XXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

1999 - PROVA DA FASE FINAL

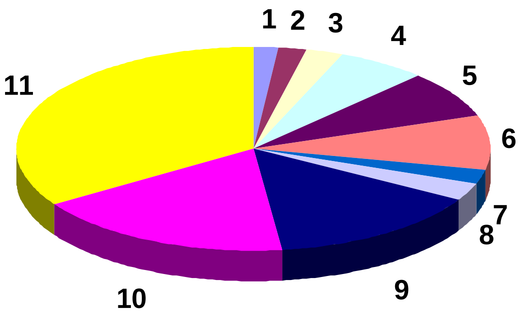
6ª SÉRIE - ENSINO FUNDAMENTAL

FOLHA DE PERGUNTAS

Instruções:

- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h 30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no bloco de resoluções.
- Todas as respostas devem ser justificadas e apresentadas no bloco de resoluções, nos espaços indicados.
- Entregue apenas o bloco de resoluções e leve esta folha de perguntas com você.
- É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

Questão 1 – A superfície da Terra tem uma área total de aproximadamente 510 milhões de quilômetros quadrados. O gráfico de setores abaixo mostra, em porcentagem, a área ocupada pelos continentes e oceanos.

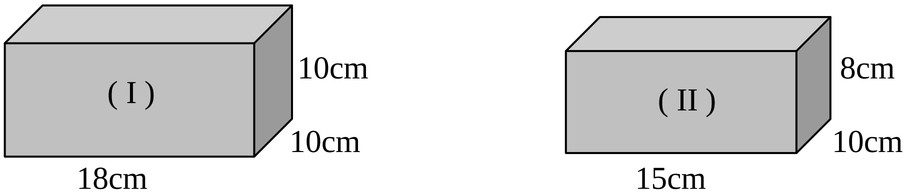


LEGENDA
1 – Oceania (1,8%)
2 – Europa (1,9%)
3 – Antártida (2,5%)
4 – África (5,9%)
5 – América (7,5%)
6 – Ásia (8,6%)
7 – Oceano Glacial Ártico (2,3%)
8 – Oceano Glacial Antártico (2,9%)
9 – Oceano Índico (14,7%)
10 – Oceano Atlântico (17,6%)
11 – Oceano Pacífico (34,3%)

a) Qual é a área do Oceano Atlântico?
b) Quanto mede, em graus, o ângulo do setor relativo à África?

Questão 2 – Um frasco do medicamento A tem 153 comprimidos e um frasco do B tem 192 comprimidos. José do Ença deve tomar 4 comprimidos por dia do medicamento A e 3 por dia do B, em dias alternados, iniciando pelo A, ou seja, ele tomará 4 comprimidos do A no primeiro dia, 3 do B no segundo, 4 do A no terceiro, etc.
a) Após quantos dias do início do tratamento terminará o primeiro frasco do medicamento B?
b) Um frasco destes medicamentos, tanto A quanto B, demora 2 dias para chegar à casa de José. A partir do início do tratamento, depois de quantos dias, no máximo, ele deverá solicitar um novo frasco de medicamento, para não correr o risco de ficar sem?

Questão 3 – Um fabricante deve embalar um volume de $2{,}16\text{m}^3$ de chocolate. Ele está em dúvida entre dois tipos de caixas de papelão, com tampas, ambas com a forma de um bloco de faces retangulares, como nas figuras a seguir.

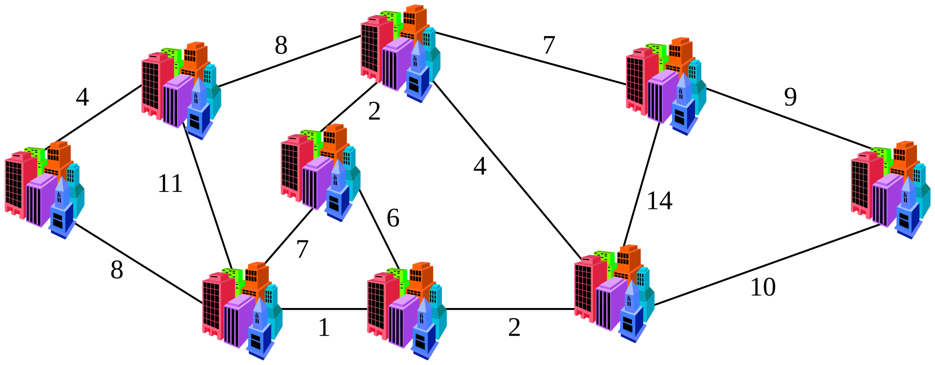


O custo de cada caixa é igual ao custo do papelão usado, acrescido de 50% (custos da cola, mão de obra, etc.).

a) Desenhe estas duas caixas, substituindo as medidas em centímetros por equivalentes em metros.
b) Calcule o volume, em metros cúbicos, de cada caixa.

c) Calcule o custo de cada caixa, sabendo que o valor de 1m^2 de papelão é R$ 10,00.
d) Será mais econômico utilizar caixas do tipo (I) ou (II) para embalar o chocolate? Quanto se pode economizar escolhendo a caixa correta?

Questão 4 - No reino da *Kruskalândia*, há estradas ligando as cidades, como mostra o mapa a seguir. Todas as estradas são de terra e por uma estrada pode-se transitar em ambos os sentidos. O comprimento de cada estrada, em quilômetros, está indicado, fora de escala, no mapa a seguir.



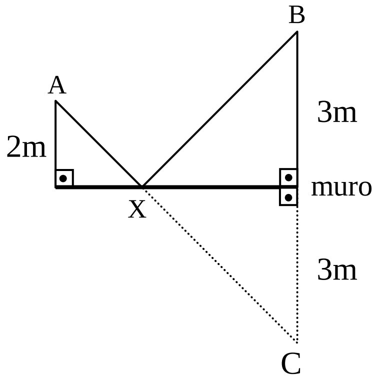
O rei da *Kruskalândia* resolveu pavimentar algumas estradas do reino de modo que, a partir de qualquer cidade, fosse possível atingir qualquer outra viajando somente por estradas pavimentadas. Como os cofres do reino andavam meio vazios, resolveu economizar o máximo possível. Chamou, então, o matemático da corte, que prontamente resolveu o problema. Agora é a sua vez.

a) Qual é o menor número de estradas que o rei precisa pavimentar?

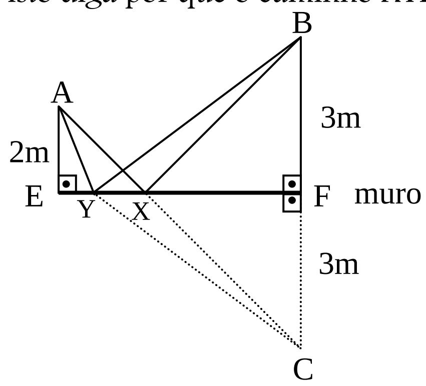
b) Qual é o menor número de quilômetros de estrada que ele precisa pavimentar? Indique, na folha de respostas, uma possível escolha de estradas para isto.

Questão 5 – O Papa-léguas está inicialmente no ponto A, a 2 metros de um muro. Ele quer ir até o ponto B, a 3 metros do muro, onde há uma árvore, para descansar sob sua sombra. Porém o Papa-léguas quer passar antes pelo muro, junto ao qual há alpiste espalhado.

O Papa-léguas é muito esperto e escolhe sempre o menor caminho: ele vai de A até o ponto X do muro, seguindo a direção da reta AC, onde C é um ponto à mesma distância que B do muro, só que do outro lado. Após comer o alpiste, ele segue em linha reta até B, chegando à árvore.



a) Justifique por que AXB é realmente o menor caminho.
Para isto diga por que o caminho AYB, desenhado a seguir, é maior que AXB.



b) Determine o ângulo agudo que a reta AX faz com o muro, sabendo que o comprimento EF do muro é 5m.

XXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

1999 - PROVA DA FASE FINAL

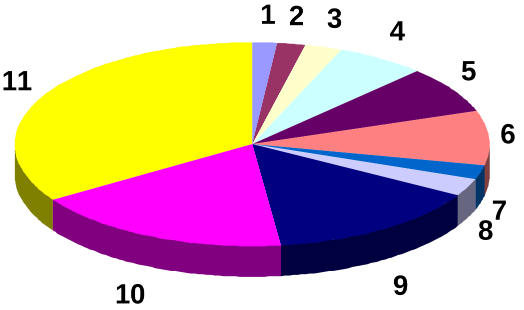
8ª SÉRIE - ENSINO FUNDAMENTAL

FOLHA DE PERGUNTAS

Instruções:

- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h 30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no bloco de resoluções.
- Todas as respostas devem ser justificadas e apresentadas no bloco de resoluções, nos espaços indicados.
- Entregue apenas o bloco de resoluções e leve esta folha de perguntas com você.
- É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

Questão 1 – A superfície da Terra tem uma área total de aproximadamente 510 milhões de quilômetros quadrados. O gráfico de setores abaixo mostra, em porcentagem, a área ocupada pelos continentes e oceanos.



LEGENDA
1 – Oceania (1,8%)
2 – Europa (1,9%)
3 – Antártida (2,5%)
4 – África (5,9%)
5 – América (7,5%)
6 – Ásia (8,6%)
7 – Oceano Glacial Ártico (2,3%)
8 – Oceano Glacial Antártico (2,9%)
9 – Oceano Índico (14,7%)
10 – Oceano Atlântico (17,6%)
11 – Oceano Pacífico (34,3%)

a) Qual é a área do Oceano Atlântico?
b) Quanto mede, em graus, o ângulo do setor relativo à África?
c) A área do Oceano Pacífico corresponde a que porcentagem da área dos oceanos?

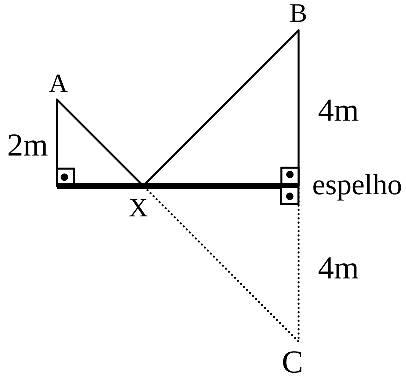
Questão 2 – Seja **n** um número inteiro estritamente maior do que 1. Considere a soma dos inversos dos inteiros **n – 1** e **n + 1.** Por exemplo, para n = 8,

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{16}{63}$$

Vemos que $16^2+63^2=65^2$, ou seja, o numerador e o denominador da fração obtida são as medidas dos catetos de um triângulo pitagórico (triângulo retângulo com lados inteiros).

a) Seguindo os passos acima, obteremos, para todo **n** inteiro maior do que 1, as medidas dos catetos de um triângulo pitagórico? Justifique.
b) Podemos obter as medidas dos catetos de todos os triângulos pitagóricos seguindo estes passos? Justifique.

Questão 3 – Um raio de luz fino é emitido por uma lanterna laser no ponto A, refletido por um espelho de 5m de comprimento no ponto X, e vai parar no ponto B de uma parede. Na figura ao lado, você tem uma vista superior (vista de cima) dessa situação. Os raios de luz sempre fazem o caminho mais curto. Por isso, o raio de luz caminha na direção da reta AC, sendo C o ponto simétrico de B (C é um ponto "dentro" do espelho), como na figura ao lado.



a) Mostre que AXB é o caminho mais curto de A até B, passando pelo espelho. (Sugestão: compare o caminho AXB com um outro caminho, digamos AYB, com Y também no espelho)
b) Determine a medida do caminho AXB, mostrado na figura ao lado.

Questão 4 – Dispõe-se de um tabuleiro como mostra a figura 1 a seguir. Uma peça está inicialmente na casinha A. Cada movimento da peça pode ser um dos mostrados na figura 2.

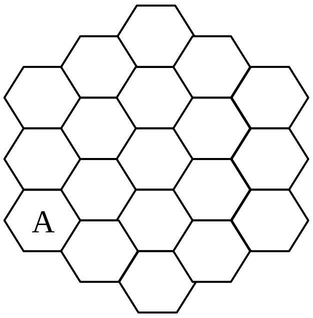


figura 1

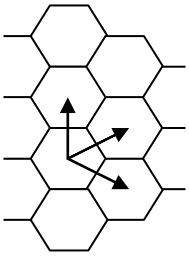
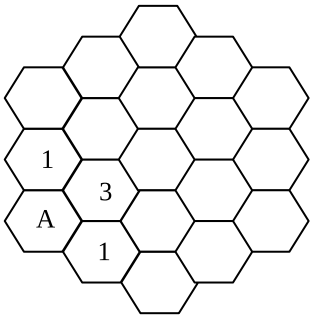
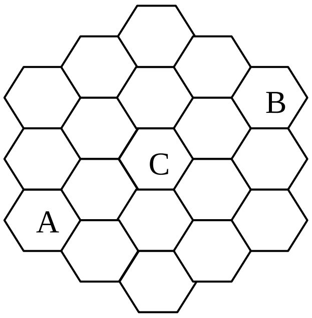


figura 2

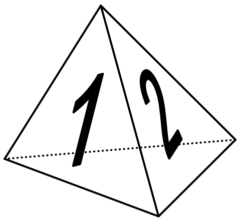
a) Copie o tabuleiro abaixo na folha de respostas e anote o número de maneiras de se mover a peça a partir de A até cada uma das demais casinhas. Alguns valores já foram preenchidos para você.



b) No seguinte tabuleiro, de quantas maneiras a peça pode ir de A até B **sem** passar por C?



Questão 5 – Num jogo, pontos são ganhos somando-se os valores obtidos ao se jogarem dois dados em forma de tetraedro regular, cujas faces são numeradas 1, 2, 3 e 4. O valor obtido é aquele que está na face voltada para baixo. Observe a figura a seguir.



a) Desenvolva: $\left(x^1+x^2+x^3+x^4\right)\left(x^1+x^2+x^3+x^4\right)$

b) Mostre que o número de maneiras de se obter **n** pontos utilizando estes dados é igual ao coeficiente de x^n no desenvolvimento de $\left(x^1+x^2+x^3+x^4\right)\left(x^1+x^2+x^3+x^4\right)$. Por exemplo, o coeficiente de x^6 é 3 e há três maneiras distintas de se obter 6 pontos: $2+4; 3+3$ e $4+2$.

c) Por defeito de fabricação, um jogo veio com um dado numerado 1, 2, 2 e 3 e o outro, 1, 3, 3 e 5. Ao receber o jogo para substituição, o dono da fábrica, que era matemático, argumentou que o jogo não mudaria mesmo utilizando os dados defeituosos, isto é, que o número de maneiras de se obter **n** pontos, $2 \le n \le 8$, com os dados defeituosos e com os dados normais era o mesmo. Ele tinha razão? Explique.

XXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

1999 - PROVA DA FASE FINAL

2ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO

FOLHA DE PERGUNTAS

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h 30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h 30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no bloco de resoluções.
- Todas as respostas devem ser justificadas e apresentadas no bloco de resoluções, nos espaços indicados.
- Entregue apenas o bloco de resoluções e leve esta folha de perguntas com você.
- É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

Questão 1 – Considere a seguinte afirmação sobre o crescimento populacional da Terra:

"Após períodos de mesma duração, a população da Terra fica multiplicada pelo mesmo fator".

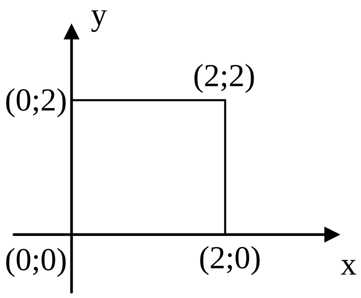
a) Sabendo-se que essa população era de 2,5 bilhões em 1950 e de 5,0 bilhões em 1987, e supondo que a afirmação dada esteja correta, mostre que a população mundial estimada, decorridos x anos após 1987, é $5 \cdot 2^{x/37}$ bilhões de habitantes.
b) Diga em que ano a população da Terra atingiria 6,0 bilhões de habitantes. (Adote $\log 2 \cong 0{,}30$ e $\log 3 \cong 0{,}48$)

Questão 2 – Considere a função T que leva o ponto $(x; y)$ no ponto $(2x + 3y; -x + 2y)$, por exemplo, o ponto $(1;-2)$ é levado no ponto $(2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2); -1 + 2 \cdot (-2)) = (-4; -5)$

Podemos apresentar esta função por um produto de matrizes

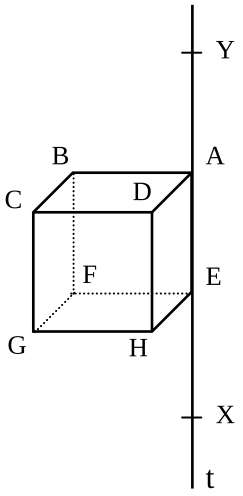
$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -x + 2y \end{pmatrix} \text{ onde A é uma matriz } 2 \times 2.$$

a) Determine a matriz A e calcule seu determinante.
b) Aplicando T aos vértices do quadrado a seguir, obtemos os vértices de um quadrilátero. Desenhe-o, indicando seus vértices.



c) Verifique que, no item anterior, a área do quadrilátero obtido é igual a $|\det A|$ vezes a área do quadrado.

Questão 3 – Uma reta t contém a aresta AE, do cubo ABCDEFGH, cujas arestas medem ***a*** cm.



Sejam X um ponto da reta t, diferente de A, distando ***a*** cm de E, e seja Y um ponto da reta t, diferente de E, distando ***a*** cm de A.

a) Determine a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos de intersecção das arestas YE, YF, YG e YH com a face ABCD e a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos de intersecção das arestas YE, YF, YG e YH com o plano que passa pelo centro do cubo e é paralelo à face ABCD

b) Considere o sólido obtido da intersecção das pirâmides YEFGH e XABCD.

i) Faça um esboço deste sólido.

ii) Calcule o volume deste sólido em função de ***a***.

Questão 4 - Em *Terra Brasilis* ocorre um importante campeonato de futebol envolvendo 22 clubes.
Cada equipe enfrenta uma vez cada uma das demais, recebendo

- 5 pontos por vitória quando esta for por diferença superior a dois gols;
- 3 pontos por vitória quando esta for por diferença de um ou dois gols;
- 1 ponto por empate;
- 0 ponto por derrota.

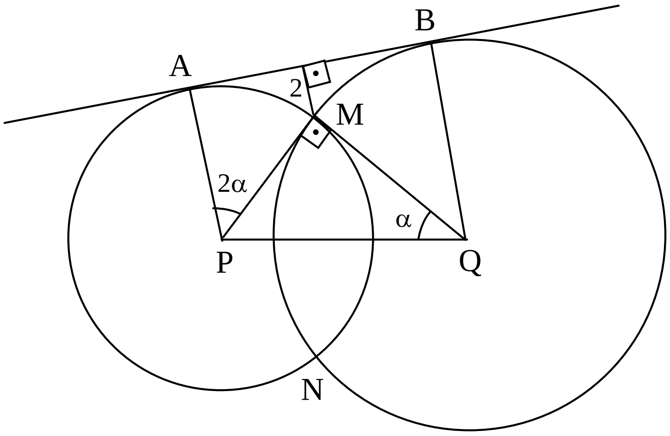
a) De quantas maneiras distintas uma equipe pode pontuar em seus 21 jogos?
Observação: obter 1 ponto na primeira partida e 5 na segunda e obter 5 pontos na primeira partida e 1 na segunda são maneiras distintas de se pontuar nas duas primeiras partidas.

b) Mostre que o número de maneiras distintas de, ao final do campeonato, uma equipe totalizar k pontos, $k \in \mathbb{N}$, é igual ao coeficiente de x^k no desenvolvimento de $\left(x^0 + x^1 + x^3 + x^5\right)^{21}$.

c) Calcule a diferença entre o total de maneiras de um clube obter um número par de pontos e o total de maneiras de obter um número ímpar de pontos.

d) Encontre o total de maneiras de um clube obter um número ímpar de pontos.

Questão 5 – Duas circunferências, de centros P e Q, interceptam-se nos pontos M e N, de modo que MP e MQ sejam perpendiculares. Uma reta tangencia as duas circunferências nos pontos A e B, respectivamente, como mostra a figura a seguir.



Sabe-se que a distância de M à reta AB é 2, e que o ângulo $A\hat{P}M$ tem medida igual ao dobro da medida do ângulo $P\hat{Q}M$, que é igual a α.

a) Mostre que as circunferências têm raios $\dfrac{2}{1-\cos 2\alpha}$ e $\dfrac{2}{1-\operatorname{sen} 2\alpha}$, respectivamente.

b) Determine o valor de $\operatorname{tg}\alpha$.

c) Calcule a medida de PQ.

* Você pode querer utilizar o fato de que $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$ e $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$