

FOLHA DE PERGUNTAS

- Instruções:**
- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min. Cada questão vale 2,0 pontos.
 - No bloco de resoluções você deve colocar: *Nome completo, Nível, Escola (dizendo se é pública ou particular) e Cidade.*
 - Todas as respostas devem ser justificadas. Entregue apenas o bloco de resoluções e leve a folha de perguntas com você.
 - É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

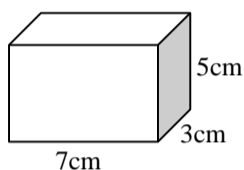
Questão 1 – Francisca compra produtos em grande quantidade para uma rede de restaurantes. No momento ela deve comprar detergente líquido, escolhendo entre as marcas A, B e C, que são vendidas em frascos com volumes diferentes. As três têm a mesma qualidade e um galão com 80 litros do detergente B custa R\$ 50,00, mas...

- o detergente A é 40% mais caro que o B e contém 20% menos líquido que o C;
- o detergente C custa 50% a mais que A e contém 50% mais líquido que o B.

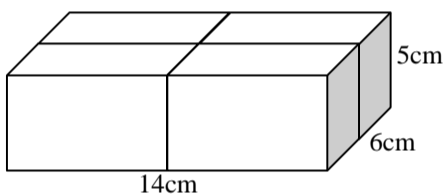
Francisca pensou e comprou a marca mais econômica. Qual é a mais econômica? Justifique sua resposta!

Questão 2 – Um dos elefantes de um zoológico está de dieta e a cada dia deve comer uma porção de cenouras igual à que um coelho come em um ano (365 dias). Em um dia, um elefante e um coelho comem juntos 183 quilogramas de cenoura. Quantos quilogramas de cenoura o elefante come em um dia? Justifique sua resposta!

Questão 3 – Sobre uma mesa tenho quatro paralelepípedos reto-retângulos, todos iguais ao da figura seguinte:



Vamos então construir outros paralelepípedos juntando todos os quatro, como por exemplo:



Nas condições acima apresentadas, quantos paralelepípedos diferentes podemos construir? Justifique sua resposta com desenhos, especificando as medidas de cada paralelepípedo construído.

Questão 4 – Este é um jogo para dois participantes, A e B, que funciona assim:

- A diz um número escolhido dentre os números 1, 2, 3, ..., 11;
- B diz um número nas mesmas condições que é então somado ao escolhido por A;
- A diz um novo número escolhido dentre 1, 2, 3, ..., 11 que é então somado ao total acumulado;
- e continua assim, até que um dos jogadores diga um número que resulte em um total igual a 56; esse jogador vence.

Nesse jogo eu enfrentei um amigo. Comecei o jogo e ganhei, sem dar chance ao adversário. Como foi que ganhei?

Dica: o primeiro número que eu disse foi importante para decidir o jogo!

Questão 5 – O Homem sempre foi fascinado por números gigantes. Na antigüidade, Arquimedes inventou um método para escrever um número que excedesse a quantidade de grãos de areia necessários para preencher o universo. O número de Arquimedes é aproximadamente $10^{(10^{16902})}$.

Há uma maneira simples para se escrever números gigantes. Utilizando o símbolo \uparrow , podemos representar potências da seguinte maneira:

- $A \uparrow B = A^B$, como por exemplo, $2 \uparrow 3 = 2^3 = 8$;
- $A \uparrow \uparrow B = A^{(A^{(\dots A)})}$, onde A aparece B vezes, como por exemplo, $2 \uparrow \uparrow 3 = 2^{(2^2)} = 2^4 = 16$.

Deste modo $10^{(10^{16902})}$ pode ser representado assim: $10 \uparrow (10 \uparrow 16902)$.

a) Determine o valor numérico de $5 \uparrow 2$ e $5 \uparrow \uparrow 2$.

b) Na expressão $2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow (\dots \uparrow (2))))$, qual é o menor número de \uparrow que devemos colocar a fim de obtermos um número maior do que $10 \uparrow 9$? Justifique sua resposta!

FOLHA DE PERGUNTAS

- Instruções:**
- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min. Cada questão vale 2,0 pontos.
 - No bloco de resoluções você deve colocar: *Nome completo, Nível, Escola (dizendo se é pública ou particular) e Cidade.*
 - Todas as respostas devem ser justificadas. Entregue apenas o bloco de resoluções e leve a folha de perguntas com você.
 - É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

Questão 1 – Os elefantes de um zoológico estão de dieta e juntos, num período de 10 dias, devem comer uma quantidade de cenouras igual ao quadrado da quantidade que um coelho come em 30 dias. Em um dia, os elefantes e o coelho comem juntos 1444 quilogramas de cenoura. Quantos quilogramas de cenoura os elefantes comem em um dia? Justifique sua resposta!

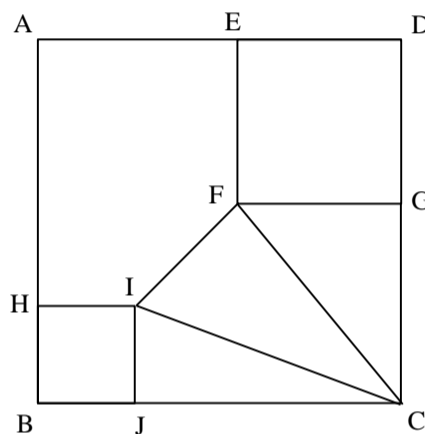
Questão 2 – Antônio e Bento, dois gêmeos, seguiam o leito de uma ferrovia e começaram a atravessar uma ponte estreita na qual havia espaço apenas para o trem. No momento em que completavam $\frac{2}{5}$ do percurso da ponte, ouviram o trem que se aproximava por trás deles. Antônio começou a correr de encontro ao trem, saindo da ponte praticamente no instante em que o trem entrava. Bento correu no sentido oposto a Antônio, conseguindo sair da ponte praticamente no instante em que o trem saía. Quando os irmãos se reencontraram, passado o sufoco, o irmão que gostava de Matemática (o outro amava) observou:

— *Corremos à velocidade de 15km por hora e portanto já sei calcular a velocidade do trem!*

Calcule a velocidade do trem. Justifique sua resposta!

Questão 3 – Na figura, ABCD, EFGD e HBJI são quadrados, de lados 5cm, 2cm e 1cm respectivamente.

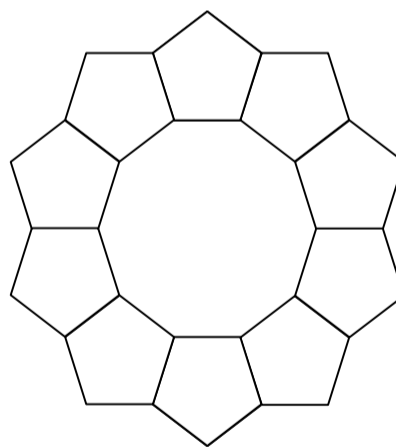
- Mostre que os pontos I e F pertencem à diagonal \overline{BD} do quadrado ABCD.
- Calcule a área do triângulo CFI. Justifique sua resposta!



Questão 4 – Dados 17 números inteiros positivos quaisquer, sempre é possível escolher cinco deles de modo que a soma dos cinco seja divisível por 5. Justifique este fato.

Questão 5 – Dizemos que um polígono regular está “cercado” quando é possível construir um outro polígono regular sobre cada um de seus lados, de modo que estes polígonos construídos sejam todos congruentes entre si e os adjacentes tenham um lado comum. Exemplo: um decágono regular pode ser cercado por pentágonos regulares congruentes, como mostra a figura.

Determine todos os polígonos regulares que podem ser cercados e os respectivos polígonos que formam a cerca. Justifique sua resposta!



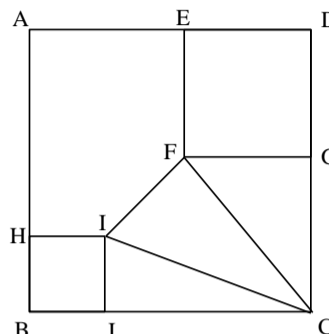
Nível γ - 1ª e 2ª SÉRIES - ENSINO MÉDIO

FOLHA DE PERGUNTAS

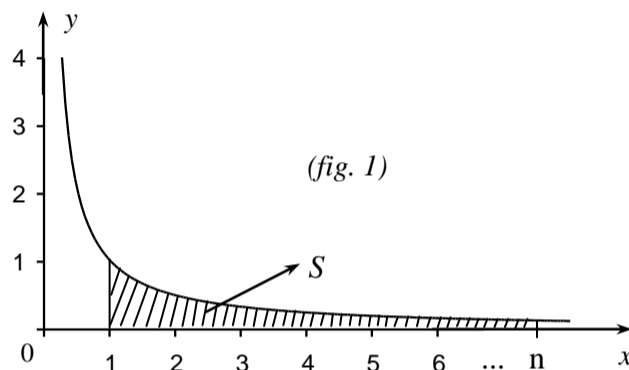
- Instruções:**
- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min. Cada questão vale 2,0 pontos.
 - No bloco de resoluções você deve colocar: *Nome completo, Nível, Escola (dizendo se é pública ou particular) e Cidade.*
 - Todas as respostas devem ser justificadas. Entregue apenas o bloco de resoluções e leve a folha de perguntas com você.
 - É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

Questão 1 – Na figura, ABCD, EFGD e HBJI são quadrados, de lados 5cm, 2cm e 1cm respectivamente.

- a) Mostre que os pontos I e F pertencem à diagonal \overline{BD} do quadrado ABCD.
 b) Calcule a área do triângulo CFI. Justifique sua resposta!



Questão 2 – Ao lado (fig. 1), temos o gráfico de $y = \frac{1}{x}$, para $x \in \mathbb{R}_+^*$. A área S da região hachurada sob o gráfico (fig. 1), compreendida entre $x = 1$ e $x = n$, é dada pelo logaritmo Neperiano de n , ou seja, $\ln n = \log_e n$ onde $e \cong 2,718282$.

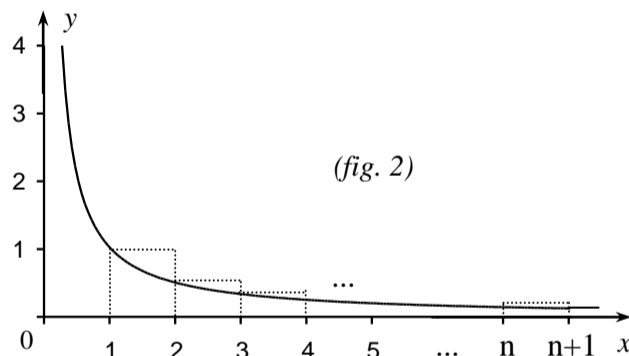


Pede-se:

- a) Calcule a área S_1 , sob o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ dado, compreendida entre $x = 1000$ e $x = 8000$. Dado: $\ln 2 \cong 0,69$
 b) Comparando a área sob o gráfico de $y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, com as áreas dos retângulos representados no gráfico ao lado (fig. 2), verificamos que

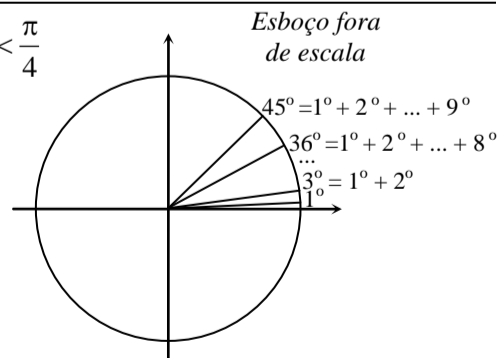
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1).$$

Prove que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$.



- Questão 3** – a) Escreva o termo geral do desenvolvimento de $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{13})^7$.
 b) Determine os termos racionais no desenvolvimento do binômio anterior.

Questão 4 – Observando a figura a seguir, mostre que: $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 9^\circ < \frac{\pi}{4}$



Questão 5 – Numa festa, há 100 garotas e alguns garotos. Cada garota conhece exatamente 4 garotos e 11 garotos conhecem 5 garotas cada, 16 garotos conhecem 4 garotas cada, 25 garotos conhecem 3 garotas cada, e os demais conhecem 2 garotas cada. Quantos garotos há na festa?