XXV Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final (10 de Novembro de 2001)

Nível α ($5^{\underline{a}}$ e $6^{\underline{a}}$ séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

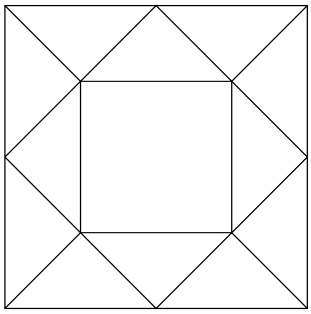
Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ **PROBLEMA 1**

Um pedreiro reveste um piso fazendo uma composição com ladrilhos quadrados e triangulares, conforme mostra a figura a seguir.



São utilizados um ladrilho quadrado, de lado 20 cm, e ladrilhos triangulares iguais, os quais são obtidos cortando-se ladrilhos quadrados pelas suas diagonais.

(a) Determine as medidas dos ângulos internos do ladrilho triangular.

(b) Calcule a área da figura apresentada acima.

▸ **PROBLEMA 2**

Em 2001, diante da crise energética no Brasil, o governo criou um plano de racionamento de energia elétrica. Várias medidas foram adotadas para reduzir o consumo de energia, e uma delas foi a concessão de um bônus nas contas de energia elétrica daqueles que conseguissem diminuir seu consumo mensal. A regra é a seguinte: nas contas de energia elétrica com consumo mensal de até 100 kWh, para cada R\$1,00 economizado, o consumidor ganha R\$2,00 de bônus, creditados na sua próxima conta, e nas contas com consumo mensal de 101 kWh até 200 kWh, para cada R\$1,00 economizado, R\$1,00 de bônus, também creditado na sua próxima conta.

Por exemplo, suponha que uma família, que consumiu menos de 100 kWh e pagou R\$20,00 de energia elétrica em outubro, conseguiu fazer uma redução de R\$3,00 para a próxima conta; então ela terá que pagar R\$20,00 − (R\$3,00 + R\$6,00) = R\$11,00 em novembro.

Considere que o preço de 1 kWh é R\$0,24, incluídos os impostos, e que durante o mês de outubro uma família consumiu 175 kWh.

(a) Calcule o valor a ser pago por esse consumo.

(b) Determine qual deverá ser o consumo no mês seguinte, em kWh, para que, com a vantagem do bônus, o valor da conta seja metade da anterior.

▸ **PROBLEMA 3**

Neste problema, vamos apresentar um método de fatoração criado por Pierre de Fermat. O método consiste em tentar escrever n como a diferença de dois quadrados:

$$n = x^2 - y^2$$

Para isto atribuímos a x o primeiro inteiro maior ou igual a $\sqrt{n}$. Então, testamos se

$$y = \sqrt{x^2 - n}$$

é inteiro. Caso y seja inteiro, utilizamos a fatoração $x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$ para fatorar n. Senão, aumentamos o valor de x em 1 e repetimos o procedimento.

Por exemplo, se $n = 7303$, temos $\sqrt{n} = 85{,}45\ldots$, logo fazemos $x = 86$. Como $y = \sqrt{x^2 - n} = \sqrt{86^2 - 7303} = \sqrt{93}$ não é inteiro, aumentamos o valor de x em 1 e tentamos novamente. Para $x = 87$, temos $y = \sqrt{87^2 - 7303} = \sqrt{266}$. Então fazemos $x = 88$ e agora $y = \sqrt{88^2 - 7303} = \sqrt{441} = 21$, que é um inteiro e o procedimento termina.

Para obter a fatoração, observe que

$$21 = \sqrt{88^2 - 7303} \iff 21^2 = 88^2 - 7303 \iff 7303 = 88^2 - 21^2 = (88-21)(88+21) = 67 \cdot 109$$

Assim, $7303 = 67 \cdot 109$ que é, portanto, composto.

Agora é a sua vez: mostre que $n = 84587$ é um número composto.

▸ PROBLEMA 4

Pinóquio, atualmente um engenheiro formado, trabalha na *Square Table*, uma fábrica que produz somente mesas quadradas. Uma mesa original *Square Table* é formada por quatro pernas, quatro armações e sua superfície. Para facilitar a produção, as quatro pernas e as quatro armações são montadas antes, formando o alicerce de uma mesa.

Para fabricar uma mesa são necessárias 5 atividades. A duração de cada uma destas atividades é a seguinte:

Atividade	Duração
Fabricar armação	1 semana
Fabricar perna	2 semanas
Fabricar superfície	1 semana

Atividade	Duração
Montar mesa	1 semana
Montar alicerce	1 semana

Os Três Porquinhos, atualmente donos de uma grande construtora, encomendaram a Pinóquio 450 mesas: 200 devem ser entregues daqui a 4 semanas, 150, daqui a 5 semanas e 100, daqui a 6 semanas.

Hoje, dia da encomenda, há em estoque 50 mesas, 100 alicerces, 280 pernas, 50 armações e 50 superfícies.

(a) Pinóquio deixa tudo para a última hora. Porém, ele é muito organizado e, para planejar a produção, elaborou a seguinte tabela.

Semana	1	2	3	4	5	6
Mesas						
Devem ser entregues	0	0	0	200	150	100
Devem começar a ser montadas	0	0	150	150	100	0

Nesta tabela, temos por exemplo que, para entregar as 200 mesas daqui a 4 semanas, podemos usar as 50 em estoque e fabricar 150, cuja montagem deve começar uma semana antes, ou seja, daqui a 3 semanas.

Faça uma tabela semelhante a essa para planejar a produção de alicerces.

(b) Daqui a 3 semanas, quantas pernas devem começar a ser fabricadas? E quantas armações devem começar a ser fabricadas?

▸ PROBLEMA 5

Bruno e Bernardo inventaram um jogo. São dados um tabuleiro quadrado 3×3, e 9 fichas numeradas de 1 a 9. Cada um dos jogadores, alternadamente, escolhe uma ficha e a coloca em uma casa ainda não ocupada do tabuleiro, até preenchê-lo. Então, o primeiro jogador recebe a soma dos números das 6 fichas colocadas na 1ª e 3ª linhas (fileiras horizontais) e os do segundo jogador, a soma dos números das 6 fichas colocadas na 1ª e 3ª colunas (fileiras verticais). Ganha o jogador que obtiver a maior soma.

Por exemplo, Bruno começa colocando a ficha com o número 5. Então, Bernardo coloca a com o número 2, Bruno, a com o 4 e Bernardo, a com o 7, e, alternadamente, seguem até preencher o tabuleiro, como mostra a figura a seguir.

2	5	1
3	9	8
7	6	4

Veja que nessa partida, Bruno obteve $2+5+1+7+6+4=25$ e Bernardo, $2+3+7+1+8+4=25$, ocorrendo assim um empate.

Mostre que existe uma maneira de o primeiro jogador garantir vitória ou empate, não importando quais sejam as jogadas do segundo.

XXV Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final (10 de Novembro de 2001)

Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Em 2001, diante da crise energética no Brasil, o governo criou um plano de racionamento de energia elétrica. Várias medidas foram adotadas para reduzir o consumo de energia, e uma delas foi a concessão de um bônus nas contas de energia elétrica daqueles que conseguissem diminuir seu consumo mensal. A regra é a seguinte: nas contas de energia elétrica com consumo mensal de até 100 kWh, para cada R$1,00 economizado, o consumidor ganha R$2,00 de bônus, creditados na sua próxima conta, e nas contas com consumo mensal de 101 kWh até 200 kWh, para cada R$1,00 economizado, R$1,00 de bônus, também creditado na sua próxima conta.

Por exemplo, suponha que uma família, que consumiu menos de 100 kWh e pagou R$20,00 de energia elétrica em outubro, conseguiu fazer uma redução de R$3,00 para a próxima conta; então ela terá que pagar R$20,00 − (R$3,00 + R$6,00) = R$11,00 em novembro.

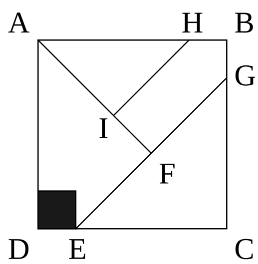
Considere que o preço de 1 kWh é R$0,24, incluídos os impostos, e que durante o mês de outubro uma família consumiu 175 kWh.

(a) Calcule o valor a ser pago por esse consumo.

(b) Determine qual deverá ser o consumo no mês seguinte, em kWh, para que, com a vantagem do bônus, o valor da conta seja metade da anterior.

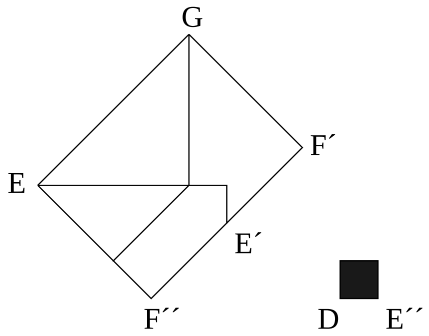
▸ PROBLEMA 2

Um professor inventou um tangram interessante. Inicialmente, repartiu um quadrado, como mostra a figura seguinte. As partes consistem em um quadradinho, dois triângulos retângulos isósceles e dois pentágonos. O pentágono convexo tem dois lados paralelos e congruentes(FG e HI).



(a) Mostre que, no quadrado ABCD, temos AF perpendicular a EG.

(b) Separando o quadradinho, o professor quer unir as demais partes de modo que o retângulo EGF′F″ mostrado a seguir seja um quadrado. Se o quadrado inicial tiver área 1 cm^2, quanto deve medir EG?



▸ **PROBLEMA 3**

As irmãs Isabelle e Emanuelle durante a época do Natal de 2000 abriram uma loja no shopping.

Semanalmente, Isabelle trabalhava 4 dias cuidando da loja. Emanuelle cuidava da loja nos 3 dias restantes.

Após poucas semanas, decidiram desfazer a sociedade e cada uma ficou com 140 mil reais. O lucro de cada uma com o término da sociedade foi diretamente proporcional à contribuição inicial de cada uma para a abertura da loja e ao número de dias trabalhados.

(Atenção! Lucro = Receita − Custo   Receita: o quanto recebeu;   Custo: o quanto gastou.)

Sabendo que para montar a loja foram gastos ao todo 130 mil reais, qual foi a contribuição de cada uma para esses gastos?

▸ **PROBLEMA 4**

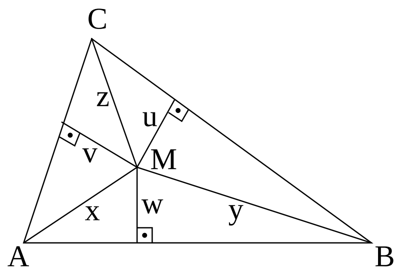
Considere o produto P dos 50 primeiros inteiros positivos:

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 49 \cdot 50$$

(a) Mostre que a representação decimal de P termina em exatamente 12 zeros, isto é, que P é múltiplo de 10^{12}, mas não é múltiplo de 10^{13}.

(b) Determine o último dígito não nulo de P.

▸ **PROBLEMA 5**



(a) Na figura acima, considere pontos B_1 e C_1 sobre as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente.

  (i) Mostre que a soma das áreas dos paralelogramos com lados AB_1 e AM e com lados AC_1 e AM é igual à área do paralelogramo tal que um de seus lados é B_1C_1 e o outro é paralelo a AM.

  (ii) Tomando $AB_1 = AC$ e $AC_1 = AB$, conclua que $AB \cdot v + AC \cdot w \leqslant BC \cdot x$

(b) Prove a *Desigualdade de Erdős-Mordell*: $2(u + v + w) \leqslant x + y + z$

XXV Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final (10 de Novembro de 2001)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Estudos com textos de várias línguas indicam que as freqüências das palavras nesses textos seguem, aproximadamente, a *Lei de Zipf*: *ao contarmos quantas vezes aparece cada uma das palavras de um texto, o número de ocorrências da n-ésima palavra mais freqüente é inversamente proporcional a* n.

Assim, por exemplo, a segunda palavra mais comum ocorre com metade da freqüência da palavra mais comum.

Na obra "Fausto" de J. W. Goethe, a nona palavra mais freqüente é "sich", que ocorre 770 vezes. Sabendo que o texto completo tem 68470 palavras, calcule o número aproximado de palavras distintas em "Fausto".

As seguintes aproximações podem ser úteis:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\approx \ln N+0{,}58 \qquad e\approx 2{,}7 \qquad e^2\approx 7{,}4 \qquad e^3\approx 20{,}1 \qquad e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2} \text{ para } 0\leqslant x\leqslant 1$$

▸ PROBLEMA 2

Considere o conjunto $S=\{n_1,n_2,\ldots,n_7\}$ em que

$$\begin{aligned} n_1&=7\\ n_2&=5\cdot 7^3\cdot 13\cdot 17\cdot 19\\ n_3&=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11 \end{aligned}\qquad \begin{aligned} n_4&=3\cdot 5^5\cdot 7\cdot 11\\ n_5&=2\cdot 5\cdot 13\cdot 19 \end{aligned}\qquad \begin{aligned} n_6&=2\cdot 3\cdot 5\cdot 13\\ n_7&=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13^5 \end{aligned}$$

Para cada subconjunto de S, fazemos $x_i=1$ se n_i pertence ao subconjunto e $x_i=0$ caso contrário, $i=1,2,\ldots,7$. Por exemplo, para $\{n_1,n_6,n_7\}$, temos $x_1=x_6=x_7=1$ e $x_2=x_3=x_4=x_5=0$.

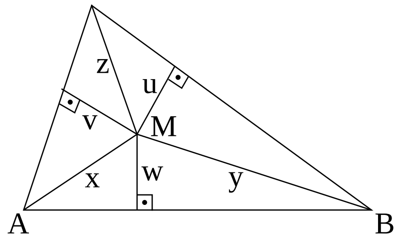
(a) Mostre que o produto dos números em um subconjunto de S é um quadrado perfeito se, e somente se,

$$\begin{array}{cc} x_5+x_6+x_7 & x_3+x_4\\ x_3+x_4+x_6+x_7 & x_2+x_5+x_6+x_7\\ x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 & x_2\\ x_1+x_2+x_4+x_7 & x_2+x_5 \end{array}$$

são pares.

(b) Quantos subconjuntos não vazios de S satisfazem a propriedade de que o produto dos elementos do subconjunto é um quadrado perfeito?

▸ PROBLEMA 3



(a) Na figura acima, considere pontos B_1 e C_1 sobre as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente.

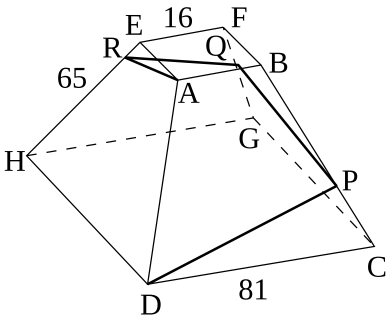
  (i) Mostre que a soma das áreas dos paralelogramos com lados AB_1 e AM e com lados AC_1 e AM é igual à área do paralelogramo tal que um de seus lados é B_1C_1 e o outro é paralelo a AM.

  (ii) Tomando $AB_1 = AC$ e $AC_1 = AB$, conclua que $AB \cdot v + AC \cdot w \leqslant BC \cdot x$

(b) Prove a *Desigualdade de Erdős-Mordell*: $2(u + v + w) \leqslant x + y + z$

▸ PROBLEMA 4

Uma pirâmide asteca é um tronco de pirâmide regular de base quadrada. As arestas das bases inferior e superior medem 81 m e 16 m, respectivamente, e as arestas laterais medem 65 m. Em volta da pirâmide asteca será construída uma rampa para os turistas. A rampa deve começar em um dos vértices da base inferior (D), terminar em um dos vértices da base superior (A) e sua inclinação vertical deve ser sempre a mesma, como mostra a figura.

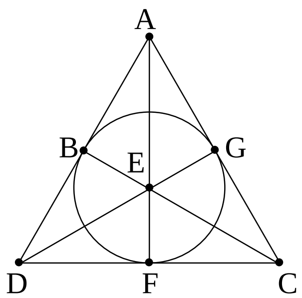


(a) Mostre que os ângulos agudos das faces laterais medem $60°$.

(b) Calcule as medidas de BP, FQ e ER.

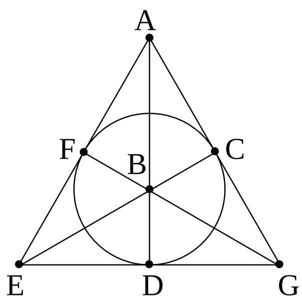
▸ PROBLEMA 5

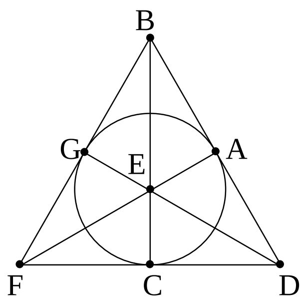
No condado Heptaprojetivo havia 7 castelos, batizados segundo grandes personagens: Arnold (A), Borcherds (B), Conway (C), Dilbert (D), Erdős (E), Faltings (F), Gowers (G). Havia também 7 ruas, cada uma com 3 castelos, como mostra o mapa a seguir (uma rua é circular):



Um belo dia, o conde Steiner decidiu retirar as placas que identificavam os castelos para fazer uma limpeza. Na hora de recolocá-las, ninguém se lembrava do lugar correto de cada uma, nem mesmo os moradores dos castelos! Os arquivos do condado só indicavam os castelos que ficavam numa mesma rua, mas não a ordem em que eles estavam. Assim, o conde sabia que havia uma rua com os castelos $\{A, B, D\}$, outra com $\{B, C, E\}$, outra com $\{B, F, G\}$, etc.

Frente aos fatos, Steiner resolveu determinar todas as maneiras de recolocar as placas respeitando os arquivos do condado, isto é, todas as maneiras nas quais placas que estavam juntas em uma mesma rua continuassem juntas em uma rua, possivelmente em outra ordem. Duas destas maneiras estão representadas a seguir:





Chamaremos essas maneiras de *válidas*.

(a) Prove que o total de maneiras válidas é 7 vezes o número de maneiras válidas nas quais a placa A é colocada no castelo A.

(b) Prove que o total de maneiras válidas nas quais a placa A é colocada no castelo A é 6 vezes o número de maneiras válidas nas quais a placa A é colocada no castelo A e a placa B é colocada no castelo B.

(c) Determine o número de maneiras válidas.