XLVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (setembro de 2023)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Gabaritos e Critérios

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos
Solução.

a) Considerando 24 anos e 365 dias por ano temos aproximadamente $\frac{24\cdot 365}{7} \approx 1251$ semanas. Então o percentual aproximado de semanas com episódios novos foi de $\frac{1075}{1251} \approx 0{,}859 \approx 86\%$.

b) Cada dia tem $24 \cdot 60 = 1440$ minutos. Assim, seriam necessários $\frac{1075\cdot 24}{1440} \approx 17{,}9$ dias. São aproximadamente 18 dias.

c) Primeiro vejamos quanto tempo essa pessoa por assistir anime por dia. De segunda a sexta essa pessoa tem $24 - 8 - 3 - 8 = 5$ horas para assistir anime. No sábado e no domingo $24 - 8 - 3 = 13$ horas já que ela não tem o horário de trabalho. Dessa forma, por semana a pessoa tem $5 \cdot 5 \cdot 60 + 2 \cdot 13 \cdot 60 = 3060$ minutos para assistir anime. Para assistir todos os episódios essa pessoa levaria $\frac{1075\cdot(24-4)}{3060} \approx 7{,}03$ semanas que podemos aproximar para 50 dias.

Critérios

Item a: 0,5 ponto (considerar aproximações)

Achar que há aproximadamente 1251 semanas em 24 semanas ....0,2 ponto

Concluir que em 86% é o percentual das semanas com episódios novos (valores entre 82 e 90 devem ser aceitos)......... 0,3 ponto

Item b: 0,5 ponto (considerar aproximações)

Achar que há 1440 minutos por dia.. ....0,2 ponto

Achar que o valor de aproximadamente 18 dias (valores entre 17 e 19 devem ser aceitos)................................. .... 0,3 ponto

Item c: 1 ponto (considerar aproximações)

Achar que a pessoa tem 5 horas para assistir anime de segunda a sexta............. .... 0,2 ponto

Achar que a pessoa tem 13 horas para assistir anime no sábado e domingo........ .... 0,2 ponto

Achar que a pessoa tem 3060 minutos por semana para assistir anime................................ .... 0,3 ponto

Concluir que levaria aproximadamente 50 dias para assistir tudo (valores entre 45 e 55 devem ser aceitos).................... 0,3 ponto

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos
Solução.

a) O número $10^n - 1$ é formado por n dígitos 9 e é 9 vezes o número formado por n dígitos 1. Logo, $10^n - 1$ é divisível por 9. Representando isto com equações temos $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots 99}_{n\ dígitos} = 9 \cdot \underbrace{11\ldots 11}_{n\ dígitos}$.

b) Seja $N = d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1 d_0 = d_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots + d_1 \cdot 10^1 + d_0 \cdot 10^0$ um número de n dígitos. Ao fazer N menos a soma dos dígitos de N podemos agrupar da d_i e obter $N - soma\ dos\ dígitos\ de\ N = (d_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots + d_1 \cdot 10^1 + d_0 \cdot 10^0) - (d_{n-1} + \cdots + d_1 + d_0) = d_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + d_1(10^1 - 1)$. Cada $10^k - 1$ é divisível por 9, então $N - soma\ dos\ dígitos\ de\ N$ é divisível por 9.

c) Suponha que 0 não aparece na representação de 2^{29}. Nesse caso, os dígitos seriam de 1 a 9 em alguma ordem. O resto de 2^{29} por 9 seria o mesmo que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ por 9. Isso implicaria que 2^{29} seria um múltiplo de 9. Porém, 2^{29} não possui fatores primos 3 e não é múltiplo de 9. Contradição. Isso nos permite concluir que 2^{29} possui algarismo 0 em sua representação decimal.

Critérios

Item a: 0,8 ponto

Escrever que $10^n - 1$ possui n dígitos 9...0,4 ponto

Concluir que o número é 9 vezes o número com n dígitos 1 e, portanto $9|10^n - 1$......0,4 ponto

Item b: 1,1 ponto

Separar o número na soma de seus dígitos vezes uma potência de 10......................... 0,3 ponto

Fatorar o resultado como soma de termos da forma $d_i(10^i - 1)$................................ 0,4 ponto

Usar o item a para notar cada termo divisível por 9, assim como a soma deles.............0,4 ponto

Item c: 1,1 ponto

Notar que sem o dígito 0 os dígitos seriam de 1 até 9.. 0,4 ponto

Mostrar que 9 divide a $1 + 2 + \cdots + 9$ e dividiria um número com tais dígitos............ 0,4 ponto

Concluir por contradição com o fato de 9 não dividir 2^{29}.. 0,3 ponto

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Solução.

a) *Resposta:* 6.

Alyson pode receber um de três objetos, Penn pode receber um dos outros dois objetos e Teller recebe o objeto que sobrou. Há, então, $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades.

b) *Resposta:* 2.

Nenhuma pessoa pode vencer as outras duas e nem joga contra si mesma. Além disso, não é possível que A vença B e B vença A. Assim, há duas possibilidades para a primeira lacuna: Penn ou Teller. Se for Penn, o único que vence Alyson é Teller. Logo Alyson vence Penn; Teller vence Alyson. Teller não vence Penn também, logo Penn vence Teller, e a frase é

P1: Alyson vence Penn; Teller vence Alyson; e Penn vence Teller.

Se a primeira lacuna é Teller, o único que vence Alyson é Penn, e da mesma forma, Teller vence Penn. A frase é

P2: Alyson vence Teller; Penn vence Alyson; e Teller vence Penn.

Deste modo, só há duas possíveis previsões.

c) Quando trocamos objetos, as pessoas envolvidas nos dois objetos trocam de status (o vencedor e o perdedor trocam de lugar). Isso faz com que todos os confrontos troquem de status também, ou seja, mudamos de uma previsão para a outra.

d) Hans vê os objetos distribuídos inicialmente e vê qual é a previsão correspondente (no nosso caso, é P1). Após uma troca, independente de quem forem os envolvidos, muda-se de P1 para P2, e a primeira previsão dele (que é só uma parte de P1) está correta. Após duas trocas, vamos e voltamos para a mesma previsão; no nosso exemplo, voltamos para P2; isso dá a segunda previsão de Hans (que é uma parte de P2 – exatamente o que ele não falou na primeira previsão, para evitar se repetir, e aumentar, ainda que artificialmente, a quantidade de confrontos corretos). Após três trocas, mudamos três vezes, ou seja, terminamos em P1, que é exatamente a terceira previsão.

O truque com o papel amassado no final só dá certo porque as três pessoas envolvidas pegaram os objetos de modo coerente com P1 – isso deve ter sido instruído por Hans antes de começar o truque.

e) Sim. Como a quantidade de trocas é ímpar nos dois truques, o resultado é o mesmo.

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Concluir com o princípio multiplicativo que há 6 possibilidades.................................. 0,4 ponto

Item b: 0,8 ponto

Concluir que os três jogadores formarão um ciclo em relação a vitória........................ 0,5 ponto

Utilizar essa observação para notar que existem duas possibilidades........................... 0,3 ponto

Item c: 0,4 ponto

Notar que, ao trocar os objetos trocamos o ciclo e mudamos a previsão..................... 0,4 ponto

Item d: 1 ponto

Escrever que o mágico possui acesso ao estágio Inicial e após uma troca o estado é revertido, como provado no item c, devendo o mágico escolher P2 se ele vê P1 e vice-versa... 0,2 ponto

Notar que após duas trocas temos o mesmo estado (pelo item c aplicado duas vezes) e o mágico deve usar a mesma previsão... 0,4 ponto

Notar que após três trocas temos o estado trocado (aplicando c três vezes) e devemos usar a previsão contrária a usada anteriormente (no caso, P1) .... 0,4 ponto

Item e: 0,4 ponto

Notar que o resultado só depende da paridade do número que inversões de estado são realizadas e que portanto a previsão é a mesma... 0,4 ponto

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos
Solução.
a) Como $ABA'B'$ e $CDC'D'$ são paralelogramos, podemos concluir que $A'B = AB' = CD = D'C'$ e que $B'A' = AB = CD' = D'C$. Para provar a igualdade de ângulos, defina o ponto P como a interseção das retas $A'B$ e CD e o ponto Q como a interseção das retas AB e CD'. Pelas perpendicularidades dadas no enunciado, os triângulos BCP e BCQ são retângulos em P e Q, respectivamente. Agora veja que $\angle ABA' = 180° - \angle ABP = 180° - (\angle ABC - \angle PBC)$, mas sabemos que $\angle PBC = 90° - \angle PCB$, substituindo obtemos $\angle ABA' = 270° - \angle ABC - \angle DCB$. De modo semelhante, $\angle DC'D' = \angle DCD' = 180° - \angle DCQ$, sendo que $\angle DCQ = \angle DCB + \angle BCQ$ e $\angle BCQ = 90° - \angle CBQ = 90° - (180° - \angle ABC) = \angle ABC - 90°$, finalmente substituindo temos que $\angle DC'D' = 270° - \angle DCB - \angle ABC = \angle ABA'$. Utilizando essa igualdade, $\angle BA'B' = \angle C'D'C$ segue de que os ângulos adjacentes de um paralelogramo são suplementares.

b) A reta AB' corta o lado CD num ponto R. No triângulo retângulo RDA temos $\angle RDA = 90° - \angle RAD$. Por outro lado, usando o ângulo $\angle B'AR = 180°$ temos$\angle D_1AB' = 180° - 90° - \angle RAD = \angle RDA$. Vale lembrar que $\angle ADC = \angle RDA$.

c) Veja que $XA = XD$ pois X é o centro do quadrado, $AY = DW$ pois $ABA'B'$ e $DC'D'C$ são congruentes e Y e W são seus centros, $\angle XAY = 45° + \angle D_1AB' + \angle B'AY = 45° + \angle ADC + \angle CDW = \angle XDW$ pela congruência e pela igualdade do item anterior. Segue que os triângulos são congruentes por L.A.L.

d) Temos que $\angle WXY = \angle DXA - \angle DXW + \angle AXY = 90°$ utilizando a igualdade de ângulos dada pela congruência.

e) Pelo item c), $XY = XW$, e pelo item d), $\angle WXY = 90°$. Segue que o triângulo WXY é retângulo isósceles em X. Do mesmo modo, o triângulo ZWY é retângulo isósceles em Z. Como esses triângulos têm os mesmos ângulos e o lado YW em comum, eles são congruentes. Logo $XW = XY = ZW = ZY$. Assim $XYZW$ é um losango, e como ele possui um ângulo de 90°, deve ser um quadrado.

Critérios

Item a: 0,8 ponto

Usar os paralelogramos para provar que $A'B = D'C'$ e $A'B' = D'C$ .... 0,2 ponto cada

Definir um dos pontos que de interseção dos prolongamentos dos lados de um paralelogramo com os prolongamentos dos lados do paralelogramo oposto (como P e Q por exemplo) .... 0,2 ponto

Provar que $\angle DC'D' = ABA'$e $\angle BA'B' = \angle C'D'C$ .... 0,1 ponto cada

Item b: 0,4 ponto

Marcar a interseção das retas AB' e CD (na solução ponto R) .... 0,2 ponto

Concluir que $\angle RDA = 90° - \angle RAD = \angle D_1AB'$ .... +0,2 ponto

Item c: 0,6 ponto

Provar que $XA = XD$ e $YA = WD$ .... 0,2 ponto cada

Provar que $\angle XAY = \angle XDW$ e concluir com o caso de congruências LAL .... +0,2 ponto

Item d: 0,4 ponto

A partir da congruência afirmar que $\angle DXW = \angle AXY$ .... 0,2 ponto

Provar que $\angle WXY = 90°$ .... +0,2 ponto

Item e: 0,8 ponto

Afirmar que $WX = XY$ pela congruência .... 0,2 ponto

Afirmar que $XZ = XY$, analogamente .... 0,2 ponto

Notar que $\angle WXY = \angle WZY = 90°$ .... 0,2 ponto

Afirmar que ΔWXY e ΔWZY são congruentes por ALA e concluir que $XYZW$ é um quadrado .... +0,2 ponto

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

a) No 1º minuto tivemos a seguinte mudança $(1000;\ 0) \rightarrow (910;\ 90)$. No 2º minuto teremos:

$$(910;\ 90) \xrightarrow[\textbf{A para B}]{} (910 - 10\% \cdot 910;\ 90 + \ 10\% \cdot 910) = (819;\ 181)$$

$$(819;\ 181) \xrightarrow[\textbf{B para A}]{} (819 + 10\% \cdot 181;\ 181 - 10\% \cdot 181) = (837{,}1;\ 162{,}9)$$

Portanto, $(910;\ 90) \rightarrow (837{,}1;\ 162{,}9)$

b) Temos que:

$$(a;\ b) \xrightarrow{\textbf{A para B}} (a - 10\% \cdot a;\ b + \ 10\% \cdot a) = (90\% \cdot a;\ b + 10\% \cdot a)$$

$$(90\% \cdot a;\ b + 10\% \cdot a) \xrightarrow{\textbf{B para A}} (90\% \cdot a + 10\% \cdot (b + 10\% \cdot a);\ 90\% \cdot (b + 10\% \cdot a))$$

$$= (91\% \cdot a + 10\% \cdot b;\ 90\% \cdot b + 9\% \cdot a)$$

portanto $(a;\ b) \rightarrow (91\%a + 10\%b;\ 90\%b + 9\%a)$ ou $(0{,}91a + 0{,}1b, 0{,}9b + 0{,}09a)$.

c) Pelo item b temos $9(91\%a + 10\%b) - 10(90\%b + 9\%a) = 729\%a - 810\%b = 81\%\,(9a - 10b) = 81\% \cdot x$ ou $0{,}81 \cdot x$.

d) Sendo a condição inicial $(a; b)$ ao definirmos $x_k = 9a_k - 10b_k$, onde a_k e b_k são respectivamente as quantidades das jarras A e B depois de k minutos, temos que $x_k = (81\%)^k \cdot (9a - 10b)$. Disso temos que para valores muito grandes de k, teremos que o fator $(81\%)^k$ tende a zero, portanto a expressão $x_k = 9a_k - 10b_k$ tende a zero.

e) Se os valores se aproximam de (a, b), então temos $9a - 10b = 0$. Sabemos também que $a + b = 1000$, pois a quantidade total de suco não muda. Da primeira equação temos $b = \frac{9a}{10}$ e substituindo na outra temos $a + \frac{9a}{10} = 1000 \Leftrightarrow a = \frac{10000}{19}$ e $a \approx 526{,}3$ mililitros. Dessa forma, $b = 1000 - a \approx 473{,}7$ mililitros.

Critérios

Item a: 0,8 ponto

Passou 10% de A para B e chegou em $(819{,}181)$ .... 0,4 ponto

Passou 10% de B para A e chegou em $(837{,}1, 162{,}9)$ .... 0,4 ponto

Caso o aluno dê apenas o resultado final $(837{,}1, 162{,}9)$ *sem o intermediário ou expressão, ele deve receber apenas 0,4 neste item.*

Item b: 0,8 ponto

Passar 10% de A para B e chegar em $(90\% \cdot a;\ b + 10\% \cdot a)$ ou equivalente .... 0,4 ponto

Passar 10% de B para A e chegar em $(91\%a + 10\%b;\ 90\%b + 9\%a)$ ou equivalente .... +0,4 ponto

Item c: 0,8 ponto

Escrever expressão $9(91\%a + 10\%b) - 10(90\%b + 9\%a)$ ou equivalente........ 0,4 ponto

Concluir que o novo valor é $0{,}81 \cdot x$ .... +0,4 ponto

Item d: 0,8 ponto

Usar o item anterior para afirmar que vai multiplicando por 81% .... 0,4 ponto

Afirmar que vai diminuindo (sem dizer que se aproxima de zero) .... +0,2 ponto

Afirmar que $9a - 10b$ se aproxima de zero .... +0,2 ponto

Item e: 0,8 ponto

Escrever $a + b = 1000$ .... 0,2 ponto

Escrever $9a - 10b = 0$ .... 0,2 ponto

Encontrar os valores de a e b........ +0,4 ponto

PROBLEMA 6 – $\boxed{\text{Valor: 4 pontos}}$

Solução.

a) Vamos usar quadradinho (C, L) para indicar o quadradinho na coluna C e linha L.

Veja que se tiver uma peça horizontal na linha y com $2 \leq y \leq 4$, então essa peça cobre os quadradinhos $(2, y), (3, y)$ e $(4, y)$. E se tiver uma peça vertical na coluna x com $2 \leq x \leq 4$, então pega os quadradinhos $(x, 2)$, $(x, 3)$ e $(x, 4)$. O quadradinho (x, y) seria cobertos duas vezes contrariando a condição de que cada quadradinho é coberto por exatamente uma pecinha.

Há outras formas diferentes de argumentar, mas o aluno deve deixar claro as duas peças cobririam um mesmo quadradinho.

b) Se alguma peça vertical estiver nas colunas 2, 3 ou 4, então $h \leq 1$, pois só teria peça horizontal na linha 1 ou na linha 5 (naquela que a peça vertical não pegar quadradinho). As peças verticais só podemos estar nas colunas 1 e 5 e $v = 2$. Analogamente, as peças horizontais estão nas linhas 1 e 5 e $h = 2$. Basta escolher se o quadradinho do canto superior esquerdo será coberto por pecinha horizontal ou pecinha vertical e as quatro peças ficam definidas. Logo, temos 2 maneiras de cobrir o tabuleiro com $h \geq 2$ e $v \geq 2$.

c) Se a peça horizontal estiver nas linhas 2, 3 ou 4, então só há duas posições para peça vertical: na coluna que sobra encostando na linha de cima ou na linha de baixo. Já se a peça horizontal estiver nas linhas 1 ou 5, então há $2 + 4 = 6$ posições para a peça vertical, pois na coluna que a peça horizontal na pega quadradinho pode ficar em cima ou em baixo e nas colunas que a horizontal pega tem uma posição possível. Lembrando que escolhida a linha há 2 maneiras de colocar a peça horizontal, temos $3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 6 = 36$ maneiras de cobrir o tabuleiro.

d) Se $h = 0$ e $v \geq 1$, então para cada coluna temos 3 maneiras sem vertical, vertical tocando a linha 1 e vertical tocando a linha 5. São $3^5 = 243$ maneiras, mas devemos desconsiderar 1 em que nenhuma vez usamos peça vertical. Portanto, são 242 maneiras.

e) Essa peça horizontal não pode aparecer nas linhas 2, 3 e 4, pois ela impediria peças verticais nas colunas 2, 3 e 4 (como vimos no item a) e também numa das colunas 1 ou 5. Isso tornaria impossível $v \geq 2$. A peça horizontal tem 4 posições possíveis, nos cantos das linhas 1 e 5. Depois de colocar a peça horizontal temos 3 opções (com peça em cima, com peça em baixo ou sem peça) para a coluna sem quadradinho dessa peça e 2 opções (com ou sem peça) para cada coluna com um quadradinho da peça horizontal. Isso nos daria $3 \cdot 2^4$ possibilidades. Porém, para considerar $v \geq 2$ devemos descontar 1 caso em que $v = 0$ e $2 + 4 = 6$ casos em que $v = 1$. Assim, para $h = 1$ e $v \geq 2$ temos $4 \cdot (3 \cdot 2^4 - 1 - 6) = 164$ possibilidades.

f) Para concluir o problema temos que considerar 1 caso com $v = 0$ e $h = 0$, somar tudo e dobrar os casos em que v e h são diferentes para contar as coberturas simétricas. O número de maneiras de cobrir o tabuleiro com pecinhas 1×4 e 1×1 é $1 + 2 + 36 + 2 \cdot 242 + 2 \cdot 164 = 851$.

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Explicar corretamente que a peça horizontal e a vertical cobririam um mesmo quadradinho do 3×3 central (o aluno pode usar figuras para isso)........ 0,6 ponto

Item b: 0,8 ponto

Explicar que não pode haver vertical nas colunas do meio (ou equivalente)........ 0,4 ponto

Concluir que as peças precisam estar nas linhas e colunas das pontas .... +0,2 ponto

Concluir que há 2 maneiras de posicionas as peças .... +0,2 ponto

Item c: 0,6 ponto

Contar corretamente o caso em que a peça vertical está nas colunas 2, 3 ou 4........ 0,2 ponto

Contar corretamente o caso em que a peça vertical está nas colunas 1 ou 5........ 0,2 ponto

Concluir com o número correto de 36 maneiras........ +0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

Notar que cada coluna terá 3 possibilidades .... 0,4 ponto

Chegar no total de 3^5 (esquecendo o caso $v = 0$) .... +0,1 ponto

Considerar o caso $v = 0$ e chegar em 242 maneiras .... +0,1 ponto

Item e: 0,8 ponto

Na coluna sem quadradinho da peça horizontal tem 3 possibilidades .... 0,2 ponto

Nas colunas com quadradinho da peça horizontal tem 2 possibilidades........ 0,2 ponto

Chegar em $3 \cdot 2^4 = 48$ possibilidades........ +0,2 ponto

Descontar os casos com $v = 0$ e $v = 1$ e chegar em 164 maneiras .... +0,2 ponto

Item f: 0,6 ponto

Incluir o caso $v = 0$ e $h = 0$........ 0,2 ponto

Argumentar que precisa dobrar os casos simétricos .... 0,2 ponto

Chegar no valor final de 851 maneiras........ +0,2 ponto

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Solução.

a) Para $n \geq 11$ o número $n \cdot A > 10 \cdot A$ possui mais dígitos que A e não pode ser igual a A lido na ordem contrária.

b) Se A fosse um 5-flip, então teria que começar em 1, pois se começasse com 2 ou mais, então $5A$ teria mais dígitos que A. Porém, isso implicaria que $5A$ terminaria em 1. Isso não é possível, pois os múltiplos de 5 só podem terminar em 0 ou 5.

c) Se A fosse um 7-flip, então teria que começar em 1 para que $7A$ pudesse ter mesma quantidade de algarismos que A. Veja que $7A$ teria que começar com 7, 8 ou 9. Já que $7 \cdot 1 = 7$, pode ter algum vai um anterior e não pode passar para a casa decimal seguinte. Isso significa que A termina em 7, 8 ou 9. Veja que $7 \cdot 7 = 49$, $7 \cdot 8 = 56$ e $7 \cdot 9 = 63$ não terminam em 1, então é impossível formar o algarismo 1 das unidades de $7A$.

d) Se A fosse um 2-flip, então o primeiro dígito teria que ser 1, 2, 3 ou 4.

- Se for 1, então $2A$ começa com 2 ou 3, mas os números $2 \cdot 2 = 4$ e $2 \cdot 3 = 6$ não terminam em 1 e não é possível atingir o dígito das unidades correto para $2A$.
- Se for 2, então $2A$ começa com 4 ou 5, mas $2 \cdot 4 = 8$ e $2 \cdot 5 = 10$ não terminam em 2 e é não tem como acertar o dígito das unidades de $2A$.
- Se for 3, então $2A$ começa com 6 ou 7, mas $2 \cdot 6 = 12$ e $2 \cdot 7 = 14$ não terminam em 3 e é impossível acertar o dígito das unidades de $2A$.
- Se for 4, então $2A$ começa com 8 ou 9, porém $2 \cdot 8 = 16$ e $2 \cdot 9 = 18$ não podem terminar com 4 e não há como ter o dígito correto nas unidades de $2A$.

Portanto, não existe A que seja 2-flip.

e) Para os 9-flip tome os números $A_n = 10891089\ldots1089$ com n repetições de 1089. Veja que $9 \cdot A_n = 98019801 \ldots 9801$, pois entre os blocos de 1089 não haverá vai um.

Analogamente, para os 4-flip podemos tomar os números $A_n = 21782178 \ldots 2178$ com n repetições do 2178.

Critérios

Item a: 0,8 ponto

Explicar que $n \cdot A$ tem mais dígitos que A .... 0,8 ponto

Item b: 1,0 ponto

Provar que o primeiro dígito de A tem que ser 1 .... 0,5 ponto

Argumentar que o último dígito de $5A$ só pode ser 0 ou 5 .... +0,5 ponto

Item c: 1,0 pontos

Notar que o primeiro dígito de A só pode ser 1 .... 0,4 ponto

Provar que o primeiro dígito de $7A$ só poderia ser 7, 8 ou 9 .... +0,4 ponto

Verificar que $7 \cdot 7$, $7 \cdot 8$ e $7 \cdot 9$ não podem terminar em 1 .... +0,2 ponto

Item d: 1,2 pontos

Provar que o primeiro dígito de A tem que 1, 2, 3 ou 4 .... 0,4 ponto

Resolver os 4 casos para o primeiro dígito de A .... +0,2 ponto cada

Item e: 1,0 ponto

Construção correta com prova dos 9-flips (há outras construções possíveis como $108900 \ldots 001089$ e $1099 \ldots 989$) .... 0,5 ponto

Construção correta com prova dos 4-flips (há outras construções possíveis como $217800 \ldots 002178$) .... 0,5 ponto

Gabaritos e Critérios

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos
Solução.

a) Vamos chamar os pontos de 1500m e 5000m de 1 e 2. Temos $t_1 = 3 \cdot 60 + 42 = 222\ s$, $v_1 = \frac{1500}{222} \approx 6{,}76\ m/s$, $t_2 = 13 \cdot 60 + 52 = 832\ s$ e $v_2 = \frac{5000}{832} \approx 6{,}00\ m/s$. Temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} 6{,}76 = \dfrac{a}{222} + b \\ 6{,}00 = \dfrac{a}{832} + b \end{cases}$$

Fazendo a diferença das equações $0{,}76 = a\left(\frac{1}{222} - \frac{1}{832}\right)$ implicando $a \approx 230{,}12$. Substituindo esse valor de a temos o valor aproximado de $b = 6{,}76 - \frac{a}{222} \approx 5{,}72$.

Considerando as unidades do problema, temos $a = 230{,}12\ m$ e $b = 5{,}72\ m/s$.

b) Devemos converter para km/h e depois fazer a porcentagem. Lembrando que $1\ km = 1000\ m$ e que $1\ hora = 3600\ s$ temos $5{,}72\ m/s = \frac{5{,}72\ m}{1\ s} \cdot \frac{1\ km}{1000\ m} \cdot \frac{3600\ s}{1\ h} = 5{,}72 \cdot 3{,}6\ km/h \approx 20{,}59\ km/h$. Tirando 85% chegamos em $0{,}85 \cdot 20{,}59 \approx 17{,}5\ km/h$.

c) O tempo para correr uma maratona seria de $\frac{42{,}2}{17{,}5} \approx 2{,}41\ h$. Lembrando que $1\ hora = 60\ minutos$ temos $0{,}41\ h = 0{,}41 \cdot 60 = 24{,}6\ min$. O tempo seria de aproximadamente 2 horas e 25 minutos.

d) Usando as mesmas variáveis do item a temos $t_1 = 207\ s$, $v_1 = \frac{1500}{207} \approx 7{,}24\ m/s$, $t_2 = 769\ s$ e $v_2 = \frac{5000}{769} \approx 6{,}50\ m/s$. Temos o sistema

$$\begin{cases} 7{,}24 = \dfrac{a}{207} + b \\ 6{,}50 = \dfrac{a}{769} + b \end{cases}$$

Fazendo a diferença temos $0{,}74 = a\left(\frac{1}{207} - \frac{1}{769}\right)$ implicando $a \approx 209{,}6$. Com isso, $b = 7{,}24 - \frac{a}{207} \approx 6{,}22\ m/s$. Passando para km/h temos $b \approx 22{,}4\ km/h$. Tirando 96% temos $21{,}5\ km/h$.

O tempo estimado para correr uma maratona seria de 1,96 horas que é aproximadamente 1 hora e 58 minutos. Com essas considerações o atleta norueguês bateria o recorde mundial da maratona.

Critérios.

Item a: 0,6 ponto (considerar aproximações)

Escrever o t_1, v_1 e a equação que os relaciona envolvendo a, b.................................. 0,2 ponto

Escrever o t_2, v_2 e a equação que os relaciona envolvendo a, b.................................. 0,2 ponto

Achar o valor de $a \cong 230{,}12m$.. 0,1 ponto

Achar o valor de $b \cong 5{,}72m/s$ .... 0,1 ponto

Item b: 0,4 ponto (considerar aproximações)

Converter corretamente para $b \cong 20{,}59km/h$.. 0,2 ponto

Tirar 85% corretamente e chegar em aproximadamente $17{,}5km/h$............................ 0,2 ponto

Item c: 0,4 ponto (considerar aproximações)

Achar que o tempo de correr uma maratona é aproximadamente $2{,}41h$...................... 0,2 ponto

Converter corretamente para aproximadamente 2 horas e 25 minutos........................ 0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto (considerar aproximações)

Escrever o t_1, v_1 e a equação que os relaciona envolvendo a, b.............................. .... 0,1 ponto

Escrever o t_2, v_2 e a equação que os relaciona envolvendo a, b................................ .... 0,1 ponto

Achar o valor de $a \cong 209{,}6m$ e $b \cong 6{,}22m/s$... .... 0,1 ponto

Converter b para $\cong 22{,}4km/h$ e tirar 96% chegando em $\cong 21{,}5\ km/h$.................................. 0,1 ponto

Achar o tempo estimado da maratona e concluir que o atleta bateria o recorde mundial ....0,2 ponto

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos
Solução.
a) *Resposta:* 6.

Alyson pode receber um de três objetos, Penn pode receber um dos outros dois objetos e Teller recebe o objeto que sobrou. Há, então, $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades.

b) *Resposta:* 2.

Nenhuma pessoa pode vencer as outras duas e nem joga contra si mesma. Além disso, não é possível que A vença B e B vença A. Assim, há duas possibilidades para a primeira lacuna: Penn ou Teller. Se for Penn, o único que vence Alyson é Teller. Logo Alyson vence Penn; Teller vence Alyson. Teller não vence Penn também, logo Penn vence Teller, e a frase é

P1: Alyson vence <u>Penn</u>; <u>Teller</u> vence Alyson; e <u>Penn</u> vence <u>Teller</u>.

Se a primeira lacuna é Teller, o único que vence Alyson é Penn, e da mesma forma, Teller vence Penn. A frase é

P2: Alyson vence <u>Teller</u>; <u>Penn</u> vence Alyson; e <u>Teller</u> vence <u>Penn</u>.

Deste modo, só há duas possíveis previsões.

c) Quando trocamos objetos, as pessoas envolvidas nos dois objetos trocam de status (o vencedor e o perdedor trocam de lugar). Isso faz com que todos os confrontos troquem de status também, ou seja, mudamos de uma previsão para a outra.

d) Hans vê os objetos distribuídos inicialmente e vê qual é a previsão correspondente (no nosso caso, é P1). Após uma troca, independente de quem forem os envolvidos, muda-se de P1 para P2, e a primeira previsão dele (que é só uma parte de P1) está correta. Após duas trocas, vamos e voltamos para a mesma previsão; no nosso exemplo, voltamos para P2; isso dá a segunda previsão de Hans (que é uma parte de P2 – exatamente o que ele não falou na primeira previsão, para evitar se repetir, e aumentar, ainda que artificialmente, a quantidade de confrontos corretos). Após três trocas, mudamos três vezes, ou seja, terminamos em P1, que é exatamente a terceira previsão.

O truque com o papel amassado no final só dá certo porque as três pessoas envolvidas pegaram os objetos de modo coerente com P1 – isso deve ter sido instruído por Hans antes de começar o truque.

e) Sim. Como a quantidade de trocas é ímpar nos dois truques, o resultado é o mesmo.

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Concluir com o princípio multiplicativo que há 6 possibilidades................................... 0,4 ponto

Item b: 0,8 ponto

Concluir que os três jogadores formarão um ciclo em relação a vitória......................... 0,5 ponto

Utilizar essa observação para notar que existem duas possibilidades........................... 0,3 ponto

Item c: 0,4 ponto

Notar que, ao trocar os objetos trocamos o ciclo e mudamos a previsão...................... 0,4 ponto

Item d: 1 ponto

Escrever que o mágico possui acesso ao estágio Inicial e após uma troca o estado é revertido, como provado no item c, devendo o mágico escolher P2 se ele vê P1 e vice-versa.. 0,2 ponto

Notar que após duas trocas temos o mesmo estado (pelo item c aplicado duas vezes) e o mágico deve usar a mesma previsão... 0,4 ponto

Notar que após três trocas temos o estado trocado (aplicando c três vezes) e devemos usar a previsão contrária a usada anteriormente (no caso, P1) .... 0,4 ponto

Item e: 0,4 ponto

Notar que o resultado só depende da paridade do número que inversões de estado são realizadas e que portanto a previsão é a mesma... 0,4 ponto

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos
Solução.

a) Temos $S = \frac{bc}{2}$ e $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ (usando o Teorema de Pitágoras). A equação $x^2 - ax + S = 0$ tem discriminante $\Delta = a^2 - 4S = b^2 + c^2 - 2bc = (b-c)^2$.

b) As raízes da equação são dadas por $x = \frac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Considerando as duas possibilidades do $\pm$ temos $x_1 = \frac{a+b-c}{2}$ e $x_2 = \frac{a-b+c}{2}$.

c) Veja que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 2(a^2 + ab + bc + ca)$ é par. Se um número ao quadrado é par, então o número possui fator 2 na fatoração em primo e também é par.

Oura solução. Sabendo que $a^2 = b^2 + c^2$ podemos observar que a quantidade de números ímpares tem que ser par, pois $par + par = par,\ par + ímpar = ímpar$ e $ímpar + ímpar = par$. Assim, $a + b + c$ é par e $(a+b+c)^2$ também é par.

d) Sabemos que $a+b+c$ é par e que $2c$ também é par. Portanto, $a+b+c-2c=a+b-c$ é par e x_1 é inteiro. Analogamente $a+b+c-2b$ é par e x_2 é inteiro. Portanto, as raízes x_1 e x_2 são sempre inteiras.

Critérios

Item a: 0,8 ponto

Escrever $\Delta = a^2 - 4S$ .... 0,4 ponto

Deixar tudo em função de b e c (b^2+c^2-2bc ou $(b-c)^2$) .... +0,4 ponto

Item b: 0,6 ponto

Escrever apenas $x=\frac{a\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ sem deixar em termos de a, b e c .... 0,3 ponto

Chegar nas expressões $x=\frac{a\pm(b-c)}{2}$ ou equivalentes .... +0,3 ponto

Item c: 0,8 ponto

Escrever $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ ou equivalente .... 0,4 ponto

Perceber que $a^2+b^2+c^2$ é sempre par .... +0,2 ponto

Concluir que $(a+b+c)^2$ e $a+b+c$ são pares .... +0,2 ponto

Para a outra solução.

Afirmar que a quantidade de ímpares é par .... 0,4 ponto

Provar que a quantidade de ímpares é par .... +0,2 ponto

Concluir que $(a+b+c)^2$ e $a+b+c$ são pares .... +0,2 ponto

Item d: 0,8 ponto

Provar que $a+b-c$ é par (ou equivalente) .... 0,4 ponto

Concluir que as raízes são sempre inteiras .... +0,4 ponto

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Solução.

a) Cada ângulo interno de um quadrado mede 90°. É conhecido que cada ângulo interno de um hexágono regular tem medida 120°. Isso também pode ser provado usando a dica dos triângulos equiláteros. O triângulo BFC é isósceles ($FB=FC$) e tem um ângulo de 120°. Os outros dois ângulos medem $\frac{180°-120°}{2}=30°$. Dessa forma, $\angle ABC = 90°+120°-30°=180°$ e $\angle BCD = 120°-30°+90°=180°$. Portanto, A, B, C e D são colineares.

b) O hexágono e todos os quadrados possuem lado $2x$. Ligando do centro O aos vértices do hexágono formamos triângulos equiláteros de lado $2x$ e depois $OB=OF=OC=OE=2x$. Como o triângulo OBF é equilátero a altura BG também é mediana e $GF=GO=x$. Usando o Teorema de Pitágoras $GB=\sqrt{BO^2-GO^2}=x\sqrt{3}$. Por simetria, $GC=GB=x\sqrt{3}$.

Dessa forma, podemos concluir que $GA=GB+BA=x\sqrt{3}+2x$, $GE=GO+OE=3x$ e $GD=GC+CD=x\sqrt{3}+6x$.

c) Usando a mesma ideia do item a, podemos notar que EB forma ângulo de 30° com o lado superior do hexágono. Daí, $\angle ABH = 180°-90°-30°=60°$. O triângulo ABH possui ângulos com medidas, 90°, 60° e $180°-90°-60°=30°$.

d) Por simetria, $EB=CB=CG+GB=2x\sqrt{3}$. O triângulo ABH é congruente ao triângulo BOG por ALA e temos $BH=OG=x$ e $AH=BG=x\sqrt{3}$. Os triângulos EHA e DGE são retângulos em H e G, respectivamente, então basta ver a razão dos lados para usar o caso de semelhança LAL. Temos $\frac{EH}{DG}=\frac{2x\sqrt{3}+x}{6x+x\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{HA}{GE}=\frac{x\sqrt{3}}{3x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ concluindo o resultado.

e) O segmento OE divide o ângulo interno $\angle E$ do hexágono em dois ângulos de $\frac{120°}{2}=60°$. Veja que $\angle OEB' = 60°+30°=90°$. Usando a semelhança do item anterior, seja $\angle GED = \angle HAE = \angle H'A'E' = x$. Pela soma dos ângulos internos do triângulo $A'H'E$ temos $\angle A'EH' = 90°-x$. Assim, $\angle GEA' = \angle OEB' - \angle A'EH' = x = \angle GED$ e os pontos E, A' e D são colineares.

f) Como cada ângulo interno do hexágono mede 120° a rotação foi de 120° e temos $\angle AEA' = 120°$. Usando o item anterior, temos $\angle AED = \angle AEA' = 120°$ e concluímos que $? = 120°$.

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Afirmar que cada ângulo interno do hexágono regular mede 120° (pode ser na figura) .... 0,2 ponto

Provar que $\angle ABC = 90°$ e $\angle BCD = 90°$ .... +0,1 ponto cada

Item b: 0,6 ponto

Calcular os segmentos GA, GE e GD .... 0,2 ponto cada

Item c: 0,4 ponto

Provar que EB forma ângulo de $30°$ com o lado superior do hexágono .... 0,2 ponto

Provar que $\angle ABH = 60°$ .... +0,1 ponto

Escrever todos os ângulos do triângulo ABH .... +0,1 ponto

Item d: 0,6 ponto

Notar que os dois triângulos são retângulos .... 0,3 ponto

Provar que a razão entre os catetos é igual .... +0,3 ponto

Item e: 0,6 ponto

Provar que $\angle GEB' = 90°$ .... 0,4 ponto

Provar que $\angle GED = \angle GEA'$ .... +0,2 ponto

Item f: 0,4 ponto

Observar que a rotação foi de $120°$ por conta dos lados consecutivos do hexágono .... 0,2 ponto

Provar que $? = 120°$ usando o item e .... +0,2 ponto

PROBLEMA 5 – $\boxed{\text{Valor: 4 pontos}}$

Solução.

a) Veja que, se γ é um 9 -flip, $9 \times \gamma$ tem a mesma quantidade de dígitos de γ e não tem vai um na multiplicação em uma posição mais significativa do que as posições dos dígitos de γ. No decorrer da solução, considere $\gamma\delta$ a concatenação de γ com δ e $\overline{\gamma}$ o número formado invertendo a ordem dos dígitos de γ. Pela observação sobre os vai um, dado um número $\delta = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k$ onde γ_i é α ou β, temos que $9 \times \delta = (9 \times \gamma_1)(9 \times \gamma_2) \ldots (9 \times \gamma_k) = (\overline{\gamma_1})(\overline{\gamma_2}) \ldots (\overline{\gamma_k})$. Como δ é um palíndromo formado por αs e βs, segue que $9 \times \gamma = (\overline{\gamma_k}) \ldots (\overline{\gamma_2})(\overline{\gamma_1}) = \overline{\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k}$. Segue que δ é 9 -flip.

b) Seja $\delta = abcdef$ um 9 -flip básico de 6 dígitos. Para que $9 \times \delta$ tenha 6 dígitos, devemos ter $\gamma \leq 111111$ e $a = 1$. Como $\delta \geq 100000$, segue que $9 \times \delta \geq 900000$ e $f = 9$. Se $b = 1$, $9 \times \delta \geq 990000$ e $e = 9$, mas nesse caso $9 \times \gamma$ acaba em 91 ($99 \times 9 = 891$), o que contradiz $b = 1$. Logo $b = 0$, de modo que $9 \times \gamma$ acaba em 01 e $e9 \times 9$ acaba em 01. Como 9×9 tem um vai 8, segue que $e \times 9$ deve acabar em 2 e $e = 8$. Veja que $9 \times 10cd89 = 900801 + 9 \times cd00$, analisando o penúltimo dígito, temos que $cd \times 9 + 8 \geq 800$ e $cd \geq 88$. Se $c = 8$, temos que $d89 \times 9$ acaba em 801, como 89×9 tem um vai 8, segue que $d \times 9$ acaba em 0 e $d = 0$, o que contradiz $cd \geq 88$. Logo $c = 9$, $d89 \times 9$ acaba em 901, $d \times 9$ acaba em 1 e $d = 9$. Como $109989 \times 9 = 989901$, esse é o único número 9 -flip de 6 dígitos.

c) Se um 9 -flip tem uma quantidade ímpar de dígitos, então ele é um palíndromo de uma quantidade ímpar (possivelmente 1) de 9 -flips básicos, com o 9 -flip básico central possuindo uma quantidade ímpar de dígitos (em um palíndromo, se desconsiderarmos o elemento central, se existir, todos os outros aparecem em pares, de modo que a quantidade de dígitos neles também será par). Isso só acontece se o central for 0 ou $109 \ldots 989$ com uma quantidade ímpar de 9 s no meio. No primeiro caso, excluir o dígito central é retirar o 9 -flip básico central, de modo que o que resta continua a ser um palíndromo. No segundo caso, excluir o dígito central é diminuir em um a quantidade de 9 s no meio (que era ímpar, e por tanto pelo menos 1), de modo que o bloco central do palíndromo continua sendo um 9 -flip básico. Em ambos os casos, o número resultante é um 9 -flip.

d) O item anterior nos mostra uma forma de obter um 9 -flip de $2k$ dígitos a partir de um de $2k + 1$ dígitos. Vamos mostrar que esta relação é uma bijeção entre os 9 -flips de $2k$ dígitos e os de $2k + 1$ dígitos. Veja que, dado um 9 -flip de $2k$ dígitos, ele é formado por uma quantidade par de 9 -flips básicos ou o 9 -flip básico central do palíndromo é de tamanho par. No primeiro caso, podemos inserir um 0 na posição central do número. No segundo caso, podemos aumentar a quantidade de 9 s no meio do $109 \ldots 989$ central em um. Em ambos os casos, obtemos um 9 -flip de $2k + 1$ dígitos. Perceba que, no primeiro caso, obtemos um número que corresponderá ao primeiro caso do item c) e vice-versa. O mesmo ocorre no segundo caso. Assim essa relação é invertível, de modo que é uma bijeção. Logo $a_{2k} = a_{2k+1}$.

e) Vamos estabelecer uma bijeção de modo semelhante ao item anterior. Considere um 9 -flip de $2k$ dígitos formado por uma quantidade par 9 -flips básicos. Considere seus dois blocos centrais (que são iguais pela formação de palíndromo). Se eles forem 0 , podemos excluí-los e formar um 9 -flip de $2k - 2$ dígitos formado por uma quantidade par de 9 -flips básicos. Essa operação pode ser invertida adicionando dois 0 s no meio de um 9 -flip de $2k - 2$ dígitos formado por uma quantidade par de 9 -flips básicos. Se os blocos centrais forem $109 \ldots 989$ com $l \geq 4$ dígitos, podemos excluí-los e colocar um $109 \ldots 989$ com $2l - 4$ dígitos no meio ($2l - 4 \geq 4$), de modo a obter um 9 -flip de $2k - 4$ dígitos formado por uma quantidade ímpar de 9 -flips básicos. Veja que, dado um 9 -flip de $2k - 4$ dígitos formado por uma quantidade ímpar de 9 -flips básicos, o bloco central $109 \ldots 989$ tem tamanho $m \geq 4$ par, de modo que podemos excluí-lo, colocando dois blocos $109 \ldots 989$ de tamanho $\frac{m+4}{2}$ no lugar ($\frac{m+4}{2} \geq 4$), de modo que essa relação também é invertível. Concluindo, obtivemos uma bijeção entre os números contados por p_{2k} e os contados por p_{2k-2} ou i_{2k-4}, de modo que $p_{2k} = p_{2k-2} + i_{2k-4}$.

f) Vamos construir mais uma bijeção para mostrar que $i_{2k} = i_{2k-2} + p_{2k-4}$ (ao somar essa equação com a obtida no item anterior, obtemos a equação desejada). Veja que, dado um 9-flip de $2k$ dígitos formado por uma quantidade ímpar de 9-flips básicos, ele tem um bloco central $109\dots989$ de tamanho $l \geq 4$ par. Se $l \geq 6$, podemos diminuir a quantidade de 9s centrais em 2. Essa relação pode ser invertida aumentando em 2 a quantidade de 9s centrais no bloco central de um 9-flip de $2k-2$ dígitos formado por uma quantidade ímpar de 9-flips básicos. Se $l = 4$, podemos excluir o bloco central, de modo a obter um 9-flip de $2k-4$ dígitos formado por uma quantidade par de 9-flips básicos. A partir de um desses 9-flips, podemos adicionar um 1089 no meio para obter um 9-flip de $2k$ dígitos formado por uma quantidade ímpar de 9-flips básicos com o central tendo tamanho 4. Assim concluímos a bijeção. Somando as igualdades das duas últimas bijeções, obtemos $(p_{2k} + i_{2k}) = (p_{2k-2} + i_{2k-2}) + (p_{2k-4} + i_{2k-4})$, ou seja, $a_{2k} = a_{2k-2} + a_{2k-4}$. Como $a_2 = 0 = F_0$ e $a_4 = 1 = F_1$, concluímos por indução que $a_{2k} = a_{2k-2} + a_{2k-4} = F_{k-2} + F_{k-3} = F_{k-1}$.

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Notar que na multiplicação não tem "vai um" para fora dos bloquinhos .... 0,3 ponto

Concluir que 9 vezes um bloquinho vai corresponder ao bloquinho simétrico no palíndromo .... +0,3 ponto

Item b: 0,8 ponto

Provar que $a = 1$ e $f = 9$ .... 0,2 ponto

Provar que $b = 0$ e $e = 8$ .... +0,2 ponto

Provar que $c = 8$ ou 9 .... +0,2 ponto

Concluir que $c = 9$ e $d = 9$ .... +0,2 ponto

Item c: 0,6 ponto

Provar que o algarismo central tem que ser o algarismo central de 9-flip básico .... 0,2 ponto

Resolver o caso 0 .... +0,2 ponto

Resolver o caso com 109...989 com um número ímpar de 9's .... +0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

Separar nos casos número par de 9-flips básicos e 9-flip básico central com um número par de dígitos .... 0,3 ponto

Provar a bijeção entre a_{2k} e a_{2k+1} .... +0,3 ponto

Item e: 0,6 ponto

Separar os casos dois zeros centrais e dois blocos 109...989 centrais .... 0,2 ponto

Provar a bijeção de parte do p_{2k} com p_{2k-2} .... +0,2 ponto

Provar a bijeção de parte do p_{2k} com i_{2k-4} .... +0,2 ponto

Item f: 0,8 ponto

Provar que $i_{2k} = i_{2k-2} + p_{2k-4}$ (muitos argumentos podem ser análogos ao do item anterior) .... 0,4 ponto

Somar as equações de p_{2k} e i_{2k} para chegar na recorrência $a_{2k} = a_{2k-2} + a_{2k-4}$ .... +0,2 ponto

Notar que $a_2 = 0 = F_0$ e $a_4 = 1 = F_1$ para concluir que $a_{2k} = F_{k-1}$ .... +0,2 ponto

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Solução.

a) A reta L era a mediatriz de CF, então após a dobra L_2 ela é levada na mediatriz de $C'F'$.

b) Como a reta L passa por F', a imagem da reta L após L_2 passa por F. Portanto, a imagem da reta L é a reta FH e, sendo a mediatriz de $C'F'$, é perpendicular a $C'F'$.

c) A reta L é a mediatriz de CF e passa por F'. Como $F'G || CF$ a distância de F' até a horizontal é metade de AC. Portanto $F'G = \frac{FC}{2} = \frac{F'C'}{2} = F'H$. Os triângulos FGF' e FHF' são retângulos e sabendo que um cateto e a hipotenusa são iguais podemos concluir que o outro cateto também é igual pelo Teorema de Pitágoras. Dessa forma, temos $\Delta FGF' \equiv \Delta FHF' (LLL)$ já que $FF' = FF'$, $GF' = HF' = \frac{CF}{2}$ e $FG = FH = \sqrt{FF'^2 - \left(\frac{CF}{2}\right)^2}$. Poderíamos também ter concluído usando o critério de congruência $LLA_{90°}$.

d) Seja $m(G\hat{F}F') = x$. Usando o item anterior e a mediatriz FH temos $m(F'\hat{F}H) = m(H\hat{F}C') = x$. Veja que L_1 levou AE sobre FF' e $m(C'\hat{F}F') = m(C'\hat{F}J) = 2x$. Temos $\theta = m(G\hat{F}J) = 5x$ e $x = \frac{\theta}{5}$. Com isso, $m(G\hat{F}F') = x = \frac{\theta}{5}$ e $m(G\hat{F}C') = 3x = \frac{3\theta}{5}$.

e) Pela definição de J temos $FJ = FF' = FC$ e $C'J = C'F'$. O triângulo $FC'J$ é isósceles e a mediana é também altura e bissetriz e $IJ = IC' = \frac{C'J}{2} = \frac{C'F'}{2} = \frac{CF}{2}$. Os triângulos FIJ, FIC', FHC', FHF' e FGF' são retângulos com mesma hipotenusa $FF' = FF' = FC' = FC' = FJ$ e um cateto de mesma medida $IJ = IC' = HC' = HF' = GF' = \frac{FC}{2}$. Pelo critério de congruência $LLA_{90°}$, são todos congruentes e os ângulos formados em F são todos iguais a $\frac{\theta}{5}$.

Critérios

Item a: 0,8 ponto

Alguma descrição correta da em que L é levada após L_2 (mediatriz de $C'F'$ por exemplo) .... 0,4 ponto

Justificativa correta (L ser mediatriz de CF por exemplo) .... +0,4 ponto

Item b: 0,8 ponto

Notar que se L passa por F', então a reta após a dobra passa por F .... 0,4 ponto

Concluir que tem que ser a reta FH .... +0,4 ponto

Item c: 0,8 ponto

Observar que são 2 triângulos retângulos (aqui pode ser citado o item b, mesmo que ele não tenha sido resolvido) .... 0,2 ponto

Observar que possuem o lado FF' em comum .... 0,2 ponto

Concluir usando o caso de congruência LLL ou $LLA_{90°}$ .... +0,4 ponto

Item d: 0,8 ponto

Argumentar corretamente que os três ângulos $G\hat{F}F'$, $F'\hat{F}H$ e $H\hat{F}C'$ possuem a mesma medida .... 0,4 ponto

Provar que $C'\hat{F}J$ é $2/3$ de CFC' .... 0,2 ponto

Concluir que , $m\left(G\hat{F}F'\right) = \frac{\theta}{5}$ e $m\left(G\hat{F}C'\right) = \frac{3\theta}{5}$. .... +0,2 ponto

Item e: 0,8 ponto

Observar que pelos itens anteriores são triângulos retângulos com mesma hipotenusa .... 0,4 ponto

Provar que catetos nos 5 triângulos possuem mesma medida .... +0,2 ponto

Concluir usando o caso de congruência LLL ou $LLA_{90°}$ .... +0,2 ponto

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Solução.

a)

$$E[X] = \sum_{x\in S} x \cdot P(x) = \sum_{x=1}^{20} x \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{20} \cdot \frac{20(20+1)}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5$$

b) Temos $20 \cdot 20 = 400$ possíveis resultados, dois quais k^2 tem todos os dados no máximo k e $(k-1)^2$ tem todos os resultados menores do que k. Logo o a probabilidade do maior resultado ser exatamente k é $\frac{k^2-(k-1)^2}{400} = \frac{2k-1}{400}$.

c) Usando a definição de esperança e as fórmulas de somatórios fornecidas temos:

Solução 1:

$$\sum_{x\in S} x \cdot P(x) = \sum_{x=1}^{20} x \cdot \frac{2x-1}{400} = \frac{1}{400} \cdot \left(2 \cdot \sum_{x=1}^{20} x^2 - \sum_{x=1}^{20} x\right) =$$

$$= \frac{1}{400} \cdot \left(2 \cdot \frac{20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20 + 1)}{6} - \frac{20 \cdot (20+1)}{2}\right) = \frac{5530}{400} = 13{,}825$$

Solução 2:

$$\sum_{x\in S} x \cdot P(x) = \sum_{x=1}^{20} x \cdot \frac{x^2 - (x-1)^2}{400} = \frac{20(20^2 - 19^2) + 19(19^2 - 18^2) + \cdots + 1(1^2 - 0^2)}{400} =$$

$$= \frac{20^3 - 19^2 - 18^2 - \cdots - 1^2}{400} = \frac{8000 - \frac{19 \cdot (19+1) \cdot (2 \cdot 19 + 1)}{6}}{400} = \frac{5530}{400} = 13{,}825$$

d) Note que, como o resultado do dado descartado é menor ou igual ao resultado mantido, tal talento é equivalente a pegar o melhor resultado de 3 lançamentos de dados.
Temos $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ possíveis resultados, dos quais k^3 tem todos os dados no máximo k e $(k-1)^3$ tem todos os resultados menores do que k. Logo o a probabilidade do maior resultado ser exatamente k é $\frac{k^3-(k-1)^3}{8000} = \frac{3k^2-3k+1}{8000}$.

e) Usando a definição de esperança e as fórmulas de somatórios fornecidas temos:

$$\sum_{x \in S} x \cdot P(x) = \sum_{x=1}^{20} x \cdot \frac{x^3-(x-1)^3}{8000} = \frac{20(20^3-19^3)+19(19^3-18^3)+\cdots+1(1^3-0^3)}{8000} =$$

$$= \frac{20^4-19^3-18^3-\cdots-1^3}{8000} = \frac{160000-\left(\frac{19\cdot(19+1)}{2}\right)^2}{8000} = \frac{123900}{8000} = 15{,}4875$$

f) Existe uma chance de $\frac{k}{20}$ do resultado ser k e de $\frac{1}{20}$ para cada valor maior do que k, logo:

$$\sum_{x \in S} x \cdot P(x) = k \cdot \frac{k}{20} + \frac{k+1}{20} + \frac{k+2}{20} + \cdots + \frac{20}{20} = \frac{1}{20}\left(k^2 + \frac{20 \cdot 21}{2} - \frac{k(k+1)}{2}\right) = \frac{k^2-k+420}{40}$$

g) Se relançarmos novamente os dois dados, teremos uma Esperança de 13,825. Logo, para ser mais vantajoso jogar 2 dados, temos:

$$13{,}825 > \frac{k^2-k+420}{40} \Leftrightarrow k(k-1) < 133 \Leftrightarrow k \leq 12$$

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Expressão correta .... 0,3 ponto

Resultado correto .... +0,3 ponto

Item b: 0,6 ponto

Perceber que há 20^2 resultados possíveis .... 0,3 ponto

Provar que há $k^2-(k-1)^2 = 2k-1$ resultados em que o máximo é k (há outras formas além da solução oficial) .... 0,3 ponto

Item c: 0,8 ponto

Expressão correta como somatório .... 0,4 ponto

Manipular para usar as fórmulas dadas .... +0,2 ponto

Resultado correto de 13,825 .... +0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

Perceber que há 20^3 resultados possíveis .... 0,3 ponto

Provar que há $k^3-(k-1)^3 = 3k^2-3k+1$ resultados em que o máximo é k (há outras formas além da sol. oficial) ... 0,3 ponto

Item e: 0,8 ponto

Expressão correta como somatório .... 0,4 ponto

Manipular para usar as fórmulas dadas .... +0,2 ponto

Resultado correto de 15,4875 .... +0,2 ponto

Item f: 0,8 ponto

Notar que a probabilidade do resultado ser k é igual a $k/20$ .... 0,4 ponto

Notar que para cada um dos outros valores é $1/20$ .... 0,2 ponto

Chegar em $\frac{k^2-k+420}{40}$ .... +0,2 ponto

Item g: 0,8 ponto

Comparar as esperanças obtidas nos itens c e f (mesmo que as expressões deles estejam erradas) .... 0,4 ponto

Concluir que a Exatidão OPM é superior para $k \leq 12$ .... +0,4 ponto

XLVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (setembro de 2023)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Gabaritos e Critérios

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos
Solução.

a) Usaremos $[RST]$ para representar a área do triângulo RST. Como os triângulos são retângulos podemos calcular as áreas usando o produto dos catetos sobre 2: $[OAB] = \frac{xy}{2}$, $[OBC] = \frac{yz}{2}$ e $[OCA] = \frac{zx}{2}$.

b) Pelo Teorema de Pitágoras, $a = \sqrt{y^2+z^2}$, $b = \sqrt{x^2+z^2}$ e $c = \sqrt{x^2+y^2}$.

c) Podemos montar uma equação usando duas expressões para a área do triângulo OBC: $\frac{BC\cdot OD}{2} = \frac{OB\cdot OC}{2} \Leftrightarrow OD = \frac{OB\cdot OC}{BC}$.

d) Usando as equações dadas no enunciado e os itens anteriores temos $[ABC]^2 = \frac{a^2(OD^2+OA^2)}{4} = \frac{a^2(\frac{y^2z^2}{a^2}+x^2)}{4} = \left(\frac{yz}{2}\right)^2 + \frac{a^2x^2}{4} = [OBC]^2 + \frac{x^2y^2}{4} + \frac{x^2z^2}{4} = [OBC]^2 + [OAB]^2 + [OCA]^2$.

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Cada expressão correta $\frac{xy}{2}$, $\frac{xz}{2}$ e $\frac{yz}{2}$ .... +0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto

Cada expressão correta $a = \sqrt{y^2+z^2}$, $b = \sqrt{x^2+z^2}$ e $c = \sqrt{x^2+y^2}$........ +0,2 ponto

Item c: 0,4 ponto

Tentar usar área do triângulo OBC........ 0,2 ponto

Concluir corretamente........ +0,2 ponto

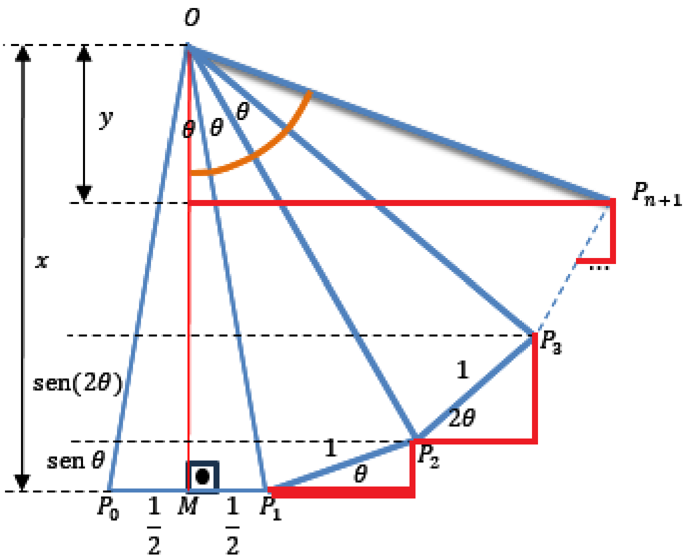
Item d: 0,4 ponto

Substituir as expressões de OD e OA usando os itens anteriores .... 0,2 ponto

Concluir a demonstração do teorema........ +0,2 ponto

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos
Solução.

a) Sejam Q_i a projeções dos P_i sobre OM. Observe o triângulo retângulo com lados vertical e horizontal e hipotenusa $P_1P_2 = 1$. O cateto vertical tem medida $\operatorname{sen}\theta$ e podemos concluir que $MQ_2 = \operatorname{sen}\theta$. Podemos repetir essa ideia para os outros segmentos e obter $x - y = MQ_{n+1} = MQ_2 + Q_2Q_3 + \cdots + Q_nQ_{n+1} = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \cdots + \operatorname{sen}n\theta$.



b) No triângulo OP_1M temos $\angle MOP_1 = \frac{\theta}{2}$. Usando as funções trigonométricas de $\frac{\theta}{2}$ temos $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{MP_1}{MO} = \frac{1/2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{MP_1}{OP_1} = \frac{1/2}{r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

c) Temos $\angle MOP_1 = \frac{\theta}{2}$ e $\angle P_iOP_{i+1} = \theta$ para $i = 1,2,\dots,n$. Logo, $\angle MOP_{n+1} = \frac{\theta}{2} + \theta + \theta + \cdots + \theta = n\theta + \frac{\theta}{2}$.

d) Usando o triângulo $OQ_{n+1}P_{n+1}$ temos $\cos\left(n\theta + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{OQ_{n+1}}{OP_{n+1}} = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = \frac{\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$. Usando a equação do item a temos $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \cdots + \operatorname{sen}n\theta = x - y = \frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

e) Usando na horizontal a mesma ideia que usamos na vertical temos a soma dos segmentos de medidas $\frac{1}{2}$, $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, ..., $\cos n\theta$ igual a $Q_{n+1}P_{n+1}$. Usando o seno do ângulo $\angle MOP_{n+1}$ temos $\operatorname{sen}\left(n\theta + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{Q_{n+1}P_{n+1}}{OP_{n+1}} \Leftrightarrow Q_{n+1}P_{n+1} = \frac{\operatorname{sen}\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$. Com isso, temos $\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = Q_{n+1}P_{n+1} = \frac{\operatorname{sen}\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Argumentar que a projeção de P_1P_2 na vertical tem medida $\operatorname{sen}\theta$ (ou análogo) .... 0,4 ponto

Somar as projeções na vertical para chegar na equação.......... +0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto

Chegar em $x = \frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.......... 0,3 ponto

Chegar em $r = \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.......... 0,3 ponto

Item c: 0,4 ponto

Justificar corretamente que $\angle MOP_{n+1} = n\theta + \frac{\theta}{2}$ .... 0,4 ponto

Item d: 0,8 ponto

Chegar em $y = \frac{\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ .... 0,4 ponto

Concluir que a soma dos senos é $\frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ ou $\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ .... +0,4 ponto

Item e: 0,6 ponto

Considerar as projeções horizontais .... 0,4 ponto

Concluir que a soma é $\frac{\operatorname{sen}\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.......... +0,2 ponto

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Solução.

a) Considerando o jogador que aposta uma ficha que a bola cairá na casa vermelha, note que com probabilidade $\frac{18}{37}$ ele ganha uma ficha e, com probabilidade $\frac{19}{37}$, ele perde uma ficha. Correspondentemente, o cassino ganha uma ficha com probabilidade $\frac{19}{37}$ e perde uma ficha com probabilidade $\frac{18}{37}$. Então, $HE = \frac{19}{37}(1) + \frac{18}{37}(-1) = \frac{1}{37} \cong 2.7\%$

b) Note que, sendo p a probabilidade do cassino ganhar uma ficha (e consequentemente $1-p$ a de perder uma ficha), então $HE = p(1) + (1-p)(-1) = 2p - 1$. Logo $HE = 100\% \Rightarrow 2p - 1 = 1 \Rightarrow p = 1$. Dado que o cassino ganha uma ficha exatamente quando o jogador perde uma ficha, temos que a probabilidade de vitória do jogador é $1-p$. Como $p = 1$, o jogador ganha com probabilidade 0%.

c) Note que, se a probabilidade de um evento ocorrer é $\frac{1}{n}$, a probabilidade de que esse evento não ocorra é $1 - \frac{1}{n}$. Assim, a probabilidade de que tal evento não ocorra em nenhuma das n tentativas é $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; ou seja, a probabilidade do evento ocorrer ao menos uma vez, dentre as n é $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Como, pela observação do problema, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ aproxima-se rapidamente de $\frac{1}{e}$, temos que $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ é bem aproximado por $1 - \frac{1}{e}$. Por sua vez, $1 - \frac{1}{e}$ é bem aproximado por $\frac{2}{3}$.

d) Note que, sendo novamente p a probabilidade do jogador ganhar, $HE = p(-999) + (1-p)(1) = 1 - 1000p$. Como $HE = 50\% = \frac{1}{2} = 1 - 1000p \Rightarrow p = \frac{1}{2000}$, ou seja, $p = 0.05\%$.

e) Seguindo a ideia da letra c, note que a probabilidade do jogador perder é $1 - \frac{1}{2000}$. Assim, a chance de ele perder em n tentativas é $\left(1 - \frac{1}{2000}\right)^n$. Portanto, a chance do jogador ganhar ao menos uma vez em n tentativas é $1 - \left(1 - \frac{1}{2000}\right)^n$ e desejamos

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2000}\right)^n \geq 95\%$$

Podemos usar a aproximação do item c para chegar em $\left(1 - \frac{1}{2000}\right)^n = \left(\left(1 - \frac{1}{2000}\right)^{2000}\right)^{n/2000} \cong \left(\frac{1}{3}\right)^{n/2000}$. Assim, queremos

$$1 - \frac{1}{3^{\frac{n}{2000}}} \geq 95\% \Leftrightarrow \frac{1}{20} \geq \frac{1}{3^{\frac{n}{2000}}} \Leftrightarrow 3^{\frac{n}{2000}} \geq 20$$

Um valor aproximado para n é $n = 6000$, pois $3^3 = 27 > 20$.

Usando uma calculadora científica ou um computador, podemos fazer contas mais precisas e obter a seguinte estimativa para o número de tentativas.

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2000}\right)^n \geq 95\% \Leftrightarrow \frac{1}{20} \geq \left(1 - \frac{1}{2000}\right)^n \Rightarrow n \geq \log_{1-\frac{1}{2000}} \frac{1}{20} = 5989{,}96\ldots$$

É um valor bem próximo da estimativa que fizemos na resolução.

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Observar que o cassino ganha com probabilidade $\frac{19}{37}$ ou que o jogador ganha com probabilidade $\frac{18}{37}$ .... 0,3 ponto

Calcular corretamente o HE de $\frac{1}{37}$ .... +0,3 ponto

Item b: 0,6 ponto

Montar equação $1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p)$ ou equivalente .... 0,3 ponto

Concluir que a probabilidade de o jogador vencer é zero .... +0,3 ponto

Item c: 0,8 ponto

Notar que a probabilidade de o evento não ocorrer é $1 - \frac{1}{n}$.. 0,2 ponto

Argumentar que para não acontecer em n tentativas a probabilidade é $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ .... +0,2 ponto

Usar a ideia de complementar para ver que a probabilidade de acontecer pelo menos uma vez é $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ .... +0,2 ponto

Usar a dica para ver que esse valor de aproximade $1 - \frac{1}{e}$ que é aproximadamente $\frac{2}{3}$.. +0,2 ponto

Item d: 0,4 ponto

Chegar na expressão $p(-1000) + (1-p)(1)$ .... 0,2 ponto

Concluir que $p = \frac{1}{2000}$ ou 0,05%.. +0,2 ponto

Item e: 0,6 ponto

Chegar em $1 - \left(1 - \frac{1}{2000}\right)^n \geq 95\%$.. 0,3 ponto

Chegar no valor aproximado de 6000 tentativas (valores entre 5400 e 6600 justificados devem ser aceitos)..................... +0,3 ponto

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Solução.

a) Não. Suponha que adicionamos o dígito d nas representações decimais e chegamos num tripla pitagórica. Como a ordem dos números continua a mesma temos $(10d+3)^2 + (10d+4)^2 = (10d+5)^2 \Leftrightarrow 100d^2 + 60d + 3^2 + 100d^2 + 80d + 4^2 = 100d^2 + 100d + 5^2 \Leftrightarrow 100d^2 + 40d = 0$. Não existe um dígito d não nulo que satisfaça essa equação.

b) Sim. Note que pelo texto anterior a letra a, $(5,12,13)$ é bacana, pois $(5,12,13)$ e $(15,112,113)$ são ternas pitagóricas. Para mostrar que $(5,12,13)$ não é múltiplo de nenhuma terna pitagórica bacana, observe que $mdc(5,12,13) = 1$, isto é, não há nenhum número inteiro k que divida mutuamente $5, 12$ e 13. Assim, não pode existir k diferente de 1 tal que $(\frac{5}{k}, \frac{12}{k}, \frac{13}{k})$ seja uma terna pitagórica (pois não pode nem mesmo ser inteiro). Assim, $(5,12,13)$ é superbacana.

c) Provaremos que $A^2+B^2=C^2$. Como $A=5\cdot 10^n$, $A^2=25\cdot 10^{2n}=250\cdot 10^{2n-1}$. Como $B=125\cdot 10^{2n-2}-5$, $B^2=15625\cdot 10^{4n-4}-125\cdot 10^{2n-1}+25$. Finalmente, sendo $C=125\cdot 10^{2n-2}+5$, $C^2=15625\cdot 10^{4n-4}+125\cdot 10^{2n-1}+25$. Deste modo, como

$$A^2+B^2=250\cdot 10^{2n-1}+15625\cdot 10^{4n-4}-125\cdot 10^{2n-1}+25=15625\cdot 10^{4n-4}+125\cdot 10^{2n-1}+25=C^2,$$

Obtemos o desejado.

d) Vamos colocar o dígito 1 nos números. Temos $1A=10^{n+1}+A$, $1B=10^{2n+1}+B$ e $1C=10^{2n+1}+C$. Já sabemos que $A^2+B^2=C^2$. Provaremos que vale a condição do Teorema de Pitágoras $1A^2+1B^2=1C^2 \Leftrightarrow 10^{2n+2}+2\cdot 10^{n+1}\cdot A+A^2+10^{4n+2}+2\cdot 10^{2n+1}\cdot B+B^2=10^{4n+2}+2\cdot 10^{2n+1}\cdot C+C^2 \Leftrightarrow 10^{2n+2}+2\cdot 10^{n+1}\cdot A=2\cdot 10^{2n+1}\cdot(C-B)$. Usando os valores de A, B e C temos $2\cdot 10^{n+1}\cdot A=10^{2n+2}$ e $C-B=10$. A condição é equivalente a $10^{2n+2}+10^{2n+2}=2\cdot 10^{2n+2}$ que é verdadeira. Logo, $(1A,1B,1C)$ é uma tripla pitagórica e, portanto, (A,B,C) é uma terna pitagórica bacana.

e) Seja $d=mdc(A,B,C)$. Como $d|C$ e $d|B$, $d|C-B=10 \Rightarrow d=1{,}2{,}5\ ou\ 10$. Como C termina em 5 é ímpar, d não pode ter fator 2. Por outro lado, veja que $5|A$, $5|B$ e $5|C$, então $mdc(A,B,C)=5$.

f) Note que, sendo A_n, B_n e C_n os valores definidos para cada n ($5\cdot 10^n$, $125\cdot 10^{2n-2}-5$, $125\cdot 10^{2n-2}+5$), como $mdc(A_n,B_n,C_n)$ é 5, a única terna pitagórica bacana que pode ter como múltiplo (A_n,B_n,C_n) além dela própria é, possivelmente, $(\frac{A_n}{5},\frac{B_n}{5},\frac{C_n}{5})$. Assim, para cada n, um dentre (A_n,B_n,C_n) ou $(\frac{A_n}{5},\frac{B_n}{5},\frac{C_n}{5})$ é superbacana (pois, se $(\frac{A_n}{5},\frac{B_n}{5},\frac{C_n}{5})$ for bacana, como o mdc dos termos é 1, ela é superbacana e, caso contrário, (A_n,B_n,C_n) é superbacana). Chame de S_n a terna pitagórica acima que é superbacana. Note que se $S_i=S_j$ para $i\neq j$, comparando a primeira entrada A, temos que $5\cdot 10^i=5\cdot 10^j$, $5\cdot 10^i=10^j$ ou $10^i=10^j$ (o caso restante é simétrico em relação ao segundo. Na primeira e na terceira temos que $i=j$, um absurdo, e na terceira temos que $5=10^{j-i}$, o que também é um absurdo pois 5 não é potência de 10. Então, os S_ns são infinitas triplas superbacanas distintas, o que mostra que existem infinitas triplas superbacanas distintas.

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Montar a equação com os quadrados dos novos números .... 0,4 ponto

Provar que não existe d que satisfaça a equação .... +0,2 ponto

Item b: 0,4 ponto

Usou $(15{,}112{,}113)$ para provar que $(5{,}12{,}13)$ é bacana .... 0,2 ponto

Usou que $mdc(5{,}12{,}13)=1$ ou que $mdc(5{,}12)=1$ para concluir que é uma tripla superbacana .... +0,2 ponto

Item c: 0,4 ponto

Escreveu B^2, C^2 ou ambos .... 0,2 ponto

Provou que $A^2+B^2=C^2$ .... +0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

Notou que $1A=10^{n+1}+A$ .... 0,2 ponto

Notou que $1B=10^{2n-1}+B$, $1C=10^{2n-1}+C$ ou ambos .... +0,2 ponto

Provou a igualdade $1A^2+1B^2=1C^2$ .... +0,2 ponto

Item e: 0,4 ponto

Perceber que $mdc(A,B,C)$ divide a diferença $C-B=10$ .... 0,2 ponto

Concluir corretamente que $mdc=5$ .... +0,2 ponto

Item f: 0,6 ponto

Observou que (A_n,B_n,C_n) ou $(\frac{A_n}{5},\frac{B_n}{5},\frac{C_n}{5})$ é superbacana .... 0,3 ponto

Provou que variando o n temos infinitas ternas superbacanas .... +0,3 ponto

PROBLEMA 5 – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 3 & 4 \\ 8 & 19 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_4\leftarrow C_4-4C_1]{C_2\leftarrow C_2-2C_1,\ C_3\leftarrow C_3-3C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 9 & 12 \\ 8 & 3 & -27 & -36 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_4\leftarrow C_4+12C_2]{C_3\leftarrow C_3+9C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -21 & -28 \\ 0 & 1 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\ker(M)=\{\alpha(-21;9;1;0)+\beta(-28;12;0;1),\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}.$$

b) Sejam $z_1, z_2, \dots, z_k$ as colunas de C abaixo das colunas nulas de AC e $c_1, c_2, \dots, c_\ell$ as colunas de C abaixo das colunas não nulas de AC, que são as ℓ últimas, e $x = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_k \;\; x_{k+1} \;\; \dots \;\; x_{k+\ell}]$. Temos

$$A^* x = 0 \Leftrightarrow ACx = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.$$

A matriz C é inversível pois as operações definidas para escalonamento de colunas são inversíveis. Logo $Ay = 0 \Leftrightarrow ACx = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$. Substituindo as colunas de C, $y = Cx = z_1x_1 + z_2x_2 + \cdots + z_kx_k + c_1x_{k+1} + c_2x_{k+2} + \cdots + c_\ell x_{k+\ell} = c_1x_{k+1} + c_2x_{k+2} + \cdots + c_\ell x_{k+\ell}$, ou seja, os elementos do kernel de A são os vetores y, que são combinações lineares das colunas $c_1, c_2, \dots, c_\ell$, que são as colunas de C abaixo das colunas nulas de A^*.

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & 4 & -1 \\ 8 & 19 & -3 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 4C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - 2C_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 9 & 12 & 3 \\ 8 & 3 & -27 & -36 & -9 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 \leftarrow C_3 + 9C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 12C_2 \\ C_5 \leftarrow C_5 + 3C_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -21 & -28 & -8 \\ 0 & 1 & 9 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{aligned} V &= \{(8; -3; 0; 0) + \alpha(-21; 9; 1; 0) + \beta(-28; 12; 0; 1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(8 - 21\alpha - 28\beta; -3 + 9\alpha + 12\beta; \alpha; \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

d) A matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é $[A|B]$ com a identidade abaixo dela. Assim, a redução à forma escada de coluna encontra o kernel de $[A|B]$.

Após a redução, obtemos $\begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pois o escalonamento das colunas soma somente zeros na última coluna e entre si.

Se $B^* \neq 0$, as colunas de A não zeram B, de modo que não existe uma combinação linear $x = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n]$ de colunas de A tal que $Ax = B$, ou seja, o sistema é impossível.

Se B^*, o kernel de $[A|B]$ é a combinação linear das colunas de $\begin{bmatrix} C & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ abaixo das colunas nulas de $[A^*|B^*]$. Sendo $c_1, c_2, \dots, c_\ell$ as colunas de C abaixo das colunas nulas de $[A^*|B^*]$, o kernel de $[A|B]$ é formado pelos vetores $\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} c_\ell \\ 0 \end{bmatrix} x_\ell + \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} x_{\ell+1} = \begin{bmatrix} c_1x_1 + \cdots + c_\ell x_\ell + Px_{\ell+1} \\ x_{\ell+1} \end{bmatrix}$. Assim, note que $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_\ell x_\ell$ são os elementos do kernel de A.

$$[A|B]x = 0 \Leftrightarrow A(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_\ell x_\ell + Px_{\ell+1}) + Bx_{\ell+1} = 0$$

Se queremos $Ax = B$, devemos ter $x_{\ell+1} = -1$ e $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_\ell x_\ell - P = -P + v$, em que $v \in \ker(A)$.

Critérios

Item a: 1,5 ponto

Fez o primeiro escalonamento: .... 0,9 ponto

Fez o segundo escalonamento:.. +0,4 ponto

Conclusão: .... +0,2 ponto

Item b: 0,5 ponto

Observar algo equivalente a $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$:.. 0,3 ponto

Item c: 1,5 ponto

Fez o primeiro escalonamento: .... 0,9 ponto

Fez o segundo escalonamento:.. +0,4 ponto

Conclusão: .... +0,2 ponto

Item d: 0,5 ponto

Observar que o escalonamento de $\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gera o kernel de $[A|B]$:.. 0,3 ponto

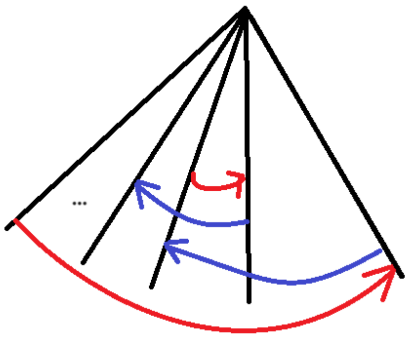
PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Solução.

a) Suponha que o ponto fique dobrado com o lado colorido para fora e o branco para dentro (como no exemplo). Vamos considerar que quando a formiga gira para a esquerda temos um ângulo positivo de 180° e para a direita de −180°. Para cada dobra vale no caminho temos um giro de 180° e a cada dobra montanha temos −180°. Se v é o número de dobras vale e m o de dobras montanha, então ao final do caminho a formiga girou no total 360°, pois voltou ao início, então $180° \cdot v + (-180°) \cdot m = 360° \Leftrightarrow v - m = 2$.

Se o lado colorido ficar para dentro teremos um resultado análogo com $v - m = -2$, mas como citado no enunciado isso não precisava ser feito.

b) Suponha que as dobras são possíveis e após planificar tome o vinco que ficou mais à direita. Há dois ângulos nesse vinco considere um deles (que marcaremos em azul) como o sentido positivo e passe pelos ângulos em sequência. Qualquer que seja a próxima dobra (vale ou montanha) o próximo ângulo (marcado em vermelho) terá sinal contrário (gira no sentido oposto por cima ou por baixo do papel). O ângulo seguinte terá sinal positivo e eles seguem alternando. No fim há um ângulo negativo que termina exatamente onde começamos, pois o total de ângulos é par como vimos no item a. As somas dos ângulos em azul e dos ângulos em vermelho são iguais e $a_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2n-1} = \alpha_0 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2n-2} \Leftrightarrow \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots - \alpha_{2n-1} = 0$.



c) Para ver que k é par, veja que cada soma $S(0, x)$ com x par é maior que a soma $S(0, x + 1) = S(0, x) - \alpha_{x+1} < S(0, x)$. Então o mínimo $S(0, k - 1)$ é atingido para algum $k - 1$ ímpar e, portanto, k é par.

Usando a mesma ideia, $S(k, j)$ atinge sem mínimo para j ímpar, pois acaba com um $-a_j$, e basta provar que $S(k, j) \geq 0$ para j ímpar.

Vamos usar essa paridade e as dicas dadas.

Para $j = k - 1$, temos $S(k, k - 1) = S(0,2n - 1) = 0$.

Para $k \leq j < 2n$, temos $S(k, j) = S(0, j) - S(0, k - 1) \geq 0$, pois $S(0, k - 1)$ é mínimo. Vale notar que o sinal de α_k é positivo nessa expressão, pois já vimos que k é par.

Para $0 \leq j \leq k - 2$, temos $S(k, j) = S(0,2n - 1) - S(j + 1, k - 1) = -S(j + 1, k - 1)$. Como $j + 1$ é par, $S(j + 1, k - 1) = S(0, k - 1) - S(0, j) \leq 0$, pois $S(0, k - 1)$ é mínimo, implicando $S(k, j) \geq 0$.

d) Podemos um exemplo que evita o problema do ângulo maior caber num menor. Tome o vinco ℓ_k e faça uma dobra vale. Em seguida vá alternando sobras vale e montanha até o final dos ângulos. O papel vai ficar "sanfonado" sem que um ângulo precise "caber" em outro e não passará do vinco ℓ_k, pois $S(k, j) \geq 0$. A dobra de ℓ_{k+j} será vale para $j = 0$ ou j ímpar e será vale caso contrário. Isso mostra que se a condição de Kawasaki for satisfeita temos pelo menos um exemplo.

e) Supondo que são v dobras vale e m dobras montanha temos $v + m$. Pelo Teorema de Maekawa sabemos que $v - m = \pm 2$. Então temos duas possibilidades $(v, m) = (n - 1, n + 1)$ ou $(v, m) = (n + 1, n - 1)$. Na primeira possibilidade temos no máximo $\binom{n}{n-1}$ maneiras, pois escolhemos quaisquer $n - 1$ vincos para serem dobras vale. Analogamente, na segunda também são no máximo $\binom{n}{n-1}$ maneiras, pois escolhemos os vincos para serem dobras montanha. Somando os casos temos a inequação $C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}) \leq 2\binom{2n}{n-1}$.

Não era necessário no problema, mas pode-se provar que quando os ângulos são todos iguais acontece a igualdade desta equação $C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}) = 2\binom{2n}{n-1}$.

f) Vamos fazer indução em n. Veja que para $n = 1$ temos $C(\alpha_0, \alpha_1) = 2$ (2 dobras vale ou 2 dobras montanha). Para o passo indutivo considere o menor ângulo α_k. Para evitar o problema de "caber" um ângulo, podemos fazer vale em ℓ_k e montanha em ℓ_{k+1} ou montanha em ℓ_k e vale em ℓ_{k+1}. Dessa forma, podemos considerar os três ângulos (α_{k-1}, α_k e α_{k+1}) como um só $\alpha_{k-1} - \alpha_k + \alpha_{k+1}$. Portanto, $C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}) \geq 2 \cdot C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1} - \alpha_k + \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2} \ldots, \alpha_{2n-1})$. Nesta última expressão podemos usar o resultado para $n - 1$ e concluir que $C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}) \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Vale reforçar que usamos indução nas dobra num cone e que o caso plano é um caso particular. Veja que no cone podemos usar a indução e diminuir o número de dobras, mas no plano não.

g) Primeiro usamos o lema no $10°$ com $k = 0$ (veja que há $k + 1$ ângulos iguais menores que seus vizinhos). Como $20° - 10° + 40° = 50°$, temos $C(20°, 10°, 40°, 50°, 60°, 60°, 60°, 60°) = \binom{2}{1} \cdot C(50°, 50°, 60°, 60°, 60°, 60°)$. Agora usamos o lema para os dois ângulos de $50°$ com $k = 1$ e obter $C(20°, 10°, 40°, 50°, 60°, 60°, 60°, 60°) = \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot C(60°, 60°, 60°, 60°)$.

Para calcular $C(60°, 60°, 60°, 60°)$, veja que temos que fazer 4 dobras e pelo Teorema de Maekawa podemos concluir que são 3 dobras vale e 1 montanha ou 3 montanha e 1 vale. Como os ângulos são todos iguais não temos o problema de "caber" a dobra e podemos observar que $C(60°, 60°, 60°, 60°) = 2 \cdot \binom{4}{1}$.

Concluímos que $C(20°, 10°, 40°, 50°, 60°, 60°, 60°, 60°) = \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2 \cdot \binom{4}{1} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 48$.

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Notar que cada dobra vale soma $180°$ e cada dobra montanha soma $-180°$ .... 0,2 ponto

Concluir a expressão do Teorema de Maekawa .... +0,2 ponto

Item b: 0,4 ponto

Provar que a soma dos deslocamentos ímpares é igual à soma dos deslocamentos pares usando sol oficial ou similar .... 0,2 ponto

Chegar na expressão dada .... +0,2 ponto

Item c: 0,8 ponto

Provar que k é par .... 0,2 ponto

Restringir ao j ímpar .... +0,2 ponto

Provar que $S(k,j) \geq 0$ para $k \leq j < n$ .... +0,2 ponto

Provar que $S(k,j) \geq 0$ para $0 \leq j < k-2$ .... +0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

Notar que se alternarmos dobras não tem problema de caber ângulo .... 0,3 ponto

Descrever de forma clara uma forma de fazer as dobras .... +0,3 ponto

Item e: 0,6 ponto

Perceber pelo Teorema de Maekawa que temos exatamente $n-1$ ou exatamente $n+1$ dobras vale .... 0,3 ponto

Usar que no máximo escolhemos os vincos livremente e provar a desigualdade .... +0,3 ponto

Item f: 0,6 ponto

Argumentar que dá problema usar dobras diferentes em ℓ_k e vale em ℓ_{k+1} .... 0,2 ponto

Usar o ângulo $\alpha_{k-1} - \alpha_k + \alpha_{k+1}$ .... +0,2 ponto

Concluir a demonstração por indução .... +0,2 ponto

Item g: 0,6 ponto

Usar o lema no $10°$ .... 0,1 ponto

Usar o lema no $50°$ .... +0,2 ponto

Contar $C(60°, 60°, 60°, 60°)$ .... +0,1 ponto

Concluir que $C(20°, 10°, 40°, 50°, 60°, 60°, 60°, 60°) = 48$. .... +0,1 ponto

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos
Solução.

a) Lembramos que $\overline{0} = \{\emptyset|\emptyset\}$ e $u = \{\overline{0}|\emptyset\}$.

Demonstração de que $\overline{0} \leq u$: Pelo teorema O, devemos ter $z_L \ngeq u$ para todo $z_L \in 0_L = \emptyset$ e $u_R \nleq 0$ para todo $u_R \in U_R = \emptyset$. Como não há elementos em 0_L e U_R, as duas sentenças são verdadeiras, ou seja, é verdade que $\overline{0} \leq u$.

Demonstração de que $u \nleq \overline{0}$: Pelo teorema O, basta encontrar $u_L \in U_L = \{\overline{0}\}$ tal que $u_L \geq \overline{0}$. $u_L = \overline{0}$ satisfaz essa propriedade. Assim, $u \nleq \overline{0}$.

b) Observando que $\overline{-1} \leq \overline{0} \leq \overline{1}$, e que temos $2^3 = 8$ subconjuntos dos três surreais que já obtivemos, temos as seguintes possibilidades:

- $\{\emptyset|\emptyset\}$
- $\{\emptyset|S\}$, em que S é qualquer um dos subconjuntos, exceto o vazio. São 7 possibilidades.
- $\{S|\emptyset\}$, em que S é qualquer um dos subconjuntos, exceto o vazio. São 7 possibilidades.

A partir de agora, verificamos os surreais $\{S|T\}$, em que S e T são subconjuntos não vazios. Temos as possibilidades:

- $\{\overline{-1}|T\}$, em que T é qualquer subconjunto não vazio de $\{\overline{0};\overline{1}\}$. Note que, como $\overline{-1} \geq \overline{-1}$, T não pode conter $\overline{-1}$. São $2^2 - 1 = 3$ possibilidades.
- $\{\overline{0}|\overline{1}\}$. Note que, em $\{\overline{0}|T\}$, T não pode conter $\overline{0}$ nem $\overline{-1}$.
- Não existe $\{\overline{1}|T\}$ com T não vazio, pois $\overline{1}$ é maior ou igual a qualquer elemento de T.
- $\{\overline{-1};\overline{0}|\overline{1}\}$. Da mesma forma, em em $\{\overline{-1};\overline{0}|T\}$, T não pode conter $\overline{0}$ nem $\overline{-1}$.

A quantidade total de possibilidades é $1 + 7 + 7 + 3 + 1 + 0 + 1 = 20$.

c) Provamos o resultado por indução na geração de $x = \frac{n}{2^k}$. Na geração 0, $x = 0 = \frac{0}{2^0}$ e $g(\overline{0}) = \lceil |0| \rceil + 0 = 0$. Suponha que o resultado é válido para todo número com gerações menores do que a de x. Então dividimos o problema em três casos:

- Se $x = n = \frac{n}{2^0}$, inteiro positivo, $x = \{\overline{n-1}|\emptyset\}$, cujos pais estão em $\{\overline{n-1}\} \cup \emptyset = \{\overline{n-1}\}$ e $g(\overline{n}) = g(\overline{n-1}) + 1$. Assim, $g(\overline{n-1}) = g(\overline{n}) - 1$, ou seja, $\overline{n-1}$ tem geração menor do que a de $\overline{x}$, e $g(\overline{x}) = g(\overline{n}) = \lceil |n-1| \rceil + 1 = n = \lceil |x| \rceil + 0$.
- Se $x = n = \frac{n}{2^0}$, inteiro negativo, $x = \{\overline{n+1}|\emptyset\}$, cujos pais estão em $\{\overline{n+1}\} \cup \emptyset = \{\overline{n+1}\}$ e $g(\overline{n}) = g(\overline{n+1}) + 1$. Assim, $g(\overline{n+1}) = g(\overline{n}) - 1$, ou seja, $\overline{n+1}$ tem geração menor do que a de $\overline{x}$, e $g(\overline{x}) = g(\overline{n}) = \lceil |n+1| \rceil + 1 = -n - 1 + 1 = -n = \lceil |x| \rceil + 0$.
- Se $x = \frac{n}{2^k}$, n ímpar, e $k > 0$, $x = \left\{\overline{\frac{n-1}{2^k}}\middle|\overline{\frac{n+1}{2^k}}\right\}$, cujos pais estão em $\left\{\overline{\frac{n-1}{2^k}}\right\} \cup \left\{\overline{\frac{n+1}{2^k}}\right\} = \left\{\overline{\frac{n-1}{2^k}}; \overline{\frac{n+1}{2^k}}\right\}$ e $g(\overline{x})$ é igual a 1 mais maior dos valores de $g\left(\overline{\frac{n-1}{2^k}}\right)$ e $g\left(\overline{\frac{n+1}{2^k}}\right)$. Note que as gerações de $\overline{\frac{n-1}{2^k}}$ e $\overline{\frac{n+1}{2^k}}$ são ambas menores do que a de $\overline{x}$. Dividimos esse caso em mais subcasos:
    - Se $k = 1$, $\frac{n-1}{2}$ e $\frac{n+1}{2}$ são ambos inteiros e $g(\overline{x}) = 1 + \max\left(\left|\frac{n-1}{2}\right|, \left|\frac{n+1}{2}\right|\right)$. Se $n > 0$, $g(\overline{x}) = 1 + \frac{n+1}{2} = \left\lceil \left|\frac{n}{2}\right| \right\rceil + 1$. Se $n < 0$, $g(\overline{x}) = 1 + \left|\frac{n-1}{2}\right| = \lceil |x| \rceil + 1$.
    - Nos demais casos, sendo n ímpar, $n-1$ e $n+1$ são pares consecutivos. Um desses números é múltiplo de 4. Se é $n-1$, $n-1 = 2^t m$, com m ímpar e $t \geq 2$, e $\frac{n-1}{2^k} = \frac{m}{2^{k-t}}$ e $g\left(\overline{\frac{n-1}{2^k}}\right) < \left\lceil \left|\frac{n-1}{2^k}\right| \right\rceil + k$ (note que $k - t$ pode ser negativo, e não necessariamente $g\left(\overline{\frac{n-1}{2^k}}\right) = \left\lceil \left|\frac{n-1}{2^k}\right| \right\rceil + k - t$). Além disso, $n+1$ é duas vezes um ímpar, de modo que $\frac{n+1}{2^k} = \frac{\frac{n+1}{2}}{2^{k-1}}$ e $g\left(\overline{\frac{n+1}{2^k}}\right) = \left\lceil \left|\frac{n+1}{2^k}\right| \right\rceil + k - 1$. Finalmente, note que $\left\lceil \left|\frac{n-1}{2^k}\right| \right\rceil \leq \left\lceil \left|\frac{n}{2^k}\right| \right\rceil = \left\lceil \left|\frac{n+1}{2^k}\right| \right\rceil$, pois $\frac{n+1}{2^k} = \frac{\frac{n+1}{2}}{2^{k-1}}$ não é inteiro. Com isso, $g(\overline{x}) = 1 + \max\left(g\left(\overline{\frac{n-1}{2^k}}\right), g\left(\overline{\frac{n+1}{2^k}}\right)\right) = 1 + g\left(\overline{\frac{n+1}{2^k}}\right) = \left\lceil \left|\frac{n}{2^k}\right| \right\rceil + k - 1 + 1 = \lceil |x| \rceil + k$.
    - Se o múltiplo de 4 é $n+1$, $n+1 = 2^t m$, com m ímpar e $t \geq 2$. A conta é a mesma que anterior trocando $n+1$ e $n-1$ de lugar.

Como todos os casos foram cobertos, o resultado segue por indução.

d) Provamos o resultado por indução sobre a geração de x. Para a geração 0, $x = \overline{0}$ e

$$\overline{0} + \overline{0} = \{(\emptyset + \overline{0}) \cup (\overline{0} + \emptyset) | (\emptyset + \overline{0}) \cup (\overline{0} + \emptyset)\} = \{\emptyset|\emptyset\} = \overline{0}.$$

Suponha agora que o resultado é válido para todo surreal nas gerações anteriores às de $x = \{X_L|X_R\}$. Lembre que cada elemento de X_L e X_R é de alguma geração anterior à de x. Então $X_L + \overline{0} = \{x_L + \overline{0} : x_L \in X_L\} = X_L$ e, analogamente, $X_R + \overline{0} = X_R$. Logo

$$x + \overline{0} = \{(X_L + \overline{0}) \cup (x + \emptyset) | (X_R + \overline{0}) \cup (x + \emptyset)\} = \{X_L \cup \emptyset | X_R \cup \emptyset\} = \{X_L|X_R\} = x$$
$$\overline{0} + x = \{(\emptyset + x) \cup (\overline{0} + X_L) | (\emptyset + \overline{0}) \cup (\overline{0} + X_R)\} = \{\emptyset \cup X_L | \emptyset \cup X_R\} = \{X_L|X_R\} = x.$$

e) Observando que $\overline{2} = \{\overline{1}|\emptyset\}$,

$$\overline{2} + \overline{2} = \{(\overline{1} + \overline{2}) \cup (\overline{2} + \overline{1}) | (\emptyset + \overline{2}) \cup (\overline{2} + \emptyset)\} = \{\overline{1} + \overline{2}|\emptyset\}$$

Lembrando que $\overline{1} = \{\overline{0}|\emptyset\}$,

$$\overline{1} + \overline{2} = \{(\overline{0} + \overline{2}) \cup (\overline{1} + \overline{1}) | (\emptyset + \overline{2}) \cup (\overline{1} + \emptyset)\} = \{\overline{2} \cup (\overline{1} + \overline{1})|\emptyset\}$$
$$\overline{1} + \overline{1} = \{(\overline{0} + \overline{1}) \cup (\overline{1} + \overline{0}) | (\emptyset + \overline{1}) \cup (\overline{1} + \emptyset)\} = \{\overline{1}|\emptyset\} = \overline{2}$$
$$\overline{1} + \overline{2} = \{\overline{2} \cup \overline{2}|\emptyset\} = \{\overline{2}|\emptyset\} = \overline{3}$$

Finalmente,

$$\overline{2} + \overline{2} = \{\overline{1} + \overline{2}|\emptyset\} = \{\overline{3}|\emptyset\} = \overline{4}.$$

f) O único y para o qual $g(y) = 0$ é $y = \overline{0}$, logo $g(x + \overline{0}) = g(x) = g(x) + 0 = g(x) + g(\overline{0})$.

g) Sejam $x = \{X_L|X_R\}$ e $y = \{Y_L|Y_R\}$. Então

$$x + y = \{(X_L + y) \cup (x + Y_L) | (X_R + y) \cup (x + Y_R)\},$$

e os pais de $x + y$ são os elementos de $P = (X_L + y) \cup (x + Y_L) \cup (X_R + y) \cup (x + Y_R)$. Então procuramos o maior valor entre $g(x_L + y)$, $x_L \in X_L$, $g(x + y_L)$, $y_L \in Y_L$, $g(x_R + y)$, $x_R \in X_R$ e $g(x + y_R)$, $y_R \in Y_R$. Como $g(x_L), g(x_R) \leq g(x) - 1$ e

$g(y_L), g(y_R) \leq g(y) - 1$, em que a igualdade ocorre pelo uma vez para cada desigualdade, pela hipótese de indução $g(x_L + y) = g(x_L) + g(y)$, $g(x + y_L) = g(x) + g(y_L)$, $g(x_R + y) = g(x_R) + g(y)$ e $g(x + y_R) = g(x) + g(y_R)$. Todos esses valores são menores ou iguais a $g(x) + g(y) - 1$ e a igualdade ocorre pelo menos uma vez. Assim, $1 + \sup\limits_{x_P \in P} g(x_P) = 1 + g(x) + g(y) - 1 = g(x) + g(y)$, o que completa a indução e a demonstração.

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Provar que $\overline{0} \leq u$ .... 0,3 ponto

Provar que $u \nleq \overline{0}$ .... 0,3 ponto

Item b: 0,8 ponto

Contar os casos com um dos conjuntos vazio .... 0,4 ponto

Contar os casos com os dois não vazios .... 0,4 ponto

Item c: 1,0 ponto

Citar indução e fazer a base .... 0,2 ponto

Resolver o caso inteiro positivo .... +0,2 ponto

Resolver o caso inteiro negativo .... +0,2 ponto

Resolver o caso em que o número não é inteiro .... +0,4 ponto

Item d: 0,6 ponto

Citar indução e fazer $\overline{0} + \overline{0}$ .... 0,3 ponto

Provar o passo indutivo .... +0,3 ponto

Item e: 0,8 ponto

Calcular $\overline{1} + \overline{1}$ .... 0,2 ponto

Calcular $\overline{1} + \overline{2}$ usando o anterior .... +0,2 ponto

Calcular $\overline{2} + \overline{2}$ usando os anteriores .... +0,4 ponto

Apenas resposta $\overline{4}$ não deve pontuar neste item.

Item f: 0,6 ponto

Notar que $g(y) = 0$ apenas para $y = \overline{0}$, ... 0,3 ponto

Concluir que $g\left(x + \overline{0}\right) = g(x) = g(x) + 0 = g(x) + g\left(\overline{0}\right)$ .... +0,3 ponto

Item g: 0,6 ponto

Observar que $g(x_L), g(x_R) \leq g(x) - 1$ e $g(y_L), g(y_R) \leq g(y) - 1$, ... 0,3 ponto

Concluir a demonstração por indução .... +0,3 ponto