para } n \geqslant 0.$$

Prove que, para n inteiro positivo,

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

(c) Observe:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = MDM^{-1} \cdot MDM^{-1} = MD \cdot I \cdot DM^{-1} = MD^2M^{-1} \\ A^3 &= A^2 \cdot A = MD^2M^{-1} \cdot MDM^{-1} = MD^3M^{-1} \\ A^4 &= A^3 \cdot A = MD^3M^{-1} \cdot MDM^{-1} = MD^4M^{-1} \end{aligned}$$

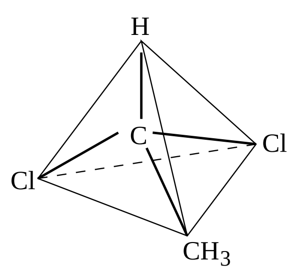
Calculando A^n de modo análogo aos últimos exemplos, demonstre que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

▸**PROBLEMA 5**

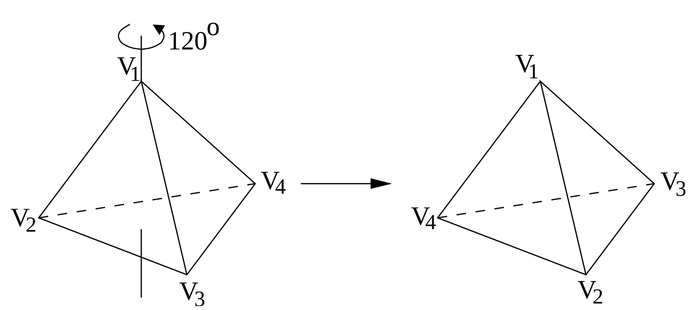
Neste problema, contaremos quantas moléculas diferentes podemos formar com um átomo de carbono (C) e radicais $-H$ (hidrogênio), $-CH_3$ (metil), $-C_2H_5$ (etil) e $-C\ell$ (cloro).

Todas essas moléculas são formadas ligando quatro desses radicais ao átomo de carbono. Tais moléculas podem ser modeladas a partir de um tetraedro regular com o átomo de carbono em seu centro e os quatro radicais em seus vértices. Por exemplo, uma dessas moléculas é



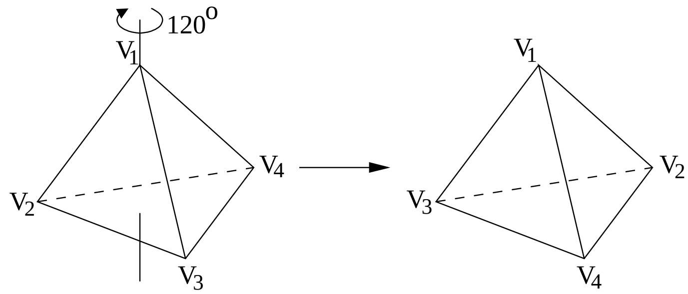
Há três tipos de rotações que podemos fazer em um tetraedro $V_1V_2V_3V_4$:

(1) Girá-lo 120° no sentido anti-horário em torno do eixo que passa por um de seus vértices e pelo centro da face oposta:

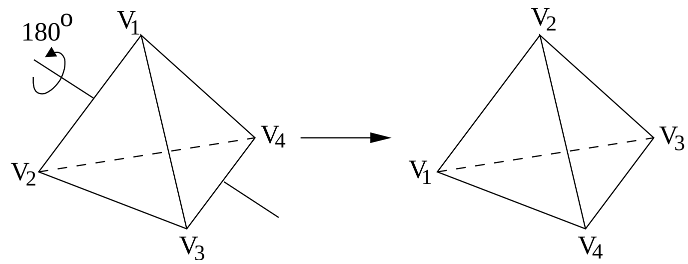


Note que podemos escolher o vértice que pertence ao eixo de quatro maneiras, logo há 4 rotações do tipo (1).

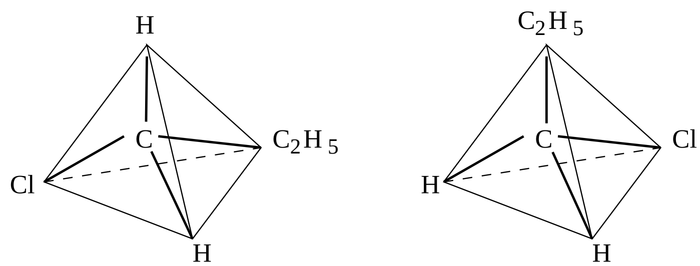
(2) Girá-lo 120° no sentido horário em torno do eixo que passa por um de seus vértices e pelo centro da face oposta. Também há 4 rotações deste tipo.



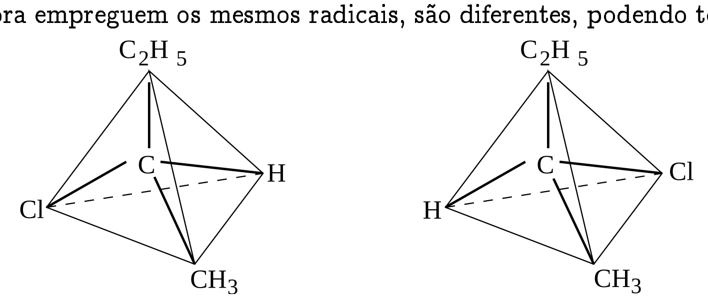
(3) Girá-lo 180° no sentido anti-horário em torno do eixo que passa pelos pontos médios de arestas opostas. Há 3 rotações deste tipo.



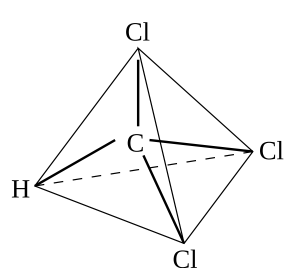
Duas moléculas são iguais quando podemos obter uma delas através de uma rotação da outra. Por exemplo, as moléculas a seguir são iguais:



mas as moléculas abaixo, embora empreguem os mesmos radicais, são diferentes, podendo ter até propriedades diferentes!



Seja n o número de moléculas diferentes. Sejam n_1, n_2 e n_3 as quantidades de moléculas cuja disposição dos átomos no tetraedro não muda após aplicarmos uma rotação do tipo (1), (2) e (3), respectivamente. Por exemplo, uma das moléculas cuja disposição dos átomos no tetraedro não muda após aplicarmos uma rotação do tipo (1) em torno do eixo que passa por H (vértice V_2) é



(a) Prove que $12n = 4^4 + 4n_1 + 4n_2 + 3n_3$.

(b) Seja $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ o conjunto de vértices do tetraedro. Podemos interpretar rotações como funções de V em V. Por exemplo, a rotação do tipo (1) que mostramos logo acima pode ser representada pela função f tal que $f(V_1) = V_3$, $f(V_2) = V_2$, $f(V_3) = V_4$ e $f(V_4) = V_1$. Assim, para que uma molécula seja contada em n_1, os radicais em V_1 e $f(V_1) = V_3$ devem ser iguais, assim como os radicais em V_3 e $f(V_3) = V_4$ e em V_4 e $f(V_4) = V_1$, ou seja, os radicais nos vértices V_1, V_3 e V_4 devem ser iguais (no nosso exemplo, todos são $-C\ell$).

Calcule n_1, n_2, n_3 e n.