XXVII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final — 8 de Novembro de 2003
Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ **PROBLEMA 1**

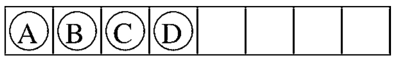
Segundo a matéria apresentada no programa *"Fantástico"* de 18/10/03, intitulada *"Números da Cidade de São Paulo 2003"*, 150 mil lâmpadas da iluminação pública queimam por ano e 300 lâmpadas queimadas são trocadas todos os dias (fonte: Ilume/Secretaria Municipal de Infra-estrutura).

(a) Quantas lâmpadas queimam, em média, por dia?

(b) Supondo que estes números se mantenham nos próximos anos, estime em que ano pelo menos metade das 525 mil lâmpadas da iluminação pública estarão queimadas. Você deve supor que não havia lâmpadas queimadas no dia primeiro de janeiro de 2003.

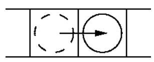
▸ **PROBLEMA 2**

Um jogo é disputado num tabuleiro de 8 casas com quatro fichas A, B, C e D ocupando, inicialmente, as quatro primeiras casas do tabuleiro, como mostra a figura a seguir.

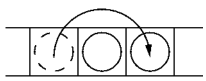


Estas fichas podem ser movimentadas de acordo com as seguintes regras:

- Cada ficha pode se mover para a casa à direita se esta estiver vazia;

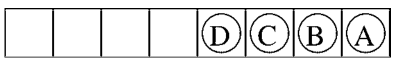


- Cada ficha pode saltar sobre a peça vizinha à direita se a casa seguinte estiver vazia;



- As fichas não podem se mover para a esquerda.

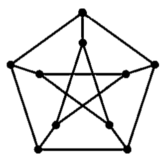
Mostre os movimentos que permitem que as fichas ocupem as quatro últimas casas do tabuleiro, mas na ordem inversa, conforme a figura a seguir.



Para cada movimento, faça a figura correspondente do tabuleiro.

▸ **PROBLEMA 3**

Na Petersonlândia, o sistema de linhas aéreas está distribuído de tal forma que de qualquer cidade saem vôos diretos para três outras cidades e de cada cidade é possível viajar para qualquer outra fazendo no máximo uma escala. A empresa *Alfa-Tur* é quem organiza os vôos e utiliza o seguinte mapa:



É possível adotar o mesmo sistema de linhas aéreas em países com onze ou mais cidades? Justifique sua resposta.

▸ **PROBLEMA 4**

Aino e Eino, primos finlandeses de Arnaldo e Bernaldo, são cozinheiros num restaurante japonês em Helsinque. Ultimamente, o prato mais pedido no restaurante é uma porção de queijo *Tofu* que vem cortada em cubos, todos de mesmo tamanho. Mas quando o queijo chega ao restaurante, este ainda não está cortado e cabe a Aino e Eino prepararem a porção.

Aino e Eino são bastante espertos e disciplinados. No trabalho, eles só fazem essas duas operações:

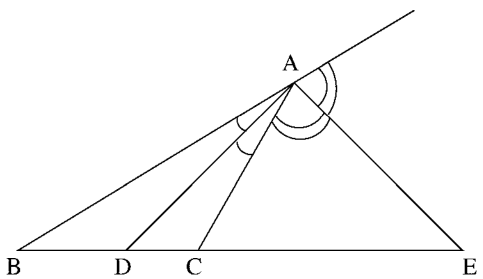
- Fazer um corte plano num bloco retangular;
- Empilhar dois ou mais blocos retangulares e cortá-los (nesse caso, o corte é contado como um só).

(a) Se o queijo estiver no formato de um bloco retangular de dimensões 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ 28 cm, qual é o menor número de cortes necessários para obter apenas cubos de 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm? (Atenção: a resposta não é 27 cortes!)

(b) Se o queijo estiver no formato de um bloco retangular de dimensões 26 cm $\times$ 27 cm $\times$ 28 cm (sim, os tofus finlandeses são gigantescos!), qual é o menor número de cortes necessários para obter apenas cubos de 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm?

▸ **PROBLEMA 5**

No triângulo ABC, as bissetrizes interna e externa do vértice A encontram a reta BC nos pontos D e E, respectivamente, conforme a figura a seguir. Sendo $AD = AE$, determine:



(a) a medida do ângulo $D\hat{A}E$. (não se assuste: apesar de nenhum dado numérico ser apresentado, a resposta é um número!)

(b) as medidas dos ângulos $A\hat{D}E$ e $A\hat{E}D$.

(c) o valor de $m(B\hat{C}A) - m(C\hat{B}A)$.

XXVII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final — 8 de Novembro de 2003
Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

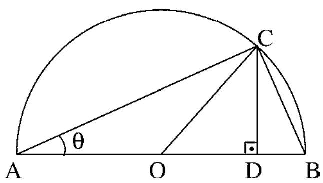
Segundo a matéria apresentada no programa *"Fantástico"* de 18/10/03, intitulada *"Números da Cidade de São Paulo 2003"*, 150 mil lâmpadas da iluminação pública queimam por ano e 300 lâmpadas queimadas são trocadas todos os dias (fonte: Ilume/Secretaria Municipal de Infra-estrutura).

(a) Quantas lâmpadas queimam, em média, por dia?

(b) Supondo que estes números se mantenham nos próximos anos, estime em que ano pelo menos metade das 525 mil lâmpadas da iluminação pública estarão queimadas. Você deve supor que não havia lâmpadas queimadas no dia primeiro de janeiro de 2003.

▸ PROBLEMA 2

Na figura a seguir, o segmento AB é o diâmetro de uma semicircunferência de raio unitário, O é o ponto médio de AB, C é um ponto sobre a semicircunferência tal que $m(B\hat{A}C) = \theta$ e D é a projeção ortogonal de C sobre o segmento AB.



(a) Prove que os triângulos ABC e ACD são semelhantes.

(b) A partir da semelhança obtida acima, demonstre que $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$ e $\cos(2\theta) = 2 \cdot \cos^2\theta - 1$.

▸ PROBLEMA 3

Aino e Eino, primos finlandeses de Arnaldo e Bernaldo, são cozinheiros num restaurante japonês em Helsinque. Ultimamente, o prato mais pedido no restaurante é uma porção de queijo *Tofu* que vem cortada em cubos, todos de mesmo tamanho. Mas quando o queijo chega ao restaurante, este ainda não está cortado e cabe a Aino e Eino prepararem a porção.

Aino e Eino são bastante espertos e disciplinados. No trabalho, eles só fazem essas duas operações:

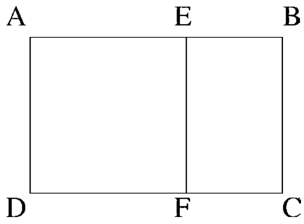
- Fazer um corte plano num bloco retangular;
- Empilhar dois ou mais blocos retangulares e cortá-los (nesse caso, o corte é contado como um só).

(a) Se o queijo estiver no formato de um bloco retangular de dimensões $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 28 \text{ cm}$, qual é o menor número de cortes necessários para obter apenas cubos de $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$? (Atenção: a resposta não é 27 cortes!)

(b) Se o queijo estiver no formato de um bloco retangular de dimensões $26 \text{ cm} \times 27 \text{ cm} \times 28 \text{ cm}$ (sim, os tofus finlandeses são gigantescos!), qual é o menor número de cortes necessários para obter apenas cubos de $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$?

▸ PROBLEMA 4

Considere um retângulo ABCD, com a seguinte propriedade: se cortarmos dele um quadrado AEFD, obtemos o retângulo BCFE, semelhante ao original, ou seja, com lados proporcionais aos lados do retângulo ABCD.

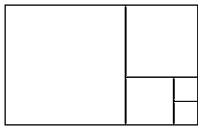


A razão entre o maior lado e o menor lado de um retângulo com essa propriedade é conhecida como *razão áurea*.

(a) Dado um retângulo, cortamos dele um quadrado de lado igual ao seu lado menor.

(i) Mostre que se os lados do retângulo estão em razão áurea então tal operação pode ser repetida infinitas vezes.

(ii) Mostre que se os lados do retângulo estão na razão $\frac{p}{q}$, p, q inteiros positivos, então tal operação só pode ser repetida um número finito de vezes. Veja, na figura a seguir, os cortes no caso em que os lados do retângulo estão na razão $\frac{5}{8}$.



(b) Conclua que a razão áurea é um número irracional.

▸ PROBLEMA 5

A principal atração do *Parque Gelistone* é o gêiser *Esguichão*. As excursões pelo parque duram 6 horas, e incluem visitas à loja de lembranças, que fica longe do Esguichão. As erupções do gêiser são visíveis de todo o parque, e não duram mais que 3 minutos.

O gerente do parque quer maximizar a chance dos visitantes verem de perto uma erupção do Esguichão sem, porém, deixarem de visitar a loja de lembranças, principal fonte de renda do parque. Para isso, contratou um estagiário que monitorou o gêiser e anotou os seguintes dados:

Número da erupção	Dia	Horário da erupção	Tempo de erupção (min)	Temperatura ambiente (°C)
1	10	8:00	2:00	25
2	10	12:00	2:30	30
3	10	17:00	1:00	18
4	11	8:30	0:30	10
5	11	10:00	3:00	20
6	11	16:00	1:30	19
7	12	11:30	1:30	26
8	12	14:00	1:00	27
9	12	16:00	1:00	20
10	12	18:00	3:00	18
11	13	11:00	2:00	21
12	13	15:00	0:30	19
13	13	16:00	2:00	18

(a) Faça um gráfico cartesiano, com escala, e marque os pontos (x, y) nos quais x é o tempo da erupção, em minutos, e y é o tempo decorrido entre a erupção correspondente e a próxima erupção, em horas. Você vai ter que descartar a última erupção de cada dia.

(b) Às 7:00 do dia 14, momento em que o parque abriu, o guia do parque, junto com os visitantes da primeira excursão do dia, viu, ao longe, uma erupção, que durou 1 minuto e 45 segundos.

Utilizando o gráfico que você fez no item (a), estime a que horas a excursão deve chegar nas imediações do Esguichão para que os visitantes possam ver sua próxima erupção.

XXVII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final — 8 de Novembro de 2003
Nível γ ($1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

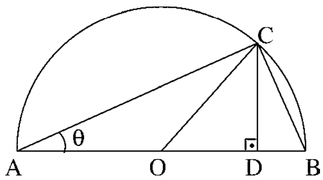
Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Na figura a seguir, o segmento AB é o diâmetro de uma semicircunferência de raio unitário, O é o ponto médio de AB, C é um ponto sobre a semicircunferência tal que $m(B\hat{A}C) = \theta$ e D é a projeção ortogonal de C sobre o segmento AB.



(a) Prove que os triângulos ABC e ACD são semelhantes.

(b) A partir da semelhança obtida acima, demonstre que $\text{sen}(2\theta) = 2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta$ e $\cos(2\theta) = 2 \cdot \cos^2\theta - 1$.

▸ PROBLEMA 2

Considere um mesmo experimento repetido n vezes. Seja p a probabilidade de obter sucesso no experimento.

Quando $np > 5$ e $n(1-p) > 5$, a probabilidade de obter r ou mais sucessos nos n experimentos pode ser calculada da seguinte forma:

(i) Toma-se

$$Z = \frac{r - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

(ii) Então, uma boa aproximação da probabilidade pedida é obtida na chamada *tabela de valores da distribuição normal padrão.* Por exemplo, se obtivermos $Z = -0,49$, a probabilidade é $0,6879 = 68,79\%$ (linha $-0,4$ e coluna $0,09$).

No jogo de roleta de Las Tegas, há 38 números: os números de 1 a 36 (sendo 18 vermelhos e 18 pretos), e o 0 e o 00, que são verdes e representam a banca de jogos. Em cada jogada, um dos 38 números é sorteado na roleta.

Scarlet Rose Redd é uma apostadora assídua de Las Tegas, e aposta todo dia 1 tólar que o número sorteado vai ser vermelho. Se vencer, Scarlet ganha 1 tólar (além, é claro, do que apostou); se perder, perde o tólar que apostou.

(a) Qual a probabilidade p de, numa jogada, Scarlet ganhar 1 tólar, ou seja, obter um número vermelho?

(b) Seja n o número de jogadas de Scarlet. Para quais valores de n ocorre, simultaneamente, $np > 5$ e $n(1-p) > 5$?

(c) Qual a probabilidade de Scarlet sair ganhando depois de jogar 64 vezes?

(d) Estime a probabilidade de Scarlet perder menos do que 500 tólares depois de jogar 10000 vezes (o que corresponde, aproximadamente, a jogar uma vez por dia durante trinta anos).

▸ PROBLEMA 3

(a) Dentre todos os triângulos com base b dada e altura h relativa a essa base também fixada, prove que o de menor perímetro é o triângulo isósceles cuja base mede b.

(b) Mostre que, dentre todas as pirâmides cuja base é um quadrado $ABCD$ de lado 6 e cuja altura é 4, a que tem menor área lateral é a pirâmide regular.

▸ **PROBLEMA 4**

Neste problema demonstraremos, com o auxílio de exponenciais e logaritmos, a existência de infinitos números primos positivos.

Inicialmente, vamos supor, por absurdo, que exista uma quantidade finita r de números primos. Sejam 2, 3, 5, ..., p_r os r números primos e t um inteiro positivo.

De acordo com o Teorema Fundamental da Aritmética (fatoração única), cada inteiro positivo m, $1 \leqslant m \leqslant (p_r)^t$, pode ser escrito de maneira única na forma

$$m = 2^{f_1} \cdot 3^{f_2} \cdot 5^{f_3} \cdot \ldots \cdot p_r^{f_r}$$

onde $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_r$ são maiores que ou iguais a zero.

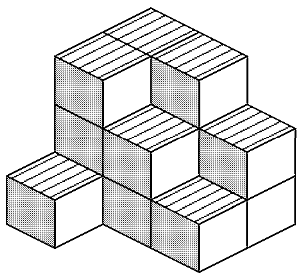
(a) Prove que $f_i \leqslant t \cdot \log_2 p_r$ para $1 \leqslant i \leqslant r$.

(b) Contando o número de r-uplas $(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_r)$, prove que $(p_r)^t \leqslant (t \cdot \log_2 p_r + 1)^r$.

(c) Mostre que é impossível que a relação anterior se verifique para todo inteiro positivo t e conclua que existem infinitos primos.

▸ **PROBLEMA 5**

Considere colunas formadas por cubos unitários encostadas em um canto como, por exemplo, mostra a figura a seguir.



Para tornar a representação mais simples, podemos representar cada coluna pelo seu número de cubos. A figura acima seria então

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

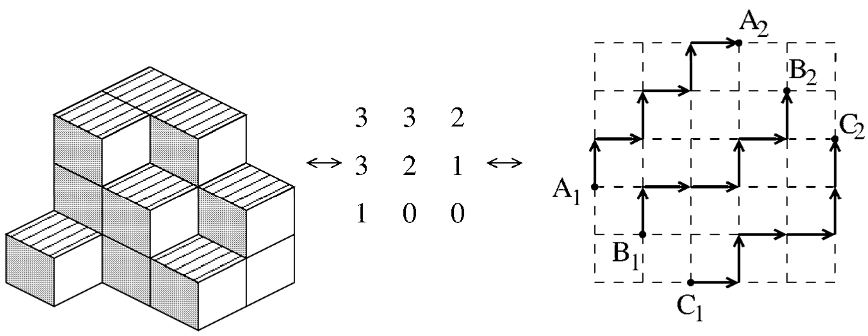
O fato dos cubos estarem encostados em um canto é refletido na exigência das seqüências que aparecem nas linhas e colunas serem não crescentes.

Vamos contar nessa questão quantas configurações de cubos unitários satisfazendo as condições acima estão contidas em um cubo $3 \times 3 \times 3$. Chamaremos tais configurações de *partições planas*.

(a) Exiba as 20 partições planas contidas no cubo $2 \times 2 \times 2$.

Algumas são: $\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{array}$; $\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$; $\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$

(b) Observe o desenho a seguir.



A partir da correspondência sugerida por ele, mostre que o número de partições planas contidas no cubo $3 \times 3 \times 3$ é igual ao número de maneiras de ligar A_1 a A_2, B_1 a B_2, C_1 e C_2 utilizando as linhas do reticulado, sem que haja intersecções e sempre indo para cima ou para direita.

(c) Sendo $n(X; Y)$ o número de maneiras de ligar X a Y utilizando as linhas do reticulado e sempre indo para cima ou para direita, prove que o número de partições planas é

$$\det \begin{pmatrix} n(A_1, A_2) & n(A_1, B_2) & n(A_1, C_2) \\ n(B_1, A_2) & n(B_1, B_2) & n(B_1, C_2) \\ n(C_1, A_2) & n(C_1, B_2) & n(C_1, C_2) \end{pmatrix}$$

(d) Calcule tal determinante.