XXVI Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Primeira Fase (17 de Agosto de 2002)

Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados na *Folha de Respostas*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas apenas na *Folha de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas a *Folha de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

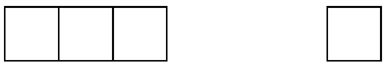
▸ PROBLEMA 1

Bruno e Bernardo foram a um acampamento junto com seus professores. Nesse acampamento havia uma única barraca para todos os professores. Já os estudantes ficaram em 10 barracas, cada uma delas com o mesmo número de pessoas.

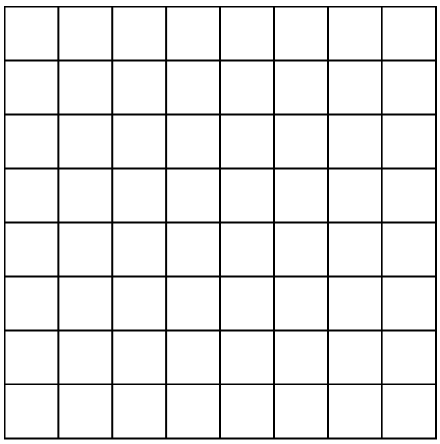
Eles sabiam que o total de pessoas no acampamento era igual a 41, e observaram que a quantidade de professores era igual a quantidade de estudantes de uma das barracas aumentada em 8 (não se assuste, a barraca dos professores era bem grande!). Quantos professores havia no acampamento?

▸ PROBLEMA 2

Utilizando 21 peças 1×3 e uma única peça 1×1, como mostradas a seguir,



faça uma figura na folha de respostas mostrando como cobrir completamente, sem sobrepor peças, um tabuleiro 8×8, como o mostrado a seguir. As peças 1×3 podem ser colocadas na horizontal ou na vertical.



▸ PROBLEMA 3

Um conjunto de inteiros positivos, dois a dois distintos, é chamado *auto-divisor* se a soma de todos os seus elementos é múltiplo de cada um de seus elementos. Por exemplo, $\{1; 2; 3\}$ é um conjunto auto-divisor com 3 elementos, pois $1 + 2 + 3 = 6$ é múltiplo de 1, 2 e 3.

Agora é sua vez! Invente um conjunto auto-divisor com

(a) 4 elementos.

(b) 5 elementos.

(c) 10 elementos.

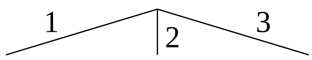
▸ PROBLEMA 4

Em uma urna há três bolas numeradas, respectivamente, 1, 2 e 3. Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo com as seguintes regras: inicialmente, Arnaldo retira uma bola da urna, anota seu número numa lousa e a devolve à urna. Então é a vez de Bernaldo, que retira uma bola da urna, apaga o número que está na lousa, escreve a soma do número da bola com o número apagado e devolve a bola à urna.

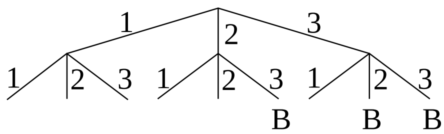
Se Bernaldo obteve um número maior que ou igual a 5, ele ganhou. Caso contrário, o jogo continua. Cada jogador, alternadamente, retira uma bola, apaga o número que está na lousa, substitui o número que está na lousa pela soma do número da bola com o número apagado e devolve a bola à urna. Até que um deles, após realizar sua jogada, obtenha um número maior que ou igual a 5, ganhando o jogo!

Para acompanharmos o jogo e as diferentes maneiras de se ganhar, utilizaremos um *diagrama de árvore* para representarmos todas as jogadas. Veja:

Na primeira rodada (a vez é de Arnaldo!), é retirada uma bola com o número 1 ou 2 ou 3. Os resultados podem ser representados assim:



Na segunda rodada, os possíveis resultados também são 1 ou 2 ou 3, e como serão adicionados aos anteriores, o diagrama fica assim:



Veja que há 9 maneiras de se terminar a segunda rodada, e dentre essas, Bernaldo pode sair vitorioso de 3 maneiras diferentes: $2+3$ ou $3+2$ ou $3+3$, conforme indicado no próprio diagrama através de uma letra "B".

(a) Na terceira rodada, a vez é novamente de Arnaldo. De quantas maneiras diferentes ele pode ganhar nessa rodada?

(b) De quantas maneiras diferentes Bernaldo pode ganhar esse jogo?

▸ PROBLEMA 5

A *Seqüência de Fibonacci* é definida da seguinte forma: o termo 0, representado por F_0, é igual a 0, o termo 1, representado por F_1, é igual a 1 e, a partir do termo 2, cada termo é a soma dos dois anteriores. Por exemplo: o termo 2, representado por F_2, é igual a $F_0+F_1 = 0+1 = 1$; o termo 3, representado por F_3, é igual a $F_1+F_2 = 1+1 = 2$, e assim por diante.

Assim, os primeiros termos dessa seqüência são: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, ...

(a) Calcule F_8, F_9, F_{10} e F_{11}.

(b) F_{2002} é par ou ímpar? Justifique.

XXVI Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Primeira Fase (17 de Agosto de 2002)

Nível β ($7^{\underline{a}}$ e $8^{\underline{a}}$ séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados na *Folha de Respostas*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas apenas na *Folha de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas a *Folha de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Um conjunto de inteiros positivos, dois a dois distintos, é chamado *auto-divisor* se a soma de todos os seus elementos é múltiplo de cada um de seus elementos. Por exemplo, $\{1; 2; 3\}$ é um conjunto auto-divisor com 3 elementos, pois $1 + 2 + 3 = 6$ é múltiplo de 1, 2 e 3.

Agora é sua vez! Invente um conjunto auto-divisor com

(a) 4 elementos.

(b) 5 elementos.

(c) 10 elementos.

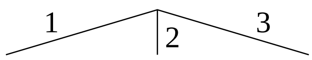
▸ PROBLEMA 2

Em uma urna há três bolas numeradas, respectivamente, 1, 2 e 3. Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo com as seguintes regras: inicialmente, Arnaldo retira uma bola da urna, anota seu número numa lousa e a devolve à urna. Então é a vez de Bernaldo, que retira uma bola da urna, apaga o número que está na lousa, escreve a soma do número da bola com o número apagado e devolve a bola à urna.

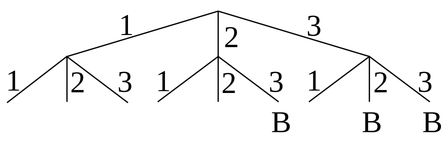
Se Bernaldo obteve um número maior que ou igual a 5, ele ganhou. Caso contrário, o jogo continua. Cada jogador, alternadamente, retira uma bola, apaga o número que está na lousa, substitui o número que está na lousa pela soma do número da bola com o número apagado e devolve a bola à urna. Até que um deles, após realizar sua jogada, obtenha um número maior que ou igual a 5, ganhando o jogo!

Para acompanharmos o jogo e as diferentes maneiras de se ganhar, utilizaremos um *diagrama de árvore* para representarmos todas as jogadas. Veja:

Na primeira rodada (a vez é de Arnaldo!), é retirada uma bola com o número 1 ou 2 ou 3. Os resultados podem ser representados assim:



Na segunda rodada, os possíveis resultados também são 1 ou 2 ou 3, e como serão adicionados aos anteriores, o diagrama fica assim:



Veja que há 9 maneiras de se terminar a segunda rodada, e dentre essas, Bernaldo pode sair vitorioso de 3 maneiras diferentes: $2 + 3$ ou $3 + 2$ ou $3 + 3$, conforme indicado no próprio diagrama através de uma letra "B".

(a) Na terceira rodada, a vez é novamente de Arnaldo. De quantas maneiras diferentes ele pode ganhar nessa rodada?

(b) De quantas maneiras diferentes Bernaldo pode ganhar esse jogo?

▸ PROBLEMA 3

Os lados de um losango medem $(1 + \sqrt{5})/2$ cm, e a soma de suas diagonais mede $3 + \sqrt{5}$ cm. Calcule a sua área.

Observação: Lembre-se de que um losango é um quadrilátero com os quatro lados de mesma medida.

▸ PROBLEMA 4

(a) Efetue o produto

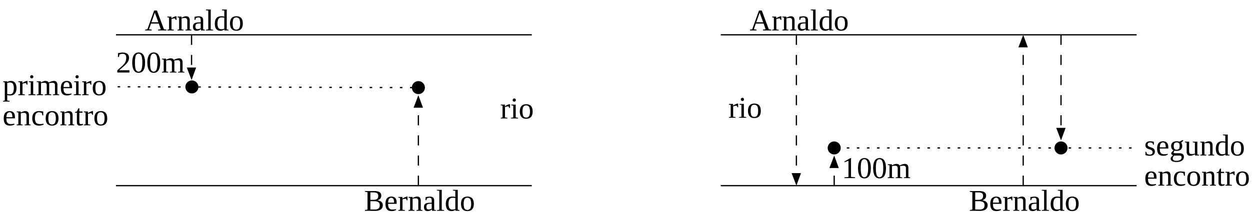
$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1)(x^{64}+1)$$

(b) Racionalize a expressão

$$\frac{1}{(\sqrt[64]{2}+1)(\sqrt[32]{2}+1)(\sqrt[16]{2}+1)(\sqrt[8]{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)}$$

▸ PROBLEMA 5

Dois barcos, pilotados por Arnaldo e Bernaldo, partem, no mesmo instante, das margens opostas de um rio. Os barcos navegam, cada um, com sua própria velocidade, constante em todo o trajeto. Cada barco atinge a margem oposta e retorna imediatamente ao seu ponto de partida. Eles se cruzam primeiramente a 200 m da margem de onde partiu Arnaldo e, 20 segundos depois, passam novamente um pelo outro a 100 m da outra margem. Veja as figuras a seguir, fora de escala.



(a) Observe que, até o primeiro encontro, o barco de Arnaldo percorreu 200 m e os dois barcos, juntos, percorreram o equivalente à largura do rio. E até o segundo encontro, os barcos, juntos, percorreram o equivalente a 3 larguras do rio. Qual é, então, a largura do rio?

(b) Determine a velocidade, em m/s, do barco mais rápido.

XXVI Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Primeira Fase (17 de Agosto de 2002)

Nível γ ($1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados na *Folha de Respostas*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e devem ser apresentadas apenas na *Folha de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas a *Folha de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Uma piscina tem capacidade para 120 m^3 e agora está completamente cheia. Uma análise mostrou que agora há 1024 gramas de cloro na piscina. A água da piscina precisa ser trocada.

(a) Suponha que, no início de cada hora, tiramos 60 m^3 da piscina e, logo em seguida, colocamos 60 m^3 de água pura (sem cloro). Ao despejarmos água pura, o cloro se mistura homogeneamente na piscina. Qual a massa de cloro na piscina no final da segunda hora?

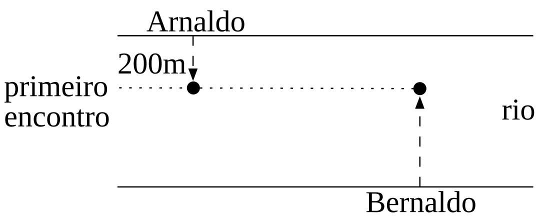
(b) Agora suponha que no início de cada meia hora tiramos 30 m^3 do conteúdo da piscina e, logo em seguida, colocamos 30 m^3 de água pura. Complete a tabela a seguir.

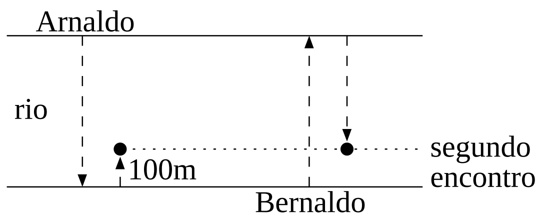
Tempo (h)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
Massa de cloro na piscina (g)	1024				

(c) Suponha que no início de cada intervalo de $0,002$ h tiramos $0,12$ m^3 e, logo em seguida colocamos igual quantidade de água pura. Utilizando a aproximação $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{1}{e}$, válida para valores grandes de n, determine a quantidade de cloro que resta na piscina após 2 horas. Aqui, $e \approx 2,72$ é a constante de *Euler*.

▸ PROBLEMA 2

Dois barcos, pilotados por Arnaldo e Bernaldo, partem, no mesmo instante, das margens opostas de um rio. Os barcos navegam, cada um, com sua própria velocidade, constante em todo o trajeto. Cada barco atinge a margem oposta e retorna imediatamente ao seu ponto de partida. Eles se cruzam primeiramente a 200 m da margem de onde partiu Arnaldo e, 20 segundos depois, passam novamente um pelo outro a 100 m da outra margem. Veja as figuras a seguir, fora de escala.





(a) Observe que, até o primeiro encontro, o barco de Arnaldo percorreu 200 m e os dois barcos, juntos, percorreram o equivalente à largura do rio. E até o segundo encontro, os barcos, juntos, percorreram o equivalente a 3 larguras do rio. Qual é, então, a largura do rio?

(b) Determine a velocidade, em m/s, do barco mais rápido.

▸ PROBLEMA 3

Seis pessoas devem ser divididas em três grupos. Duas divisões que diferem apenas em relação à ordem dos grupos ou à ordem das pessoas dentro de um grupo são consideradas iguais. Por exemplo, a divisão $\{\{A, B\}, \{C, D\}, \{E, F\}\}$ é exatamente a mesma que $\{\{C, D\}, \{B, A\}, \{E, F\}\}$.

(a) Quantas divisões são possíveis se cada um dos grupos deve ter exatamente duas pessoas?

(b) Determine o total de possíveis divisões, se todo grupo deve ter pelo menos uma pessoa.

▸PROBLEMA 4

Mostre que $46^{47} + 48^{47}$ é divisível por 47^2.

Sugestão: escreva $46^{47} + 48^{47} = (47-1)^{47} + (47+1)^{47}$ *e utilize o binômio de Newton, ou seja,*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

▸PROBLEMA 5

Calcule

$$S = 2\,\mathrm{sen}\,2^\circ + 4\,\mathrm{sen}\,4^\circ + 6\,\mathrm{sen}\,6^\circ + \cdots + 178\,\mathrm{sen}\,178^\circ$$

Sugestão: multiplique a expressão acima por $\mathrm{sen}\,1^\circ$ *e utilize o fato de que* $2\,\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.