XXV Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Segunda Fase (18 de Agosto de 2001)

Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas** e apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Determine o maior e o menor número múltiplo de 6 formados por 9 algarismos distintos.

Observação: Lembre-se de que zeros à esquerda de um número não devem ser contados como algarismos; por exemplo, 0123 *tem somente* 3 *algarismos.*

▸ PROBLEMA 2

Na Krugerrândia, a empresa responsável pelo transporte urbano em ônibus oferece dois tipos de passe: Múltiplo de 2 e Múltiplo de 4. Em ambos os casos, o passageiro recebe um único passe, no qual está impresso o tipo. O controle da quantidade de viagens realizadas é feito eletronicamente, e o passe fica retido pela máquina ao término das viagens permitidas.

O passe Múltiplo de 2 custa Kr$3,10 e dá direito a duas viagens quaisquer e o Múltiplo de 4 custa Kr$5,90 e dá direito a quatro viagens quaisquer. Para definir o preço de cada passe, a empresa computou apenas o gasto com a confecção do passe (que é o mesmo para os dois tipos) e o gasto correspondente às viagens a que dá direito cada passe.

(a) Qual é o gasto com a confecção de cada passe?

(b) A empresa quer criar o passe Múltiplo de 8, que dará direito a oito viagens quaisquer. De acordo com as informações apresentadas, quanto custará o passe Múltiplo de 8?

▸ PROBLEMA 3

De acordo com relato da revista Veja de 11/04/2001, a população indígena no Brasil, hoje, corresponde a cerca de 350 000 habitantes e a cada 80 anos é multiplicada por 16. Supondo que o atual ritmo de crescimento se mantenha,

(a) qual será a população indígena em 160 anos?

(b) em quantos anos a população indígena será o quádruplo da atual?

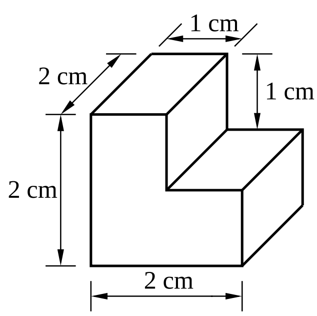
▸ PROBLEMA 4

Na Krugerrândia, uma passagem aérea para a Kruskalândia custa menos de Kr$200 e lá existem moedas de Kr$1, Kr$3, Kr$9, Kr$27, Kr$81. A compra de uma passagem aérea pode ser feita apenas em máquinas de venda do aeroporto, e essas máquinas aceitam apenas moedas e não devolvem troco.

Bruno vai para a Kruskalândia de avião para visitar seu amigo Bernardo. Qual é a menor quantidade de moedas que precisa carregar consigo para assegurar-se de que terá o valor exato da passagem?

▸ PROBLEMA 5

Dispõe-se de várias peças indestrutíveis em forma de "escada", como mostra a figura a seguir.



Qual é o cubo de menor aresta que podemos montar juntando peças como a da figura? Descreva uma possível construção ou faça uma figura explicando como construí-lo, e justifique por que este é o cubo de menor aresta que se pôde montar.

XXV Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Segunda Fase (18 de Agosto de 2001)

Nível β (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas** e apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

Na Krugerrândia, a empresa responsável pelo transporte urbano em ônibus oferece dois tipos de passe: Múltiplo de 2 e Múltiplo de 4. Em ambos os casos, o passageiro recebe um único passe, no qual está impresso o tipo. O controle da quantidade de viagens realizadas é feito eletronicamente, e o passe fica retido pela máquina ao término das viagens permitidas.

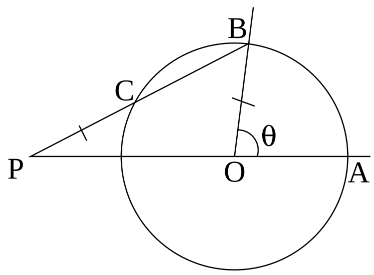
O passe Múltiplo de 2 custa Kr$3,10 e dá direito a duas viagens quaisquer e o Múltiplo de 4 custa Kr$5,90 e dá direito a quatro viagens quaisquer. Para definir o preço de cada passe, a empresa computou apenas o gasto com a confecção do passe (que é o mesmo para os dois tipos) e o gasto correspondente às viagens a que dá direito cada passe.

(a) Qual é o gasto com a confecção de cada passe?

(b) A empresa quer criar o passe Múltiplo de 8, que dará direito a oito viagens quaisquer. De acordo com as informações apresentadas, quanto custará o passe Múltiplo de 8?

▸ PROBLEMA 2

Seja θ um ângulo de vértice O. Com centro em O, traça-se uma circunferência de raio r que intercepta os lados do ângulo em A e B. Em seguida, determina-se P sobre a semi-reta AO tal que, sendo $C \neq B$ o outro ponto de interseção da reta BP com a circunferência, tenha-se $CP = r$. Calcule a medida do ângulo $A\hat{P}B$.



▸ PROBLEMA 3

Na Krugerrândia, uma passagem aérea para a Kruskalândia custa menos de Kr$200 e lá existem moedas de Kr$1, Kr$3, Kr$9, Kr$27, Kr$81. A compra de uma passagem aérea pode ser feita apenas em máquinas de venda do aeroporto, e essas máquinas aceitam apenas moedas e não devolvem troco.

Bruno vai para a Kruskalândia de avião para visitar seu amigo Bernardo. Qual é a menor quantidade de moedas que precisa carregar consigo para assegurar-se de que terá o valor exato da passagem?

▸ PROBLEMA 4

Bruno escreve na lousa os 4003 números

$$\frac{2001}{1}, \frac{2001}{2}, \frac{2001}{3}, \frac{2001}{4}, \ldots, \frac{2001}{4001}, \frac{2001}{4002}, \frac{2001}{4003}$$

Bernardo deve escolher dois deles, a e b, apagá-los e escrever o número $2ab - a - b + 1$; depois deve repetir tal procedimento até que sobre apenas um número na lousa.

(a) Na primeira vez em que faz isso, Bernardo resolve, em cada aplicação do procedimento, escolher os dois últimos números da lista, apagá-los e escrever o resultado da operação como o último número da nova lista. Faz isso sucessivamente até obter apenas um número na lousa. Determine este número.

(b) Na segunda vez em que faz isso, Bernardo resolve escolher os números em qualquer ordem. Determine todos os possíveis números que podem sobrar no final.

▸ PROBLEMA 5

Prove que, para quaisquer reais x e y maiores do que ou iguais a $1/2$,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant \sqrt{x + y + 1}$$

XXV Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Segunda Fase (18 de Agosto de 2001)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas** e apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸ PROBLEMA 1

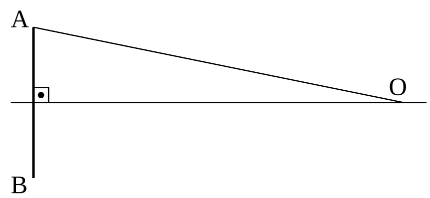
De acordo com relato da revista Veja de 11/04/2001, a população indígena no Brasil, hoje, corresponde a cerca de 350 000 habitantes e dobra a cada 20 anos. Mantendo-se o atual ritmo de crescimento, é possível prever quanto tempo a população indígena demoraria para atingir o tamanho registrado em diferentes momentos da história brasileira.

(a) Em 10 anos a população indígena poderá voltar ao tamanho que tinha no final da década de 40. Quantos índios, aproximadamente, havia no final da década de 40?

(b) No descobrimento, em 1500, estima-se que a população indígena era de 2 800 000 habitantes. De acordo com as informações apresentadas, daqui a quantos anos a população indígena deverá voltar a este número?

▸ PROBLEMA 2

Na prova da segunda fase da FUVEST 2000, pedia-se uma construção para a circunferência circunscrita ao polígono regular de 12 lados (ou seja, a circunferência que contém os 12 vértices do polígono), dados os pontos A e B, em que o segmento AB era um de seus lados. Um estudante sugeriu a seguinte construção: "*Trace a mediatriz de* AB *e determine sobre ela o ponto* O *tal que* $AO = 2AB$. O *é o centro da circunferência circunscrita.*"



Provaremos neste problema que, infelizmente, tal construção está incorreta.

(a) Numa construção correta, qual é a medida do seno do ângulo formado pela mediatriz de AB e o segmento que liga A ao centro da circunferência circunscrita?

(b) Mostre que, sendo R o raio **correto** da circunferência circunscrita e AO a medida **incorreta** obtida na construção do estudante, $0 < \frac{AO-R}{R} < 0{,}05$, ou seja, a construção está incorreta mas o erro relativo é inferior a 5%.

▸ PROBLEMA 3

Existem quantos números múltiplos de 6 formados por 8 algarismos distintos não nulos?

▸ PROBLEMA 4

Considere as partições de um inteiro positivo em parcelas ímpares positivas, isto é, as maneiras de escrevê-lo como soma de números ímpares positivos, em que a ordem das parcelas é irrelevante. Por exemplo, algumas partições de 9 (*que no total são* 8) em parcelas ímpares positivas são

$$9 = 1+1+1+3+3 = 1+1+1+1+1+1+3 = 1+1+1+1+5$$

Para cada partição, conte o número de vezes que cada parcela ímpar aparece, represente esse valor como soma de potências distintas de 2 e, então, multiplique cada uma das potências de 2 pelo ímpar. No nosso exemplo,

$$9 = (1)\cdot 9 = 9; \qquad 1+1+1+1+1+1+3 = (4+2)\cdot 1 + (1)\cdot 3 = 4+2+3;$$

$$1+1+1+3+3 = (2+1)\cdot 1 + (2)\cdot 3 = 2+1+6; \qquad 1+1+1+1+5 = (4)\cdot 1 + (1)\cdot 5 = 4+5$$

Obtemos então partições do inteiro positivo em parcelas distintas, isto é, maneiras de escrevê-lo como soma de números inteiros positivos distintos.

(a) Escreva todas as partições de 11 em parcelas ímpares e as partições em parcelas distintas correspondentes (utilize o processo acima para obtê-las).

(b) Descreva como inverter o processo, ou seja, dada uma partição de um inteiro positivo em parcelas distintas, descreva como obter a correspondente partição em parcelas ímpares.

▸ PROBLEMA 5

Quantos coeficientes são ímpares no desenvolvimento de:

(a) $(1+x)^4$? (b) $(1+x)^8$? (c) $(1+x)^{17}$?