XXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

1999 - PROVA DA PRIMEIRA FASE

6ª SÉRIE - ENSINO FUNDAMENTAL

Instruções:
- A duração da prova é de 3 horas.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Na folha de respostas você deve colocar: **Nome completo**
Escola (dizendo se é pública ou particular)
Cidade
Nome do Professor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.
- Não resolva as questões nesta folha.
- É permitido o uso de calculadora.

Questão 1 - Três meninas foram à feira vender peixinhos. Alzira vendeu 50, Bia, 30 e Carla, 10. Os preços praticados foram de dois tipos:

- 7 peixinhos por 1 real ou
- 1 peixinho por 3 reais.

a) Faça, apenas para Carla, uma descrição de todas as possibilidades de se fazer a venda nas condições dadas, indicando quanto ela arrecadou em cada caso.

b) Determine todas as possibilidade de venda, nas quais as três arrecadem uma mesma quantia.

Questão 2 - Os pesquisadores da Escola Nacional de Estatísticas revelaram em sua última pesquisa alguns dados sobre a população de Brasilópolis. Veja as tabelas abaixo:

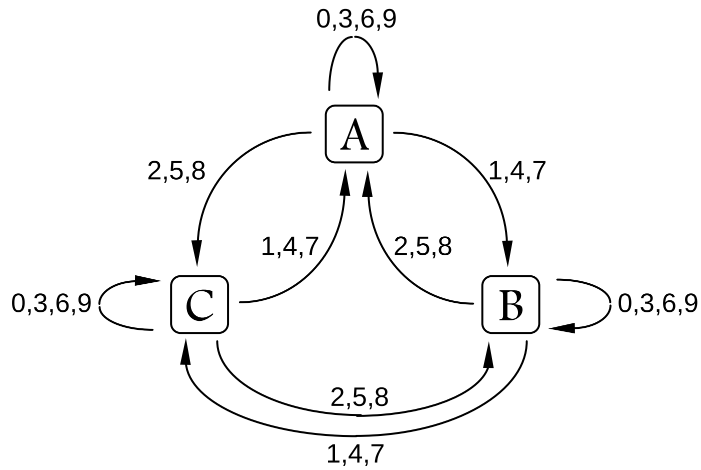
Números aproximados	
Moradores	150000
Casas	40000
Bairros	30

Dados sobre a População
74% são naturais de Brasilópolis
12% são analfabetos
62% trabalham

Dados sobre a População Trabalhadora
19% trabalham por conta própria
67% trabalham em alguma empresa
13% trabalham com atividades domésticas

a) Quantas pessoas trabalham por conta própria?
b) Qual é a média de pessoas alfabetizadas por casa?
c) Se 10% dos analfabetos trabalham por conta própria, quantos destes são alfabetizados?

Questão 3 - Um robô se desloca entre os pontos A, B e C, partindo sempre de A. Seu caminho é determinado por um código formado pelos algarismos de 0 a 9. O caminho a ser seguido depende da interpretação dos códigos no esquema abaixo.



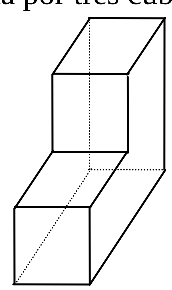
Por exemplo, se o código for 140, o robô se desloca de A para B, depois de B para C e, finalmente, de C para C mesmo. Sua trajetória é ABCC.

a) Complete a tabela abaixo, indicando em qual ponto o robô pára após se deslocar de acordo com o código dado.

Código	1998	1999	2000	2001	2002
Ponto de parada					

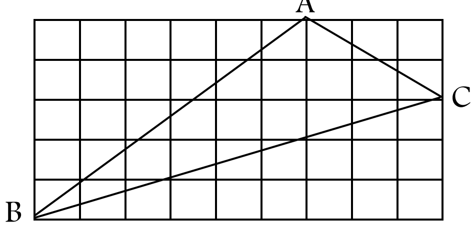
b) Ao digitar os algarismos do resultado de $\left(3^{1999} - 1\right)$, em qual ponto o robô pára?

Questão 4 - Observe a peça abaixo. Ela é formada por três cubos cujas arestas medem 2cm.



a) Pode-se compor um paralelepípedo (ou bloco retangular) com comprimento de 12cm, largura de 8cm e altura de 2cm, usando várias peças como a que é mostrada na figura. Indique claramente como se faz.
b) É impossível com peças desse tipo compor um paralelepípedo (ou bloco retangular) com 10cm de comprimento, 8cm de largura e 4cm de altura. Explique porque é impossível.

Questão 5 - Abaixo temos uma malha quadriculada cujos quadradinhos têm 3cm^2 de área. Determine a área do triângulo ABC. Justifique sua resposta.



XXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

1999 - PROVA DA PRIMEIRA FASE

8ª SÉRIE - ENSINO FUNDAMENTAL

Instruções:
- A duração da prova é de 3 horas.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Na folha de respostas você deve colocar: **Nome completo**
  Escola (dizendo se é pública ou particular)
  Cidade
  Nome do Professor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.
- Não resolva as questões nesta folha.
- É permitido o uso de calculadora.

Questão 1 - a) Determine as raízes reais da equação: $x = \dfrac{2x^2 + 4}{4x - 1}$

b) Vamos agora mostrar um método para calcular uma aproximação do valor das raízes da equação acima.
Em primeiro lugar, escolhemos uma primeira aproximação x_0 para uma raiz. A aproximação seguinte é $x_1 = \dfrac{2{x_0}^2 + 4}{4x_0 - 1}$. Agora, utilizando esta segunda aproximação, calculamos a terceira, $x_2 = \dfrac{2{x_1}^2 + 4}{4x_1 - 1}$, e assim por diante. Por exemplo, se $x_0 = 0$ então temos $x_1 = \dfrac{2 \cdot 0^2 + 4}{4 \cdot 0 - 1} = -4$, $x_2 = \dfrac{2 \cdot (-4)^2 + 4}{4 \cdot (-4) - 1} = -\dfrac{36}{17} \cong -2{,}12$, etc.

Ao completar a tabela a seguir, utilizando sempre duas casas decimais, e comparando o valor x_4 com os valores obtidos no item a), você verá que encontrou uma aproximação para um deles. Qual?

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	– 4	– 2,12		

c) Se agora começarmos com $x_0 = 1$, obteremos uma aproximação da outra raiz?

Questão 2 - Na tabela abaixo relacionamos os dados de uma pesquisa sobre o hábito de leitura anual de um grupo de jovens. Veja os dados obtidos:

Número de leitores	12	17	14	33	16	54	27	9	18
Número de livros lidos	0	1	2	3	4	5	6	7	8

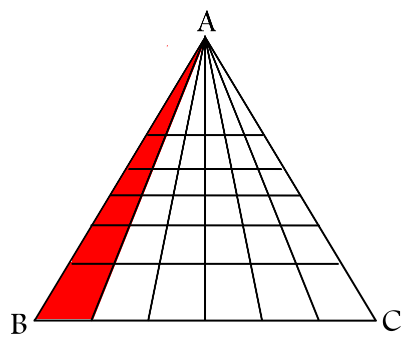
Com base nestes dados gostaríamos de dividi-los em 4 categorias:
- "D" composta pelos leitores que leram até 2 livros;
- "C" composta pelos leitores que leram de 3 a 4 livros;
- "B" composta pelos leitores que leram de 5 a 6 livros;
- "A" composta pelos demais leitores.

Pede-se:
a) Quantos por cento do total de jovens pertencem a cada categoria?
b) Faça um gráfico de setores (tipo "pizza") representando as categorias A, B, C e D citadas acima.
c) Determine a média de livros lidos nesse grupo de jovens. Justifique sua resposta.
d) As pessoas que leram estritamente menos que dois livros abaixo da média ganharam dois livros de presente para estimular este hábito. Quantos livros foram distribuídos como prêmio? Justifique sua resposta.

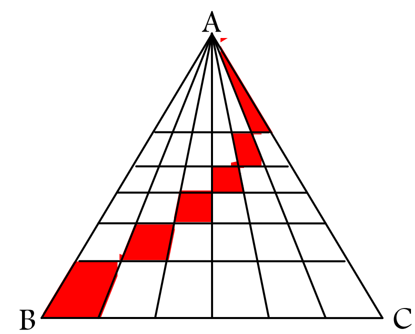
Questão 3 - Considere um número decimal escrito na forma X,Y (sendo X e Y algarismos). Determine esse número sabendo que ele é igual a $\frac{3}{10}(X+Y)$. Justifique sua resposta.

Questão 4 - Um triângulo eqüilátero ABC de lado 6cm teve sua base $\overline{BC}$ dividida em 6 partes iguais, como nas figuras a seguir. Todos os segmentos horizontais são paralelos à base $\overline{BC}$.

a) Determine a área da região pintada. Justifique sua resposta.

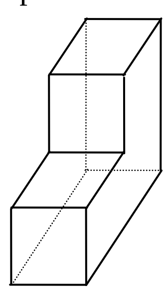


b) Determine a soma das áreas das regiões pintadas. Justifique sua resposta.



Obs.: Você pode querer utilizar o fato de que a área do triângulo eqüilátero de lado a é $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Questão 5 - Observe a peça abaixo. Ela é formada por três cubos cujas arestas medem 2cm.



a) Pode-se compor um paralelepípedo (ou bloco retangular) com comprimento de 12cm, largura de 8cm e altura de 2cm, usando várias peças como a que é mostrada na figura. Indique claramente como se faz.

b) Pode-se compor um cubo de aresta 6cm usando várias peças como a que é mostrada na figura. Indique claramente como se faz.

XXIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

1999 - PROVA DA PRIMEIRA FASE

2ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO

Instruções:
- A duração da prova é de 3 horas.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Na folha de respostas você deve colocar: **Nome completo**
Escola (dizendo se é pública ou particular)
Cidade
Nome do Professor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.
- Não resolva as questões nesta folha.
- É permitido o uso de calculadora.

Questão 1 - Resolva as seguintes equações no universo $[0;2\pi]$:

a) $\operatorname{sen} x = \cos x$

b) $\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x = 0$

Questão 2 - Considere um jogo envolvendo duas pessoas no qual, alternadamente, elas escolhem um número natural entre 1 e 9 (inclusive), que não tenha sido escolhido anteriormente. Vence o jogador que obtiver primeiro três números cuja soma seja 15.

a) O primeiro jogador, para não se perder durante o jogo, anota as jogadas em um tabuleiro 3x3, preenchido com os números de 1 a 9, em que as somas em cada linha, coluna e diagonal sejam sempre iguais a 15.
Desenhe um tabuleiro satisfazendo estas condições.

b) Se o primeiro jogador escolher 5 e o segundo, 3, há alguma maneira de o primeiro jogador assegurar a vitória? Se sim, como ele deve proceder?

Questão 3 - No número 5 da revista EUREKA, à página 6, veio a seguinte nota:

> O maior número primo conhecido é $2^{6972593} - 1$, que tem 2.098.960 dígitos e foi descoberto em 01/06/1999 por Nayan Hafratwala, um participante do GIMPS, um projeto cooperativo para procurar primos de Mersenne. Consulte na Internet a página http://www.mersenne.org/prime.htm

a) Mostre que se um número inteiro positivo N tem k algarismos, então $k - 1 \le \log N < k$.

b) A partir das informações anteriores, determine um valor aproximado de $\log 2$. (Apresente sua resposta com cinco casas decimais depois da vírgula.)

Questão 4 - Definimos, para z real e k inteiro positivo, $\binom{z}{k} = \dfrac{z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot \ldots \cdot (z-k+1)}{k!}$.

a) Determine $\binom{\frac{1}{2}}{1}$ e $\binom{\frac{1}{2}}{2}$.

b) Sendo $P(x) = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2$, determine $(P(x))^2$.

c) Para $-1 < x < 1$, P(x) é aproximadamente igual a $\sqrt{1+x}$. Utilize este fato para calcular uma aproximação de $\sqrt{13}$.

Questão 5 - a) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, ..., 9 e dois sinais de multiplicação (x), quantas expressões aritméticas podemos formar? (Atenção: 1 x 2345678 x 9 é uma expressão aritmética, mas 1 xx 23456789 não!)

b) Quantas das expressões aritméticas obtidas no item a) têm como resultado um número ímpar?