XXVII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Primeira Fase (16 de Agosto de 2003)

Nível α ($5^{\underline{a}}$ e $6^{\underline{a}}$ séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados na *Folha de Respostas*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas apenas na *Folha de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas a *Folha de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Mostre uma maneira de colocar nos oito vértices de um cubo os números de 1 a 8, um em cada vértice, de modo que a soma dos números em cada face seja sempre a mesma.

▸ PROBLEMA 2

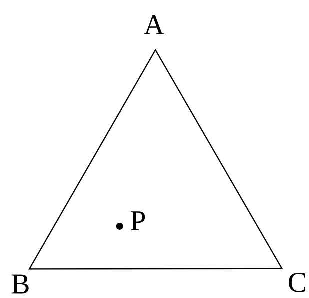
Fábio é um atleta muito dedicado e faz musculação em uma academia que abre todos os dias da semana. Seu "personal trainer" lhe informou que, devido à sobrecarga muscular, ele nunca deve treinar três dias consecutivos. No mês de setembro, que tem 30 dias, devido a alguns problemas, a academia não funcionará nos dias 5, 11, 21, 23, 25 e 29.

(a) Qual é o número máximo de dias que ele poderá treinar na academia no mês de setembro?

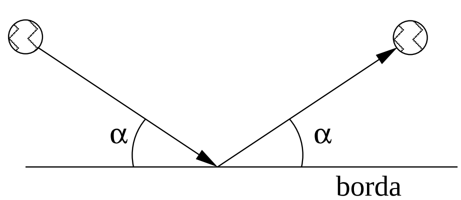
(b) Exiba um exemplo mostrando quais são os dias em que Fábio poderá ir à academia para treinar o número máximo de vezes nesse mês.

▸ PROBLEMA 3

Fernando e Paulo construíram uma mesa de bilhar com formato de um triângulo eqüilátero, como se vê na figura a seguir.



Descobriram que quando a bola bate na borda do tabuleiro com um certo ângulo, ela rebate com o mesmo ângulo.



(a) Numa bola situada no ponto P, Paulo deu a primeira tacada, perpendicularmente ao lado AB. Depois de bater pela primeira vez na borda da mesa, a bola passou pelo ponto P. Depois disso, a bola voltará a passar pelo ponto P novamente? Em caso afirmativo, faça um desenho mostrando a trajetória da bola e diga quantas vezes a bola bate na borda da mesa até voltar a passar pelo ponto P.

(b) Numa bola situada no ponto P, agora Fernando deu a primeira tacada, paralela ao lado AC. A bola voltará a passar pelo ponto P novamente? Em caso afirmativo, faça um desenho mostrando a trajetória da bola e diga quantas vezes a bola bate na borda da mesa até voltar a passar pelo ponto P.

PROBLEMA 4

Números cruzados são como palavras cruzadas, só que em vez de colocar uma letra você deve colocar um algarismo em cada quadradinho.

Resolva os números cruzados a seguir. Todas as respostas são números de três algarismos e, portanto, não devem começar com zero.

1	2	3
4		
5		

Horizontais

1. Um primo
4. Um composto
5. Um quadrado perfeito

Verticais

1. Uma potência de 5
2. Uma potência de 2
3. Uma potência de 3

PROBLEMA 5

No *Mundo Encantado* existem apenas duas classes de duendes: os *honestos*, que sempre dizem a verdade, e os *mentirosos*, que sempre mentem. A menina Alice (a mesma do "No País das Maravilhas") chegou no *Mundo Encantado* e encontrou os duendes Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo.

Arnaldo lhe disse: "Exatamente um de nós quatro é mentiroso."

Bernaldo disse: "Nós quatro somos mentirosos."

Então, Alice perguntou a Cernaldo: "Arnaldo é mentiroso?", e recebeu uma resposta, sim ou não, que, infelizmente, não tornou possível determinar de que classe é Arnaldo.

Agora é sua vez! Ajude Alice e descubra se Dernaldo é honesto ou mentiroso.

XXVII Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Primeira Fase (16 de Agosto de 2003)

Nível β ($7^{\underline{a}}$ e $8^{\underline{a}}$ séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados na *Folha de Respostas*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas apenas na *Folha de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas a *Folha de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Fábio é um atleta muito dedicado e faz musculação em uma academia que abre todos os dias da semana. Seu "personal trainer" lhe informou que, devido à sobrecarga muscular, ele nunca deve treinar três dias consecutivos. No mês de setembro, que tem 30 dias, devido a alguns problemas, a academia não funcionará nos dias 5, 11, 21, 23, 25 e 29.

(a) Qual é o número máximo de dias que ele poderá treinar na academia no mês de setembro?

(b) Exiba um exemplo mostrando quais são os dias em que Fábio poderá ir à academia para treinar o número máximo de vezes nesse mês.

▸ PROBLEMA 2

Números cruzados são como palavras cruzadas, só que em vez de colocar uma letra você deve colocar um algarismo em cada quadradinho.

Resolva os números cruzados a seguir. Todas as respostas são números de três algarismos e, portanto, não devem começar com zero.

1	2	3
4		
5		

Horizontais

1. Um primo
4. Um composto
5. Um quadrado perfeito

Verticais

1. Uma potência de 5
2. Uma potência de 2
3. Uma potência de 3

▸ PROBLEMA 3

Um embaixador organizou uma conferência, da qual participaram somente brasileiros e norte-americanos. Na conferência, há tantos convidados brasileiros como convidados norte-americanos.

Todos os convidados disseram "bom dia", em português, ao embaixador, que estava afônico e apenas acenou. Por delicadeza, cada convidado disse "bom dia" a cada um dos outros, na língua da pessoa a quem se dirigia. Por exemplo, um convidado norte-americano disse "bom dia" aos convidados brasileiros e "good morning" aos outros convidados norte-americanos.

De todos os cumprimentos, 78 foram "bom dia", em Português.

(a) Seja $2n$ o número de convidados. Copie a tabela a seguir na *Folha de Respostas* e a preencha. Já preenchemos uma parte dela para você. Os $2n/2 = n$ convidados brasileiros e os $2n/2 = n$ convidados norte-americanos (primeira e segunda linhas da tabela, respectivamente) disseram "bom dia" em Português ao embaixador (primeira coluna).

	Receberam "bom dia" em Português	
Disseram "bom dia" em Português	Embaixador	Brasileiros
Brasileiros	n	
Norte-americanos	n	

(b) Calcule o número de convidados.

▸ PROBLEMA 4

No *Mundo Encantado* existem apenas duas classes de duendes: os *honestos*, que sempre dizem a verdade, e os *mentirosos*, que sempre mentem. A menina Alice (a mesma do "No País das Maravilhas") chegou no *Mundo Encantado* e encontrou os duendes Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo.

Arnaldo lhe disse: "Exatamente um de nós quatro é mentiroso."

Bernaldo disse: "Nós quatro somos mentirosos."

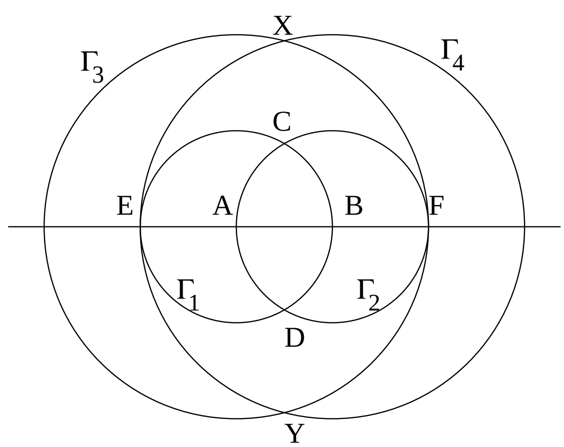
Então, Alice perguntou a Cernaldo: "Arnaldo é mentiroso?", e recebeu uma resposta, sim ou não, que, infelizmente, não tornou possível determinar de que classe é Arnaldo.

Agora é sua vez! Ajude Alice e descubra se Dernaldo é honesto ou mentiroso.

▸ PROBLEMA 5

Kurt Hofstetter, em um artigo, descreve uma construção da razão áurea em apenas cinco passos:

(i) Trace uma circunferência Γ_1 qualquer. Seja A o seu centro.
(ii) Com centro em um ponto B qualquer sobre Γ_1 e raio AB, trace outra circunferência Γ_2, que corta Γ_1 em C e D.
(iii) Trace a reta AB, que corta Γ_1 e Γ_2 em $E \neq B$ e $F \neq A$, respectivamente.
(iv) Trace a circunferência Γ_3, de centro A e raio AF.
(v) Trace a circunferência Γ_4, de centro B e raio BE. Sejam X e Y as interseções de Γ_3 e Γ_4.



Os segmentos CD e DX estão em razão áurea, ou seja, $\dfrac{CD}{DX} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(a) Mostre que C, D, X e Y pertencem à mediatriz de AB e são, portanto, colineares.

(b) Suponha que $AB = 2$ e seja M o ponto médio de AB. Calcule MD e MX e prove que $\dfrac{CD}{DX} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

XXVII Olimpíada Paulista de Matemática
Prova da Primeira Fase (16 de Agosto de 2003)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados na *Folha de Respostas*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas apenas na *Folha de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas a *Folha de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Números cruzados são como palavras cruzadas, só que em vez de colocar uma letra você deve colocar um algarismo em cada quadradinho.

Resolva os números cruzados a seguir. Todas as respostas são números de três algarismos e, portanto, não devem começar com zero.

1	2	3
4		
5		

Horizontais

1. Um múltiplo do número de resultados possíveis no lançamento de dois dados, um branco e outro preto
4. Um primo
5. A soma de uma linha do triângulo de Pascal

Verticais

1. Uma potência de 2
2. Um múltiplo do número de resultados possíveis no lançamento de dois dados indistinguíveis

Atenção: como os dados são indistinguíveis, existem, por exemplo, 3 maneiras de a soma das faces ser 6.

3. Um quadrado perfeito

▸ PROBLEMA 2

Um embaixador organizou uma conferência, da qual participaram somente brasileiros e norte-americanos. Na conferência, há tantos convidados brasileiros como convidados norte-americanos.

Todos os convidados disseram "bom dia", em português, ao embaixador, que estava afônico e apenas acenou. Por delicadeza, cada convidado disse "bom dia" a cada um dos outros, na língua da pessoa a quem se dirigia. Por exemplo, um convidado norte-americano disse "bom dia" aos convidados brasileiros e "good morning" aos outros convidados norte-americanos.

De todos os cumprimentos, 78 foram "bom dia", em Português.

(a) Seja $2n$ o número de convidados. Copie a tabela a seguir na *Folha de Respostas* e a preencha. Já preenchemos uma parte dela para você. Os $2n/2 = n$ convidados brasileiros e os $2n/2 = n$ convidados norte-americanos (primeira e segunda linhas da tabela, respectivamente) disseram "bom dia" em Português ao embaixador (primeira coluna).

	Receberam "bom dia" em Português	
Disseram "bom dia" em Português	Embaixador	Brasileiros
Brasileiros	n	
Norte-americanos	n	

(b) Calcule o número de convidados.

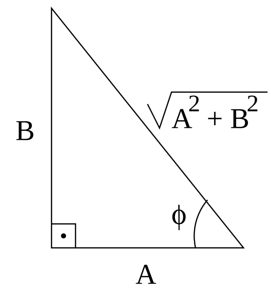
▸ PROBLEMA 3

A maioria dos sinais de comunicação (ondas de rádio, telefone, Internet, etc) é convertida em *sinais de voltagem* variáveis. A maioria destes sinais de voltagem pode ser modelada como uma soma de funções do tipo $f(t) = a\,\text{sen}(\omega t + \theta)$, em que t é o *tempo*, em segundos; a é a *amplitude do sinal*, em volts; ω é a *velocidade angular do sinal*, em rad/s; θ é a *defasagem do sinal*, um ângulo entre 0 e $360°$.

Neste problema, veremos como somar sinais de mesma freqüência. Encontraremos a amplitude e a defasagem da soma dos sinais de voltagem $20\sqrt{3}\,\text{sen}\,t$ e $20\,\text{sen}(t + 150°)$.

(a) Escreva $f(t) = 20\sqrt{3}\,\text{sen}\,t + 20\,\text{sen}(t + 150°)$ na forma $f(t) = A\,\text{sen}\,t + B\cos t$, em que A e B são constantes reais.

(b) Observe a figura a seguir em que A e B foram obtidos no item anterior.



Prove que $f(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\,\text{sen}(t + \phi)$ e encontre a amplitude e a defasagem de $f(t)$.

Sugestão: você pode querer usar, em ambos os itens, as fórmulas

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a\cos b + \text{sen}\,b\cos a$$
$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}\,a\cos b - \text{sen}\,b\cos a$$
$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$
$$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$

▸ PROBLEMA 4

(a) Sejam i, j, n naturais, $i \leqslant \frac{n}{2}$ e $j \leqslant \frac{n}{2}$. Prove que

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}$$

(b) Utilizando a identidade acima, prove que, sendo i, j, n naturais com $0 < i \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}$, o máximo divisor comum de $\binom{n}{i}$ e $\binom{n}{j}$ é maior que 1, ou seja, que dois binomiais com mesmo numerador nunca são primos entre si.

Observação: Lembre-se de que, para m e k naturais, $m \geqslant k$, $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$.

▸ PROBLEMA 5

Sabe-se que $e^x > 1 + x$ para todo $x \in R^*$. A partir desta desigualdade, prove que:

(a) Para todo $x > 0$, $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{4}$.

(b) Existe uma constante real x_0 tal que, para todo $x > x_0$, $e^x > x^{2003}$.