XLIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2020)
Soluções e Critérios de Correção

www.opm.mat.br

Utilize o índice a seguir para ver o problema que você quiser.

O problema 5 do Gama tem listas adicionais que podem ser úteis.

Lista de valores de $c < 10^8$ que satisfazem o item c

Lista de valores de $c < 10^8$ que "quase" satisfazem o item c (todas quantidades de dígitos iguais, exceto zero)

XLIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2020)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

PROBLEMA 1 – Nível Alfa – Velozes e Furiosos – Valor: 2 pontos

Solução

a) Usando como velocidade 240 km/h e supondo que o avião ficou 13 minutos nessa velocidade, o comprimento aproximado da pista é pelo menos $13\text{ min}\cdot\frac{1\text{ h}}{60\text{ min}}\cdot\frac{240\text{ km}}{1\text{ h}}=52\text{ km}$.

b) Como $52\text{ km}=52000\text{ m}$, essa distância corresponde a $\frac{52000}{3700}\cong 14{,}05$ pistas do aeroporto de Guarulhos.

c) O avião ficou na pista efetivamente por $29{,}6\text{ km}\cdot\frac{1\text{ h}}{185\text{ km}}\cdot\frac{60\text{ min}}{1\text{ h}}=9{,}6\text{ min}=9\text{ min }36\text{ s}$.

Critérios de correção

Item a: 1,0 ponto

Lembramos que a resposta do item a é 52 km.

As pontuações a seguir podem ser somadas.

• Converter 13 minutos em horas .... 0,5 ponto
• Concluir .... +0,5 ponto

A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Só a resposta .... 0,5 ponto

Item b: 0,5 ponto

Esse item usa o resultado obtido no item a. Se o resultado do item a estiver errado mas a conta estiver correta os pontos devem ser dados. Por exemplo, se o resultado obtido for 37 km e o estudante obtiver $\frac{37000}{3700}=10$ no item b, ele ganha 0,5 ponto. A resposta correta é aproximadamente $14{,}05$.

As pontuações a seguir devem ser somadas.

• Montar a conta (possivelmente usando regra de três) .... 0,2 ponto
• Concluir .... +0,3 ponto
• Esquecer de converter km para m (ou vice-versa) .... –0,1 ponto
• Erro de conta .... –0,1 ponto

A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Só a resposta .... 0,2 ponto

Item c: 0,5 ponto

A resposta é 9,6 min. Não penalizar caso haja conversão de 0,6 min em segundos.

As pontuações a seguir devem ser somadas.

• Obter o tempo em horas ($0{,}16$ h) .... 0,3 ponto
• Concluir .... +0,2 ponto

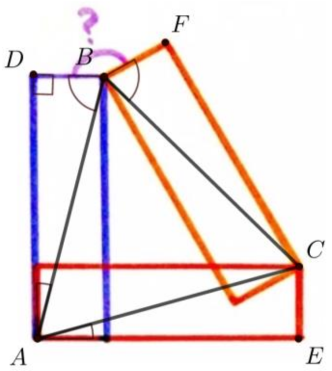
A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Só a resposta .... 0,2 ponto

PROBLEMA 2 – Nível Alfa – Retângulos – Valor: 3 pontos

Solução

a) Considere a figura a seguir. O triângulo ABC é equilátero, pois $AB = BC = CA$ são diagonais dos retângulos congruentes.



b) Como o triângulo ABC é equilátero, cada um de seus ângulos mede $60°$. Veja que os triângulos ADB e AEC são congruentes e os ângulos $\angle DAB$ e $\angle EAC$ possuem a mesma medida. Como $\angle BAC = 60°$ temos

$$\angle DAB = \frac{90° - 60°}{2} = 15°$$

Temos $\angle ADB = 90°$ e usando que a soma dos ângulos internos do triângulo ABD é $180°$ podemos concluir que

$$\angle ABD = 180° - \angle ADB - \angle DAB = 180° - 90° - 15° \Leftrightarrow \angle ABD = 75°$$

Os ângulos são $\angle DAB = 15°$, $\angle ABD = 75°$ e $\angle ADB = 90°$.

c) Sabemos por congruência e pelos itens anteriores que $\angle FBC = 75°$, $\angle CBA = 60°$ e $\angle ABD = 75°$. Daí,

$$\angle DBF = 360° - \angle FBC - \angle CBA - \angle ABD = 360° - 210° \Leftrightarrow \angle DBF = 150°$$

Critérios de correção

Item a: 0,6 ponto

• Afirmar que os lados são medidas de diagonais de retângulos congruentes.. 0,4 ponto

Item b: 1,2 ponto

• Afirmar que $\angle ADB = 90°$ (pode ser apenas na figura).. 0,4 ponto
• Provar que $\angle DAB = 15°$ .... 0,4 ponto
• Provar que $\angle ABD = 75°$ .... 0,4 ponto

A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Só as respostas sem justificativa, por exemplo numa figura.. 0,6 ponto

Item c: 1,2 ponto

• Escrever as medidas dos ângulos $\angle FBC = 75°$, $\angle CBA = 60°$ e $\angle ABD = 75°$ (pode ser só figura) .... 0,3 ponto cada
• Provar que $\angle DBF = 150°$ .... +0,3 ponto

A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Só a resposta $\angle DBF = 150°$ sem justificativa, por exemplo numa figura .... 0,6 ponto

PROBLEMA 3 – Nível Alfa – Placas – Valor: 3 pontos

Solução

a) Há 26 possibilidades para cada letra e 10 para cada dígito. Assim, o total de possíveis placas no Padrão Mercosul é

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^4 \cdot 10^3 = 456\,976\,000.$$

b) Cada placa no padrão anterior tem correspondente no padrão Mercosul. Assim, há $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 9999$ possíveis placas no padrão anterior (o final pode ser qualquer número de 0001 a 9999), dando uma porcentagem de

$$\frac{26^3 \cdot 9999}{26^4 \cdot 1000} \cdot 100\% = \frac{9999}{260}\% \cong 38{,}46\%.$$

Observações:

• A restrição de não haver 0000 não faz diferença grande na porcentagem; sem a restrição, teríamos $\frac{1000}{26}\% \cong 38{,}46\%$. A diferença é de $\frac{1}{260} \cong 0{,}00385$ ponto percentual.

• A quantidade de placas no padrão anterior é $26^3 \cdot 9999 = 175\,742\,424$.

c) A quantidade estimada de veículos adicionais no estado de São Paulo em 2020 é 2,6% de 30% de 58,8 milhões $= 0{,}026 \cdot 0{,}30 \cdot 58{,}8 = 458\,640$.

A quantidade de placas começando com `OPM` é $10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26\,000$, que é menor do que $458\,640$.

Logo não é possível utilizar apenas placas no Padrão Mercosul com as letras iniciais `OPM` para emplacar os veículos correspondentes ao crescimento estimado da frota nacional no estado de São Paulo de 2019 para 2020.

Critérios de correção

Item a: 1,2 ponto

Lembramos que a resposta é $26^4 \cdot 10^3 = 456\,976\,000$.

As seguintes pontuações podem ser somadas.

• Obter $26^4 \cdot 10^3$ ou $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$........ 1,0 ponto
• Cálculo........ +0,2 ponto

Item b: 0,9 ponto

O problema consiste em calcular a quantidade de placas no padrão antigo ($26^3 \cdot 9999 = 175\,742\,424$) e fazer uma divisão (obter $38{,}46\%$).

As seguintes pontuações podem ser somadas.

• Obter a quantidade de placas no padrão antigo (obter $26^3 \cdot 9999$ já é suficiente; não é necessário efetuar esse cálculo).. 0,6 ponto
• Obter o valor $38{,}46\%$........ +0,3 ponto

As seguintes pontuações parciais NÃO se somam entre si nem com as outras.

• Só obter a resposta $38{,}46\%$........ 0,3 ponto
• Obter que a quantidade de placas no padrão antigo é $26^3 \cdot 10^4$........ 0,3 ponto
• Obter o valor $38{,}46\%$ a partir da quantidade $26^3 \cdot 10^4$........ 0,6 ponto

Item c: 0,9 ponto

O problema tem três partes: calcular a quantidade de placas no Padrão Mercosul começando com `OPM` (26000), estimar a quantidade de carros correspondentes ao crescimento de 2019 a 2020 em São Paulo (458640), e comparar esses dois valores/concluir o problema.

As seguintes pontuações podem ser somadas.

• Calcular a quantidade de placas no Padrão Mercosul começando com `OPM` ($26 \cdot 10^3$ serve)........ 0,3 ponto
• Estimar a quantidade de carros correspondentes ao crescimento de 2019 a 2020 em São Paulo (ver a ordem de grandeza, ou seja, afirmar que é maior do que $100\,000$ é suficiente)........ +0,3 ponto
• Concluir o problema........ +0,3 ponto

Alguns **resultados parciais** na **estimativa do crescimento** valem **0,3 ponto**:

• Estimar a frota no estado de São Paulo em 2019 (são $17{,}64$ milhões)
• Estimar a frota nacional em 2020 (são aproximadamente $60{,}33$ milhões)
• Estimar a frota no estado de São Paulo em 2020 (são aproximadamente $18{,}10$ milhões)

As outras duas partes (**placas começando com `OPM` e concluir**) **não têm pontuação parcial**.

PROBLEMA 4 – Nível Alfa – Pilha de cartas – Valor: 3 pontos

Solução

a) Somando de 3 em 3 e alternando os naipes, as próximas 4 cartas são seis de espadas (6♠), nove de ouros (9♦), dama de paus (Q♣) e dois de copas (2♥). Note que $12 + 3 = 15$, de modo que o número na carta correspondente é $15 - 13 = 2$.

b) Para obter a carta que vem depois, basta repetir a operação: ir para o próximo naipe e somar três na carta, subtraindo 13 se for necessário.

Para obter a carta que vem antes, fazemos a operação inversa: ir para o naipe anterior e subtrair três na carta, somando 13 se for necessário.

b.1) A próxima é oito de ouros (8♦) e a anterior é dois de copas (2♥).

b.2) A próxima é cinco de copas (5♥) e a anterior é dama de ouros (Q♦). Note que $2 - 3 = -1$, então somamos 13 para obter $-1 + 13 = 12$, que corresponde à dama.

c) Considere a quinta carta na pilha: mudamos de naipe quatro vezes e somamos um total de $4 \cdot 3 = 12$ no número; o naipe é o mesmo da primeira carta e o número é também o mesmo, pois ao somar um total de 12 em algum momento subtraímos 12. Ou seja, a quinta carta deveria ser a mesma do que a primeira, o que não é possível pois as cartas não devem se repetir.

Observação: Na verdade não é possível formar a pilha mesmo se o número mudasse em qualquer valor d constante: na décima-terceira mudaríamos de naipe 12 vezes, voltando ao naipe da primeira carta, e o número seria somado de um total de $12d$, voltando ao mesmo número. Assim, qualquer ordenação do tipo teria no máximo 12 cartas sem repetir.

d) Primeiro note que temos $4n$ cartas. A carta na posição $k + 1$ ocorre após k mudanças de naipe e com o número somado em $3k$. Ocorre repetição quando k é múltiplo de 4 e $3k$ é múltiplo de n, ou seja, quando $k = 4m$ e $3 \cdot 4m = 12m$ é múltiplo de n. Assim é possível fazer a pilha de Si Stebbins quando o menor valor de m para o qual isso acontece é n. Isso ocorre se, e somente se, n não tem fatores comuns com 12. Os possíveis valores de n são, então, 5, 7 e 11.

Critérios de correção

Item a: 0,8 ponto

Lembrando que a sequência correta é (6♠, 9♦, Q♣, 2♥), cada estudante receberá neste item somente uma das cinco pontuações a seguir:

- Nenhuma carta correta .... 0 ponto
- Uma carta correta .... 0,2 ponto
- Duas cartas corretas .... 0,4 ponto
- Três cartas corretas .... 0,6 ponto
- Todas as cartas corretas .... 0,8 ponto

Uma carta é considerada “correta” quando é a carta certa ou é obtida de uma anterior errada usando a regra corretamente. Por exemplo, na sequência (6♠, 10♦, K♣, 2♥) há três cartas corretas: a primeira, a terceira (por ter sido obtida corretamente da carta errada 10♦) e a última.

Não são dados pontos parciais caso o naipe estiver errado.

Item b: 0,8 ponto

Nesse item deve-se apresentar quatro cartas: 8♦, 2♥, 5♥ e Q♦. Não é necessário explicar a regra. Cada estudante receberá neste item somente uma das cinco pontuações a seguir:

- Nenhuma carta correta .... 0 ponto
- Uma carta correta .... 0,2 ponto
- Duas cartas corretas .... 0,4 ponto
- Três cartas corretas .... 0,6 ponto
- Todas as cartas corretas .... 0,8 ponto

Neste caso, cada carta está correta se, e somente se, a regra é seguida corretamente. Assim, basta comparar as respostas com as quatro cartas listadas na resposta.

Não são dados pontos parciais caso somente o naipe ou o número estiverem errados. Por exemplo, 7♥ no lugar de 5♥ ou 8♥ no lugar de 8♦ não ganham ponto.

Item c: 0,7 ponto

Uma resposta para esse item é considerada correta quando escreve que, não importando com que carta começamos a pilha, após menos de 48 interações a carta se repete **E** mostra como e por que essa repetição ocorre.

As seguintes pontuações parciais NÃO se somam entre si.

- Somente mostrar um exemplo particular de carta inicial, com todos os passos corretos, como por exemplo, 4♠, 7♦, 10♣, A♥, 4♠ .... 0,3 ponto
- Mostrar um exemplo particular de carta inicial, com todos os passos corretos, como por exemplo, 4♠, 7♦, 10♣, A♥, 4♠, e somente citar que “se começar com qualquer outra carta a quinta carta sempre repete” .... 0,5 ponto

Item d: 0,7 ponto

Neste item espera-se que o estudante estabeleça um critério simples para que a pilha de Si Stebbins seja possível <u>**E**</u> o utilize para encontrar os valores de n (que são 5, 7 e 11).

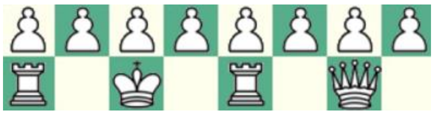
As três pontuações a seguir se somam.

• Encontrar os valores corretos (ou seja, dizer que são 5, 7 e 11 e nenhum outro) .... 0,3 ponto • Qualquer resposta diferente, exceto incluir por distração 1 e/ou 13 .... 0,0 ponto • Justificativa (explicitar que dá certo se, e somente se, o menor k múltiplo de 4 com $12k$ múltiplo de n é $4n$, ou equivalente). É possível ganhar esses pontos e errar a resposta................ +0,4 ponto

PROBLEMA 5 – Nível Alfa – Chess 960 – Valor: 3 pontos

Solução

a) Não. Se ocuparmos todas as casas pretas colocando torre, rei, torre e rainha nessa ordem, então não é possível colocar os bispos em casas de cores diferentes, pois há apenas casas brancas.



b) Na Disposição X temos 1 posição possível para o bispo numa casa preta e 4 posições para o bispo numa casa branca. Usando o princípio multiplicativo temos $1 \times 4 = 4$ maneiras de posicionar os bispos.

Usando a mesma ideia, na Disposição Y temos 3 posições para o bispo numa casa preta e 2 posições para o bispo numa casa branca. Portanto, são $3 \times 2 = 6$ maneiras de posicionar os bispos.

c) Seguindo a ordem sugerida, temos 4 opções para o bispo da casa preta, 4 opções para o bispo na casa branca e 6 opções para a rainha.

Agora temos 5 casas livres e devemos colocar os 2 cavalos. Temos 5 opções para o primeiro cavalo, 4 opções para o segundo e contamos cada par de casas duas vezes. Se escolhemos a primeira casa livre e depois a segunda ou a segunda e depois a primeira temos a mesma configuração de cavalos. Por isso, são $\frac{5\times 4}{2} = 10$ maneiras de posicionar os cavalos.

Resta apenas 1 maneira de concluir, pois temos 3 casas livres para 3 peças e o rei deve estar entre as duas torres.

Usando o princípio multiplicativo, o número de disposições iniciais possíveis é

$$4 \times 4 \times 6 \times 10 \times 1 = 960$$

Critérios de correção

Item a: 0,6 ponto

- Afirmar que nem sempre será possível seguir a regra II após colocar rei, duas torres e rainha .... 0,4 ponto
- Justificativa correta, colocando as 4 peças numa das cores ou equivalente (o desenho não é obrigatório) .... +0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto

- 4 maneiras da disposição X .... 0,3 ponto
- 6 maneiras da disposição Y .... 0,3 ponto

Item c: 1,8 ponto

- 4 maneiras de colocar o bispo da casa preta .... 0,3 ponto
- 4 maneiras de colocar o bispo da casa branca .... 0,3 ponto
- 6 maneiras de colocar a rainha .... 0,3 ponto
- 10 maneiras de colocar os cavalos (pode ser feito exibindo todas as possibilidades) .... 0,3 ponto
- 1 maneira de colocar o rei e as duas torres .... 0,3 ponto
- Conclusão correta de que são 960 disposições com os 5 passos anteriores .... +0,3 ponto

PROBLEMA 6 – Nível Alfa – Lema de Titu – Valor: 4 pontos

Solução

a) As áreas são

- $R_1 = \frac{x}{a} \cdot (a+b)x = \frac{x^2(a+b)}{a}$ $R_2 = \frac{y}{b} \cdot (a+b)y = \frac{y^2(a+b)}{b}$
- $R_3 = \frac{y}{a} \cdot (x+y)a = x(x+y)$ $R_4 = \frac{y}{b} \cdot (x+y)b = y(x+y)$

b) Faremos usando 4 passos

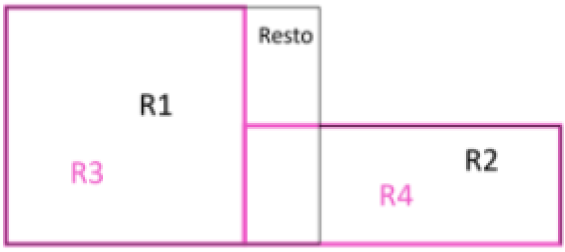
1. Primeiro, provemos que que o comprimento do R_1 é maior que ou igual ao comprimento de R_3:

$$(a+b)x \geq a(x+y) \Leftrightarrow ax + bx \geq ax + ay \Leftrightarrow bx \geq ay \Leftrightarrow \frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$$

2. Agora, observemos que o comprimento de R_1 mais o comprimento de R_2 é igual ao comprimento de R_3 mais o comprimento de R_4 já que

$$(a+b)x + (a+b)y = (a+b)(x+y) = (x+y)a + (x+y)b$$

3. Agora como a altura de R_1 é igual à altura de R_3 e a altura de R_2 é igual à altura de R_4, se colocarmos a figura azul sobre a figura rosa, vai acontecer o seguinte:



Veja que pelo fato de $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$, vai sobrar uma pequena área que chamamos de "Resto" na figura e por isso, a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2 é maior ou igual à soma das áreas dos retângulos R_3 e R_4.

4. Dado que a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2 é maior ou igual à soma das áreas dos retângulos R_3 e R_4, usando as expressões de (a):

$$\frac{x^2(a+b)}{a} + \frac{y^2(a+b)}{b} \geq x(x+y) + y(y+x) = (x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

c) Somando $\frac{z^2}{c}$ dos dois lados do lema de Titu do item anterior

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c}$$

Aplicando novamente o lema de Titu, só que agora para $(a+b), c, (x+y), z$:

$$\frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

Concluímos que

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

Critérios de correção

Ver próxima página

Critérios de correção

Item a: 0,8 ponto

• Áreas de R_1, R_2, R_3 e R_4 .... 0,2 ponto cada

Item b: 2,0 pontos

Vamos separar a solução em duas partes. A parte 1 – geometria vale 0,6 ponto e possui dois critérios possíveis. A parte 2 – álgebra vale 0,4 ponto e o aluno só pode ter pontuação maior que zero se tiver pontuado na parte 1.

Parte 1 – geometria: 1,2 ponto

• Provar que comprimento de R_1 é maior do que o comprimento de R_3 ou equivalente usando R_2 e R_4 .... 0,6 ponto
• Observar que a soma dos comprimentos de R_1 e R_2 é igual à soma dos comprimentos de R_3 e R_4 ou escrever que $(a+b)x+(a+b)y=(x+y)a+(x+y)b$ .... 0,6 ponto

A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Apenas sobrepor as figuras fornecidas (pode ser só um desenho) sem argumentos .... 0,6 ponto

Parte 2 – álgebra: 0,8 ponto (apenas para alunos que tenham pontuado na parte 1)

• Escrever $\frac{x^2(a+b)}{a}+\frac{y^2(a+b)}{b}\geq x(x+y)+y(x+y)$. .... 0,4 ponto
• Concluir que $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}$ .... +0,4 ponto

Item c: 1,2 ponto

• Somar $\frac{z^2}{c}$ para obter a expressão $\frac{(x+y)^2}{a+b}+\frac{z^2}{c}$.................... 0,6 ponto
• Usar o Lema de Titu para duas variáveis para concluir .... +0,6 ponto

A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Demonstrações usando outras ferramentas como Cauchy-Schwarz .... 0,8 ponto

PROBLEMA 7 – Nível Alfa – Números em fila – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

Solução

a) Se 28 é número do meio, ele deve estar envolvido em uma operação com dois de seus vizinhos, que são 9, 19, 10, 10 e 90.

Observando que

$$
\begin{aligned}
a+b=c &\Leftrightarrow c-b=a \Leftrightarrow c-a=b\\
a-b=c &\Leftrightarrow c+b=a \Leftrightarrow a-c=b\\
a\times b=c &\Leftrightarrow c\div b=a \Leftrightarrow c\div a=b\\
a\div b=c &\Leftrightarrow c\times b=a \Leftrightarrow a\div c=b,
\end{aligned}
$$

se c é o resultado de uma operação envolvendo a e b então tanto a como b é o resultado de uma operação envolvendo os outros dois números.

Sejam v e v' os outros dois números na operação, ou seja, $v\square 28 = v'$, em que $\square$ deve ser preenchido com $+, -, \times$ ou $\div$. Nesse caso, 28 precisa ser o resultado de alguma operação com v e v'. Note que nas quatro contas acima, 28 ocupa a posição de b, então $28 = v - v'$ ou $28 = v' - v$ ou $28 = v \div v'$ ou $28 = v' \div v$. Os possíveis valores positivos de $v - v'$ (ou $v' - v$) são $90 - 9 = 81$, $90 - 19 = 71$, $90 - 10 = 80$, $19 - 9 = 10$, $19 - 10 = 9$, e $10 - 9 = 1$, nenhum deles igual a 28, e os únicos valores inteiros de $v \div v'$ (ou de $v' \div v$) são $90 \div 10 = 9$ e $90 \div 9 = 10$. Assim, 28 não pode estar no meio de uma operação.

É claro que também podemos listar todos os $5 \cdot 4 = 20$ pares (v, v') e testar.

b) Se 28 é o resultado de uma conta, $a\square v = 28$ para algum vizinho v de 28 e um vizinho a de v.

Isolando a podemos ter $a = 28 - v$ ou $a = 28 + v$ ou $a = 28 \div v$ ou $a = v \times 28$. Os dois últimos são impossíveis pois nenhum vizinho de 28 é seu divisor e $v \times 28 > 100$ para todo v, e nenhum número no tabuleiro é maior do que 100. Sobram as possibilidades $a = 28 - 9 = 19$ ou $a = 28 - 19 = 9$ ou $a = 28 - 10 = 18$ ou $a = 28 + 9 = 37$ ou $a = 28 + 10 = 38$ ou $a = 28 + 19 = 47$ ou $a = 28 + 90 = 118$. Desses, somente aparecem 9, 18 e 19.

As possibilidades são então $9 \to 19 \to 28$, $19 \to 9 \to 28$ e $18 \to 10 \to 28$. Há duas maneiras de obter a primeira possibilidade.

24	36	25	63	1
60	11	7	9	64
6	9	2	8	8
19	10	10	80	72
9	28	90	18	8

24	36	25	63	1
60	11	7	9	64
6	9	2	8	8
19	10	10	80	72
9	28	90	18	8

24	36	25	63	1
60	11	7	9	64
6	9	2	8	8
19	10	10	80	72
9	28	90	18	8

24	36	25	63	1
60	11	7	9	64
6	9	2	8	8
19	10	10	80	72
9	28	90	18	8

c) Já mostramos no item a que 28 não é número do meio. Então se a lista não termina em 28, 28 é resultado de uma conta e é utilizado em outra. Ou seja, $a\square v = 28$ e $28\square v' = c$ para v, v' vizinhos distintos de 28, a vizinho de v e c vizinho de v'. Mas $28\square v' = c$ então $c \boxdot v' = 28$, em que $\boxdot$ é a operação inversa de $\square$. Então juntamos dois dos caminhos que encontramos na parte anterior. Como quaisquer dois dos três primeiros não podem ocorrer simultaneamente, combinamos o quarto com os outros três, obtendo as seguintes possibilidades:

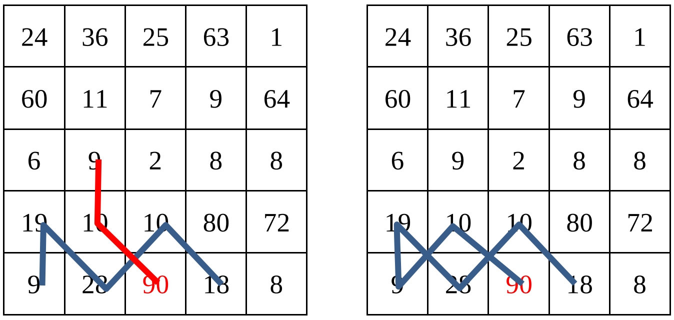
24	36	25	63	1
60	11	7	9	64
6	9	2	8	8
19	10	10	80	72
9	28	90	18	8

24	36	25	63	1
60	11	7	9	64
6	9	2	8	8
19	10	10	80	72
9	28	90	18	8

24	36	25	63	1
60	11	7	9	64
6	9	2	8	8
19	10	10	80	72
9	28	90	18	8

De qualquer forma, os únicos vizinhos que sobram para o número inicial 90 são 10 e 80. Os resultados de $90\square w$, em que w é 10 ou 80 são $90 + 10 = 100$, $90 - 10 = 80$, $90 \times 10 = 900$, $90 \div 10 = 9$, $90 + 80 = 170$, $90 - 80 = 10$ ou $90 \times 80 = 7200$. A única possibilidade numérica é $90 \div 10 = 9$, e o terceiro número é o 9 do canto inferior esquerdo ou o 9 na terceira linha. Na primeira possibilidade, usar o 9 do canto não permite continuar no caminho, e usar o 9 da terceira linha isola o 9 do canto. Na terceira possibilidade, somos obrigados a usar o 9 da terceira linha e isso obriga o 19 se envolver em alguma operação com 6. Nenhuma delas envolve os dois vizinhos de 6, 60 e 11. Sobra somente a segunda possibilidade.

Se usarmos o 9 da terceira linha, ele não pode fazer uma operação com o 6, pois só podemos obter $9 + 6 = 15$, $9 - 6 = 3$ ou $9 \times 6 = 54$, que não estão disponíveis. Assim, 6 deve ser vizinho de 60 e de 11. Não há operações envolvendo 6, 11 e 60, e as operações com 6 e 11 devem envolver 5, 66, 17, nenhum deles disponível.



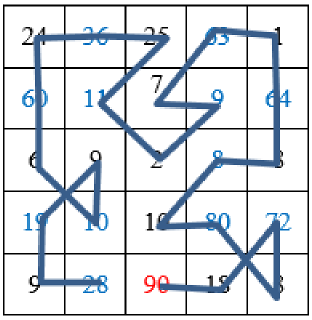
Se usarmos o 9 do canto, temos a sequência inicial $90 \to 10 \to 9 \to 19 \to 28 \to 10 \to 18$. O vizinho do 18 é 80, 8 ou 72. As operações possíveis são $18+80=98$, $18\times 80>100$, $18+8=26$, $18-8=10$, $18\times 8>100$, $18+72=90$ e $18\times 72>100$, e não há mais possibilidades. Esgotamos todos os casos, então o último número precisa ser 28.

d) Pelo que fizemos no item a, se 60 está no meio de uma operação, ou seja, temos $a\boxed{}60=c$, temos $60=c-a$, $60=a-c$, $60=a\div c$ ou $60=c\div a$, em que a e c são vizinhos de 60. Isso implica em um dos vizinhos de 60 ser maior do que 60, o que não é o caso. Assim, 60 não está no meio de uma operação. Como devemos chegar a 60 em algum momento, 60 é um número azul, e é resultado de uma operação.

Se 6 é resultado, então um dos números envolvidos é um vizinho, ou seja, 60, 11, 9, 10 ou 19. Destes dois sabemos que 60 e 19 são também resultados. As possibilidades para esses dois são então $60+b=6 \Leftrightarrow b=-54$, $60-b=6 \Leftrightarrow b=54$, $60\times b=6 \Leftrightarrow b=\frac{1}{10}$ e $60\div b=6 \Leftrightarrow b=10$, que não é vizinho de 60, $19+b=6 \Leftrightarrow b=-13$, $19-b=6 \Leftrightarrow b=13$, $19\times b=6 \Leftrightarrow b=\frac{6}{19}$ e $19\div b=6 \Leftrightarrow b=\frac{19}{6}$.

As possibilidades do terceiro número envolvendo os outros três vizinhos são $11+6=17$, $11-6=5$, $11\times 6=66$, $9+6=15$, $9-6=3$, $9\times 6=54$, $6+10=16$, $10-6=4$, $10\times 6=60$, nenhum dos quais serve (pois não dá para ligar $60\to 10\to 6$).

e) A figura a seguir mostra a (única) solução.



A sequência é $90 \to 18 \to 72 \to 8 \to 80 \to 10 \to 8(\text{esq}) \to 8(\text{dir}) \to 64 \to 1 \to 63 \to 7 \to 9 \to 2 \to 11 \to 25 \to 36 \to 24 \to 60 \to 6 \to 10 \to 9 \to 19 \to 9 \to 28$.

Critérios de correção

Item a: 0,9 ponto

Argumentos do tipo “basta testar todos os casos para ver que não dá” $\boxed{\textbf{não ganham ponto}}$.

A quantidade de caminhos $v\to 28\to v'$ no caso 1 é 20. Isso pode ser feito manualmente (por exemplo, tomar $v=10$ e $v'=19$ e dizer que não dá para preencher $10\boxed{}28=19$ e tentar todas as 20 possibilidades).

As seguintes pontuações parciais não se somam, e são as únicas possíveis.

• Estudar 10 casos ou menos	0,0 ponto
• Estudar entre 11 e 15 casos, inclusive	0,3 ponto
• Estudar entre 16 e 19 casos, inclusive	0,6 ponto
• Notar que se $a\boxed{}b=c$ então a e b são resultados de contas com ou outros dois números	0,6 ponto

Item b: 0,9 ponto

Nesse item deve-se mostrar os quatro caminhos desenhados **E** justificar por que não há outros.

Cada uma das seguintes pontuações não se soma com as demais.

• Não apresentar caminho	0,0 ponto
• Apresentar um ou dois caminhos	0,3 ponto
• Apresentar três ou quatro caminhos sem justificar por que não há outros	0,6 ponto
• Apresentar os quatro caminhos e justificar por que não há outros	0,9 ponto

Item c: 0,4 ponto

Nesse item espera-se **uma justificativa completa de por que não podemos ter nenhum dos três caminhos $19-9-28-10-18$ ou $9-19-28-10-18$, em nenhum dos dois sentidos.**

Esse item não tem pontuação parcial. Ou seja, a pontuação é 0,0 ou 0,4.

Item d: 0,9 ponto

Há dois números para se analisar: 60 (resultado) e 6 (do meio).

Cada uma das seguintes pontuações não se soma com as demais.

- Nenhum número analisado completamente .... 0,0 ponto
- Um número analisado completamente .... 0,6 ponto
- Ambos os números analisados completamente .... 0,9 ponto

Item e: 0,9 ponto

Apresentar a solução vale **0,9 ponto**. **Não é necessário justificar a resposta, só apresentar um desenho ou a lista é suficiente**.

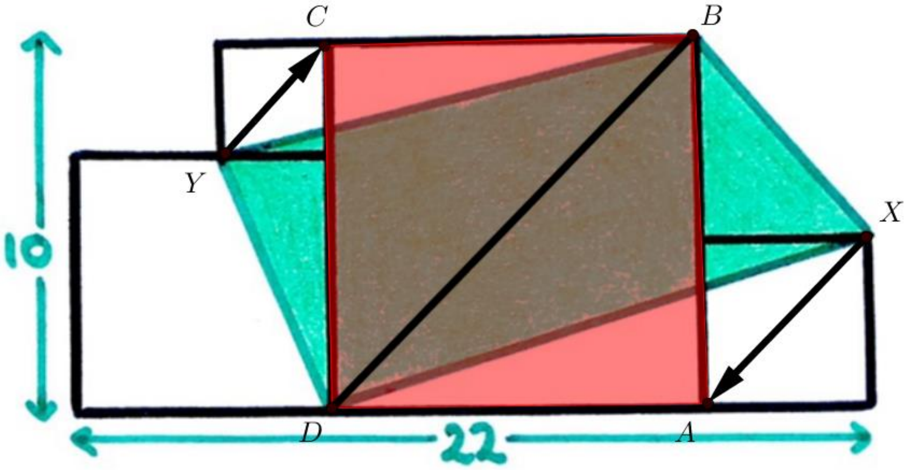
Para se ganhar ponto nesse item, é necessário apresentar a solução correta, ou seja, **não há pontuações parciais**. **Tabuleiros parcialmente preenchidos não valem ponto**.

PROBLEMA 1 – Nível Beta – Quadrados e área – Valor: 2 pontos

Solução

a) A diagonal do quadrado forma ângulos de 45° com os lados do quadrado. Assim, podemos afirmar que os ângulos $\angle FBE$ e $\angle BCA$ medem 45°. As retas FB e AC são paralelas por alternos internos em relação à reta BC. Usando o fato apresentado com essas diagonais paralelas concluímos que os triângulos ACB e ACF possuem mesma área.

b) Considere a figura a seguir. Desejamos calcular a área do quadrilátero $XBYD$.



Denotando a área de um polígono usando colchetes temos:

$$[XBYD] = [XBD] + [YBD]$$

Pelo resultado do item a, $[XBD] = [ABD]$ e $[YBD] = [CBD]$. Logo,

$$[XBYD] = [ABD] + [CBD] = [ABCD]$$

Como $ABCD$ é um quadrado de lado 10 sua área é $10^2 = 100$ e podemos concluir que $[XBYD] = 100$.

Critérios de correção

Item a: 1,0 ponto

• Provou que as diagonais FB e AC são paralelas	0,5 ponto
• Usou o fato apresentado para concluir que os triângulos ACB e ACF possuem mesma área	+0,5 ponto

A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Afirmou ou mostrou em um desenho que o ângulo entre a diagonal e um dos lados é 45°	0,5 ponto

Item b: 1,0 ponto

Lembramos que o aluno pode usar o resultado do item a para resolver o item b mesmo que ele não tenha provado o item a.

• Usar o resultado do item a para provar que $[XBD] = [ABD]$	0,3 ponto
• Usar o resultado do item a para provar que $[YBD] = [CBD]$	0,3 ponto
• Notar que o $ABCD$ é um quadrado de lado 10	0,2 ponto
• Concluir que a área pintada na figura é 100	+0,2 ponto

PROBLEMA 2 – Nível Beta – Gasolina – Valor: 3 pontos

Solução

a) A quantidade de litros de gasolina antiga por quilômetro rodado é

$$\frac{1\text{ litro}}{\text{R\$}4{,}144}\cdot\frac{\text{R\$}150}{502{,}5\text{ km}}.$$

A quantidade de litros de gasolina nova por quilômetro rodado é

$$\frac{1\text{ litro}}{\text{R\$}4{,}144\cdot(1+0{,}015)}\cdot\frac{\text{R\$}150}{524{,}8\text{ km}}.$$

A razão entre esses valores é

$$\frac{\frac{1\text{ litro}}{\text{R\$}4{,}144\cdot(1+0{,}015)}\cdot\frac{\text{R\$}150}{524{,}8\text{ km}}}{\frac{1\text{ litro}}{\text{R\$}4{,}144}\cdot\frac{\text{R\$}150}{502{,}5\text{ km}}}=\frac{502{,}5}{524{,}8\cdot 1{,}015}\cong 0{,}9434,$$

de modo que houve redução de cerca de $100\%-94{,}34\%=5{,}66\%$ no consumo. Ou seja, houve redução de até 6% no consumo, e os dados desse teste estão dentro dos parâmetros apresentados.

Observação: Caso os cálculos sejam feitos (o que não é necessário – veja que R\$150 e R\$4,144 se cancelam), os resultados seguem na tabela a seguir. Mostramos alguns cálculos intermediários que devem aparecer bastante nas provas, como consumo em km por litro e quantidade de litros de gasolina em cada situação.

Unidade	Gasolina antiga	Gasolina nova
Litro por km	0,07203 litro por km	0,06795 litro por km
km por litro	13,88 km/litro	14,72 km/litro
Litros de gasolina	36,20 litros	35,66 litros

Uma maneira de terminar as contas com quilometragem por litro é fazer $1-\frac{13{,}88}{14{,}72}$.

b) O motorista roda $5\cdot 250=1250$ km por semana. O gasto semanal com gasolina antiga é

$$1250\text{ km}\cdot\frac{\text{R\$}150}{502{,}5\text{ km}}\cong \text{R\$}373{,}13$$

e o gasto semanal com gasolina nova é

$$1250\text{ km}\cdot\frac{\text{R\$}150}{524{,}8\text{ km}}\cong \text{R\$}357{,}28.$$

Com isso, a economia semanal é de aproximadamente $373{,}13-357{,}28=\text{R\$}15{,}85$.

Observação: usando as taxas de aumento de 1,5% no preço e a redução de 5,66% encontrada no item a, a redução percentual no custo é $1-(1-0{,}0566)(1+0{,}015)\cong 0{,}0424=4{,}24\%$.

Os gastos diários são R\$74,62 com gasolina antiga e R\$71,46 com gasolina nova. A economia diária é R\$3,16.

Critérios de correção

Item a: 1,5 ponto

Lembramos que a resposta é 5,66%, e alguns resultados parciais seguem:

Unidade	Gasolina antiga	Gasolina nova
Litro por km	0,07203 litro por km	0,06795 litro por km
km por litro	13,88 km/litro	14,72 km/litro
Litros de gasolina	36,20 litros	35,66 litros

Erros de aproximação são toleráveis, mas espera-se correção de pelo menos de 0,2 ponto percentual para a resposta final (ou seja, valores entre 5,4% e 5,9%, inclusive, são respostas corretas.)

Caso alguma conta esteja errada, mas os cálculos seguintes estejam coerentes, descontar a pontuação da conta errada, mas considerar os passos a seguir corretos.

As seguintes três pontuações se somam.

- Encontrar uma expressão (como $\frac{1\text{ litro}}{\text{R\$}4{,}144}\cdot\frac{\text{R\$}150}{502{,}5\text{ km}}$) que calcule a quantidade de litros por km de qualquer uma das gasolinas .... 0,9 ponto
- Calcular a porcentagem ou mostrar que ela é menor do que 6% .... +0,4 ponto
- **Após fazer a conta comprovando**, afirmar que a especificação foi seguida .... +0,2 ponto
- Erros por imprecisão na conta .... no máximo –0,2 ponto

As seguintes pontuações parciais NÃO se somam entre si nem com outras.

• Calcular um consumo em km/litro	0,3 ponto
• Calcular os dois consumos em km/litro	0,7 ponto
• Calcular a quantidade de litros de um tipo de gasolina	0,2 ponto
• Calcular a quantidade de litros de cada um dos dois tipos de gasolina	0,4 ponto
• Afirmar que a especificação foi seguida sem conta comprovando isso	0,0 ponto

Item b: 1,5 ponto

Lembramos que o gasto com a gasolina antiga é R$373,13 e o gasto com a gasolina nova é R$357,28, dando uma economia semanal de R$15,85.

Erros de aproximação são toleráveis, mas espera-se correção até a unidade (ou seja, as respostas corretas com essa precisão são R$15 e R$16).

As seguintes três pontuações se somam.

• Calcular um dos gastos semanais	0,6 ponto
• Calcular os dois gastos semanais	+0,6 ponto
• Calcular a economia semanal	+0,3 ponto

As seguintes pontuações parciais NÃO se somam entre si nem com outras.

• Calcular um gasto diário (R$74,62 ou R$71,46)	0,5 ponto
• Calcular os dois gastos diários	0,7 ponto
• Calcular a economia diária (R$3,16)	0,9 ponto
• Calcular a taxa de variação entre nova e antiga (nova 4,24% mais barata)	0,6 ponto

PROBLEMA 3 – Nível Beta – Pilha de cartas – Valor: 3 pontos

Solução

a) Somando de 3 em 3 e alternando os naipes, as próximas 4 cartas são seis de espadas (6♠), nove de ouros (9♦), dama de paus (Q♣) e dois de copas (2♥). Note que $12+3=15$, de modo que o número na carta correspondente é $15-13=2$.

b) Para obter a carta que vem depois, basta repetir a operação: ir para o próximo naipe e somar três na carta, subtraindo 13 se for necessário.

Para obter a carta que vem antes, fazemos a operação inversa: ir para o naipe anterior e subtrair três na carta, somando 13 se for necessário.

b.1) A próxima é oito de ouros (8♦) e a anterior é dois de copas (2♥).

b.2) A próxima é cinco de copas (5♥) e a anterior é dama de ouros (Q♦). Note que $2-3=-1$, então somamos 13 para obter $-1+13=12$, que corresponde à dama.

c) Considere a quinta carta na pilha: mudamos de naipe quatro vezes e somamos um total de $4\cdot 3=12$ no número; o naipe é o mesmo da primeira carta e o número é também o mesmo, pois ao somar um total de 12 em algum momento subtraímos 12. Ou seja, a quinta carta deveria ser a mesma do que a primeira, o que não é possível pois as cartas não devem se repetir.

Observação: Na verdade não é possível formar a pilha mesmo se o número mudasse em qualquer valor d constante: na décima-terceira mudaríamos de naipe 12 vezes, voltando ao naipe da primeira carta, e o número seria somado de um total de $12d$, voltando ao mesmo número. Assim, qualquer ordenação do tipo teria no máximo 12 cartas sem repetir.

d) Primeiro note que temos $4n$ cartas. A carta na posição $k+1$ ocorre após k mudanças de naipe e com o número somado em $3k$. Ocorre repetição quando k é múltiplo de 4 e $3k$ é múltiplo de n, ou seja, quando $k=4m$ e $3\cdot 4m=12m$ é múltiplo de n. Assim é possível fazer a pilha de Si Stebbins quando o menor valor de m para o qual isso acontece é n. Isso ocorre se, e somente se, n não tem fatores comuns com 12. Os possíveis valores de n são, então, 5, 7 e 11.

Critérios de correção

Item a: 0,8 ponto

Lembrando que a sequência correta é (6♠, 9♦, Q♣, 2♥), cada estudante receberá neste item somente uma das cinco pontuações a seguir:

- Nenhuma carta correta .... 0 ponto
- Uma carta correta .... 0,2 ponto
- Duas cartas corretas .... 0,4 ponto
- Três cartas corretas .... 0,6 ponto
- Todas as cartas corretas .... 0,8 ponto

Uma carta é considerada “correta” quando é a carta certa ou é obtida de uma anterior errada usando a regra corretamente. Por exemplo, na sequência (6♠, 10♦, K♣, 2♥) há três cartas corretas: a primeira, a terceira (por ter sido obtida corretamente da carta errada 10♦) e a última.

Não são dados pontos parciais caso o naipe estiver errado.

Item b: 0,8 ponto

Nesse item deve-se apresentar quatro cartas: 8♦, 2♥, 5♥ e Q♦. Não é necessário explicar a regra. Cada estudante receberá neste item somente uma das cinco pontuações a seguir:

- Nenhuma carta correta .... 0 ponto
- Uma carta correta .... 0,2 ponto
- Duas cartas corretas .... 0,4 ponto
- Três cartas corretas .... 0,6 ponto
- Todas as cartas corretas .... 0,8 ponto

Neste caso, cada carta está correta se, e somente se, a regra é seguida corretamente. Assim, basta comparar as respostas com as quatro cartas listadas na resposta.

Não são dados pontos parciais caso somente o naipe ou o número estiverem errados. Por exemplo, 7♥ no lugar de 5♥ ou 8♥ no lugar de 8♦ não ganham ponto.

Item c: 0,7 ponto

Uma resposta para esse item é considerada correta quando escreve que, não importando com que carta começamos a pilha, após menos de 48 interações a carta se repete **E** mostra como e por que essa repetição ocorre.

As seguintes pontuações parciais NÃO se somam entre si.

- Somente mostrar um exemplo particular de carta inicial, com todos os passos corretos, como por exemplo, 4♠, 7♦, 10♣, A♥, 4♠ .... 0,3 ponto
- Mostrar um exemplo particular de carta inicial, com todos os passos corretos, como por exemplo, 4♠, 7♦, 10♣, A♥, 4♠, e somente citar que “se começar com qualquer outra carta a quinta carta sempre repete” .... 0,5 ponto

Item d: 0,7 ponto

Neste item espera-se que o estudante estabeleça um critério simples para que a pilha de Si Stebbins seja possível **E** o utilize para encontrar os valores de n (que são 5, 7 e 11).

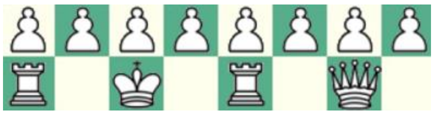
As três pontuações a seguir se somam.

• Encontrar os valores corretos (ou seja, dizer que são 5, 7 e 11 e nenhum outro) .... 0,3 ponto • Qualquer resposta diferente, exceto incluir por distração 1 e/ou 13 .... 0,0 ponto • Justificativa (explicitar que dá certo se, e somente se, o menor k múltiplo de 4 com $12k$ múltiplo de n é $4n$, ou equivalente). É possível ganhar esses pontos e errar a resposta.. +0,4 ponto

PROBLEMA 4 – Nível Beta – Chess 960 – Valor: 3 pontos

Solução

a) Não. Se ocuparmos todas as casas pretas colocando torre, rei, torre e rainha nessa ordem, então não é possível colocar os bispos em casas de cores diferentes, pois há apenas casas brancas.



b) Na Disposição X temos 1 posição possível para o bispo numa casa preta e 4 posições para o bispo numa casa branca. Usando o princípio multiplicativo temos $1 \times 4 = 4$ maneiras de posicionar os bispos.

Usando a mesma ideia, na Disposição Y temos 3 posições para o bispo numa casa preta e 2 posições para o bispo numa casa branca. Portanto, são $3 \times 2 = 6$ maneiras de posicionar os bispos.

c) Seguindo a ordem sugerida, temos 4 opções para o bispo da casa preta, 4 opções para o bispo na casa branca e 6 opções para a rainha.

Agora temos 5 casas livres e devemos colocar os 2 cavalos. Temos 5 opções para o primeiro cavalo, 4 opções para o segundo e contamos cada par de casas duas vezes. Se escolhemos a primeira casa livre e depois a segunda ou a segunda e depois a primeira temos a mesma configuração de cavalos. Por isso, são $\frac{5\times 4}{2} = 10$ maneiras de posicionar os cavalos.

Resta apenas 1 maneira de concluir, pois temos 3 casas livres para 3 peças e o rei deve estar entre as duas torres.

Usando o princípio multiplicativo, o número de disposições iniciais possíveis é

$$4 \times 4 \times 6 \times 10 \times 1 = 960$$

Critérios de correção

Item a: 0,6 ponto

• Afirmar que nem sempre será possível seguir a regra II após colocar rei, duas torres e rainha	0,4 ponto
• Justificativa correta, colocando as 4 peças numa das cores ou equivalente (o desenho não é obrigatório)	+0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto

• 4 maneiras da disposição X	0,3 ponto
• 6 maneiras da disposição Y	0,3 ponto

Item c: 1,8 ponto

• 4 maneiras de colocar o bispo da casa preta	0,3 ponto
• 4 maneiras de colocar o bispo da casa branca	0,3 ponto
• 6 maneiras de colocar a rainha	0,3 ponto
• 10 maneiras de colocar os cavalos (pode ser feito exibindo todas as possibilidades)	0,3 ponto
• 1 maneira de colocar o rei e as duas torres	0,3 ponto
• Conclusão correta de que são 960 disposições com os 5 passos anteriores	+0,3 ponto

PROBLEMA 5 – Nível Beta – Lema de Titu – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

Solução

a) As áreas são

- $R_1 = \frac{x}{a} \cdot (a+b)x = \frac{x^2(a+b)}{a}$ $\qquad R_2 = \frac{y}{b} \cdot (a+b)y = \frac{y^2(a+b)}{b}$
- $R_3 = \frac{y}{a} \cdot (x+y)a = x(x+y)$ $\qquad R_4 = \frac{y}{b} \cdot (x+y)b = y(x+y)$

b) Faremos usando 4 passos

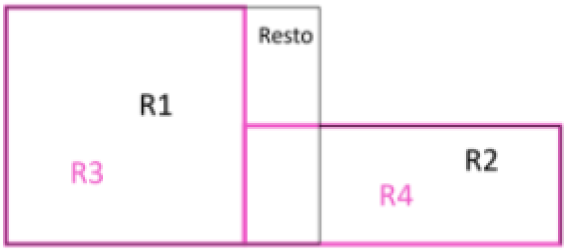
1. Primeiro, provemos que que o comprimento do R_1 é maior que ou igual ao comprimento de R_3:

$$(a+b)x \geq a(x+y) \Leftrightarrow ax + bx \geq ax + ay \Leftrightarrow bx \geq ay \Leftrightarrow \frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$$

2. Agora, observemos que o comprimento de R_1 mais o comprimento de R_2 é igual ao comprimento de R_3 mais o comprimento de R_4 já que

$$(a+b)x + (a+b)y = (a+b)(x+y) = (x+y)a + (x+y)b$$

3. Agora como a altura de R_1 é igual à altura de R_3 e a altura de R_2 é igual à altura de R_4, se colocarmos a figura azul sobre a figura rosa, vai acontecer o seguinte:



Veja que pelo fato de $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$, vai sobrar uma pequena área que chamamos de "Resto" na figura e por isso, a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2 é maior ou igual à soma das áreas dos retângulos R_3 e R_4.

4. Dado que a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2 é maior ou igual à soma das áreas dos retângulos R_3 e R_4, usando as expressões de (a):

$$\frac{x^2(a+b)}{a} + \frac{y^2(a+b)}{b} \geq x(x+y) + y(y+x) = (x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

c) Somando $\frac{z^2}{c}$ dos dois lados do lema de Titu do item anterior

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c}$$

Aplicando novamente o lema de Titu, só que agora para $(a+b), c, (x+y), z$:

$$\frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

Concluímos que

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

Critérios de correção

Ver próxima página

Critérios de correção

Item a: 0,8 ponto

• Áreas de R_1, R_2, R_3 e R_4 .... 0,2 ponto cada

Item b: 2,0 pontos

Vamos separar a solução em duas partes. A parte 1 – geometria vale 0,6 ponto e possui dois critérios possíveis. A parte 2 – álgebra vale 0,4 ponto e o aluno só pode ter pontuação maior que zero se tiver pontuado na parte 1.

Parte 1 – geometria: 1,2 ponto

• Provar que comprimento de R_1 é maior do que o comprimento de R_3 ou equivalente usando R_2 e R_4 . ... 0,6 ponto
• Observar que a soma dos comprimentos de R_1 e R_2 é igual à soma dos comprimentos de R_3 e R_4 ou escrever que $(a+b)x+(a+b)y=(x+y)a+(x+y)b$ .... 0,6 ponto

A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Apenas sobrepor as figuras fornecidas (pode ser só um desenho) sem argumentos .... 0,6 ponto

Parte 2 – álgebra: 0,8 ponto (apenas para alunos que tenham pontuado na parte 1)

• Escrever $\frac{x^2(a+b)}{a}+\frac{y^2(a+b)}{b}\geq x(x+y)+y(x+y)$. .... 0,4 ponto
• Concluir que $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}$ .... +0,4 ponto

Item c: 1,2 ponto

• Somar $\frac{z^2}{c}$ para obter a expressão $\frac{(x+y)^2}{a+b}+\frac{z^2}{c}$ .... 0,6 ponto
• Usar o Lema de Titu para duas variáveis para concluir .... +0,6 ponto

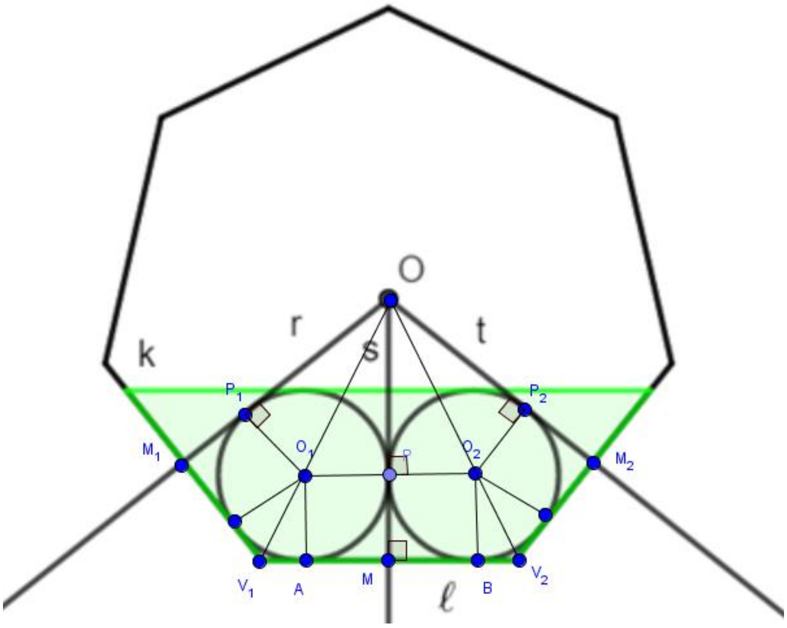
A seguinte pontuação parcial não deve ser somada às anteriores.

• Demonstrações usando outras ferramentas como Cauchy-Schwarz .... 0,8 ponto

PROBLEMA 6 – Nível Beta – Polígonos – Valor: 4 pontos

Solução

a) Seja O_1 e O_2 os centros das circunferências e V_1 e V_2 os vértices do lado que tangencia as duas circunferências.

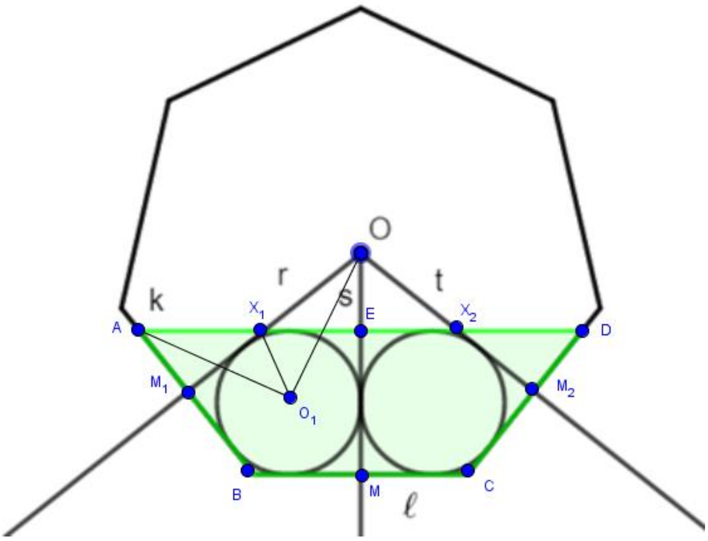


Por simetria a distância de O aos lados do polígono é a mesma e traçando os raios de O_1 e O_2 até os pontos de tangência das circunferências sabemos que O_1 é equidistante aos lados que se encontram em V_1 e O_2 é equidistante aos lados que se encontram em V_2. Podemos concluir que O_1 e O estão na bissetriz do ângulo interno $\angle V_1$ e os pontos O_2 e O estão na bissetriz interna do ângulo interno $\angle V_2$.

Seja P o ponto de tangência das duas circunferências. Veja que $P \in s$, $\angle OPO_1 = \angle OPO_2 = 90°$ e podemos concluir que $s \perp O_2O_2$. Note que O_1O_2 paralelo a AB, pois ABO_2O_1 é um retângulo e podemos concluir que s é perpendicular ao lado do polígono. Como O é o centro ele é equidistante dos vértices V_1 e V_2, dessa forma s é a mediatriz do lado V_1V_2 e corta o lado no ponto médio M.

Os triângulos OPO_1 e OP_1O_1 são congruentes por $LLA_{90°}$ já que possuem dois lados iguais $OO_1 = OO_1$ e $O_1P = O_1P_1$ e ângulo de $90°$. Daí podemos concluir que os triângulos OMV_1 e OM_1V_1 são congruentes por ALA já que $OV_1 = OV_1$ e a reta OV_1 é bissetriz dos ângulos $\angle MOM_1 = \angle POP_1$ e $\angle MV_1M_1$. Concluímos que $M_1V_1 = MV_1 = \frac{\text{lado}}{2}$ e M_1 é ponto médio do outro lado que passa por V_1. Analogamente, M_2 é ponto médio do outro lado diferente de V_1V_2 que passa por V_2.

b) Seja $ABCD$ o trapézio e sejam X_1, E e X_2 os pontos de encontro da paralela ao lado com r, s e t, respectivamente.



O ângulo interno do polígono regular de n lados é $\frac{(n-2)180°}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$. Temos $\angle ABC = 180° - \frac{360°}{n}$ e $\angle DAB = \frac{360°}{n}$, pois é um trapézio. Isso nos leva a $\angle X_1AM_1 = \frac{360°}{n}$. Veja também que $\angle BOM = \angle BOM_1 = \frac{\angle BOC}{2} = \frac{360°/n}{2}$, pois simetria em relação ao centro. Assim, $\angle X_1OE = \angle M_1OM = \frac{360°}{n}$.

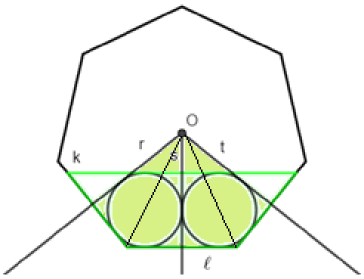
Isso nos permite concluir que os triângulos OEX_1 e AM_1X_1 possuem os mesmos ângulos, pois $\angle AX_1M_1 = \angle OX_1E$ (opostos pelo vértice) e $\angle M_1AX_1 = \angle EOX_1 = \frac{360^\circ}{n}$.

Veja que os triângulos AX_1O_1 e OX_1O_1 são congruentes por ALA, pois $X_1O_1 = X_1O_1$ (aparece nos dois triângulos), X_1O_1 é bissetriz do ângulo EX_1M_1 já que O_1 é equidistante das retas EX_1 e M_1X_1 implicando $\angle AX_1O_1 = \angle OX_1O_1$ e ainda sabemos que $\angle X_1AO_1 = \frac{\angle X_1AM_1}{2} = \frac{180^\circ}{n} = \angle X_1OO_1$. Concluímos que $AX_1 = OX_1$.

Portanto, os triângulos OEX_1 e AM_1X_1 são congruentes. Analogamente, os triângulos OEX_2 e DM_2X_2 também são congruentes.

Há outras formas de provar que os triângulos possuem os mesmos ângulos. Poderíamos usar que $\angle OEX_1 = OMB = 90°$ (retas AD e BC paralelas) e $\angle AM_1X_1 = \angle AM_1O = 90°$ (OM_1 é mediatriz do lado).

c) Usando o resultado do item b podemos concluir que a área do trapézio é igual à área do pentágono destacado a seguir.



A área do pentágono é igual à soma das áreas de 4 triângulos retângulos congruentes. Suponha que cada triângulo tenha área S. Temos área$(T) = 4S$.

Já a área do polígono é $2nS$, separar o polígono em n triângulos isósceles usando o centro e um lado e cada um deles pode ser repartido em 2 triângulos de área S.

Concluímos que $\frac{\text{área}(T)}{\text{área}(P)} = \frac{4S}{2nS} = \frac{2}{n}$.

Critérios de correção

Nos critérios a seguir usamos com referência os nomes dos pontos usados na solução oficial.

Item a: 1,6 ponto

• Provar que O, O_1 e V_1 são colineares	0,8 ponto
• Provar que s é mediatriz de V_1V_2	0,4 ponto
• Provar que M_1 e M_2 são pontos médios	+0,4 ponto

Item b: 1,2 ponto

• Provar que $AX_1 = OX_1$ (usando que triângulos AX_1O_1 e OX_1O_1 são congruentes ou ideia similar)	0,4 ponto
• Provar que os triângulos AM_1X_1 e OEX_1 possuem os mesmos ângulos (são semelhantes)	0,4 ponto
• Concluir que os triângulos AM_1X_1 e OEX_1 são congruentes	+0,4 ponto

Item c: 1,2 ponto

• Afirmar usando b que $área(T)$ é igual área do pentágono r, t e os lados	0,4 ponto
• Recortou o pentágono em 4 triângulos retângulos e mesma área	+0,4 ponto
• Concluir corretamente que $\frac{\text{área}(T)}{\text{área}(P)} = \frac{2}{n}$	+0,4 ponto

PROBLEMA 7 – Nível Beta – Soma de dois quadrados – Valor: 5 pontos

Solução

a) Das condições dadas, existem m e n inteiros tais que $a = 2m$ e $b = 2n + 1$. Logo:

$$p = a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n+1)^2 = 4(m^2 + n^2 + n) + 1$$

Assim, basta tomar $k = m^2 + n^2 + n$.

b) $37 - 4ab = n^2 \Leftrightarrow 4ab = 37 - n^2$, ou seja, podemos ter:

$$4ab = 37 - 1 = 36 \Leftrightarrow ab = 9 \text{ ou } 4ab = 37 - 9 = 28 \Leftrightarrow ab = 7 \text{ ou } 4ab = 37 - 25 = 12 \Leftrightarrow ab = 3$$

Logo $S = \left\{\{\{1;9\}\}, \{\{3;3\}\}, \{\{1;7\}\}, \{\{1;3\}\}\right\}$.

c) Sendo $p - 4ab = n^2$, $p - 4a(b - a + n) = p - 4ab + 4a^2 - 4an = n^2 - 4an + 4a^2 = (n - 2a)^2$.
Analogamente, $p - 4a(b - a - n) = p - 4ab + 4a^2 + 4an = n^2 + 4an + 4a^2 = (n + 2a)^2$.

d) Basta observar que $b - a + n = -(a - b - n)$ e $b - a - n = -(a - b + n)$ e que nenhum desses números é nulo, pois p não é um quadrado perfeito.

e) Do item anterior, sabemos que $\{\{a, b - a + n\}\} \neq \{\{b, a - b - n\}\}$ e $\{\{a, b - a - n\}\} \neq \{\{b, a - b + n\}\}$. Além disso, $p - 4ab = n^2$ implica $n \neq 0$, logo $b - a + n \neq b - a - n$, ou seja, $\{\{a, b - a + n\}\} \neq \{\{a, b - a - n\}\}$. Portanto se ocorre repetição $\{\{a, b - a + n\}\} = \{\{b, a - b + n\}\} \Longrightarrow a + (b - a + n) = b + (a - b + n) \Leftrightarrow a = b$. Reciprocamente, se $a = b$ então $\{\{a, b - a + n\}\} = \{\{b, a - b + n\}\} = \{\{a, n\}\}$ e $\{\{b, a - b - n\}\} = \{\{a, b - a - n\}\} = \{\{a, -n\}\}$. Note que somente $\{\{a, n\}\}$ pertence a S.

f) Como mostramos no item c, para $c = b - a + n$, obtemos $n' = n - 2a$. Assim, $b = c + a - n = c - a - (n - 2a) = c - a - n'$.
Para $c = b - a - n$, obtemos $n' = n + 2a$. Assim, $b = c + a + n = c - a + (n + 2a) = c - a + n'$.

g) Suponha que $\{\{a, b\}\} \leftrightarrow \{\{a, c\}\}$ com $b = c$. Considerando as duas possibilidades apresentadas no item c, devemos ter $b - a + n = b$ ou $b - a - n = b \Leftrightarrow a = n$ e

$$p - 4nb = n^2 \Leftrightarrow p = n(n + 4b).$$

Logo $n = 1$ e

$$n + 4b = p \Leftrightarrow b = \frac{p-1}{4}.$$

h) Inicialmente, observando que $4ab < p$ e $n^2 < p$, podemos concluir que o número de multiconjuntos para um p fixado é finito. Logo a cadeia iniciada por A_0 é finita ou tem multiconjuntos repetidos. Vamos começar mostrando que a cadeia não irá repetir um multiconjunto.
Se ocorre a repetição de um multiconjunto, considere o primeiro multiconjunto que se repete. Supondo que exista um termo anterior ao da primeira vez que ele apareceu, ele – por definição – deve ser diferente do termo anterior dessa segunda ocorrência. Logo, como cada multiconjunto se liga a exatamente dois multiconjuntos, o termo seguinte ao da primeira ocorrência deve ser igual ao termo anterior ao da segunda ocorrência ($B \leftrightarrow A \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow A \leftrightarrow B$) . Uma contradição.
Logo o primeiro termo a se repetir deve ser A_0, mas esse multiconjunto só se conecta a ele mesmo e a um outro multiconjunto, A_1. Novamente, uma contradição. O que completa nossa demonstração.
Portanto a cadeia é finita e não possui termos repetidos. Assim, ela termina em um multiconjunto que satisfaz e ou g e é diferente de A_0, ou seja, ela termina sempre em $\{\{a, a\}\}$ e $p - 4aa = n^2 \Leftrightarrow p = n^2 + (2a)^2$.

Critérios de correção

Os itens a, d, f, g e h não têm pontuações parciais.

Item a (mostrar que $p = 4k + 1$ – usar resíduos quadráticos é permitido)	0,8 ponto
Item b (achar S para $p = 37$)	0,7 ponto
Parcial do item b: achar 2 elementos de S	0,3 ponto
Parcial do item b: achar 3 elementos de S	0,4 ponto
Item c	0,8 ponto
Parcial do item c: fazer somente uma das contas corretamente	0,5 ponto
Item d	0,6 ponto
Item e	0,6 ponto
Parcial do item e: somente afirmar que $a = b$ é uma possibilidade	0,3 ponto
Item f	0,5 ponto
Item g	0,5 ponto
Item h	0,5 ponto

XLIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2020)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

PROBLEMA 1 – Nível Gama – Idade do cachorro – Valor: 2 pontos

Solução

a) 27 anos e 3 meses são $27{,}25$ anos. Usando a aproximação dada no enunciado, temos $\ln(27{,}25) \cong \ln e^{3{,}3} = 3{,}3$ e

$$\text{Idade Humana} = 31 + 16 \cdot \ln(27{,}25) = 31 + 16 \cdot 3{,}3 = 83{,}8$$

Assim o modelo indica que *Adjutant* tinha 83,8 anos humanos.

b) Substituindo $\text{Idade Humana} = 1000$ e resolvendo a equação, obtemos

$$1000 = 31 + 16 \cdot \ln(\text{Idade do Cachorro}) \Leftrightarrow \ln(\text{Idade do Cachorro}) = \frac{969}{16}$$
$$\Leftrightarrow \text{Idade do Cachorro} = e^{60{,}5625} > e^{60}$$

Utilizando a aproximação dada, veja que $e^{60} = (e^3)^{20} \cong 20^{20} = 2^{20} \cdot 10^{20}$, mas o universo tem apenas 14 bilhões de anos $= 14 \cdot 10^9 < 2^{20} \cdot 10^{20}$.

Critérios de correção

Item a: 1,2 ponto

Se algum estudante usar a calculadora, pode obter como resposta $83{,}9$ anos, o que também deve ser aceito como resposta correta. Arredondar para uma idade inteira como 83 ou 84 anos também é aceitável.

Quem converter $0{,}9$ ano para meses e errar conta não deve ser penalizado.

As pontuações a seguir podem ser somadas.

• Obter $\text{Idade Humana} = 31 + 16 \cdot \ln(27{,}25)$	0,8 ponto
• Computar corretamente a idade humana	+0,4 ponto
• Erro de conta	–0,1 ponto

As seguintes pontuações parciais não devem ser somadas às anteriores nem entre si.

• Converter 27 anos e 3 meses em 27,25 anos	0,3 ponto
• Só a resposta correta	0,6 ponto

Item b: 0,8 ponto

Para referência, a idade do cachorro correspondente a 1000 anos humanos é $e^{60{,}5625} \cong 2 \cdot 10^{26}$ anos.

As pontuações a seguir devem ser somadas.

• Obter $\text{Idade do Cachorro} = e^{\frac{969}{16}}$ ou $e^{60{,}5625}$ ou e elevado a uma aproximação razoável do expoente (precisão de uma casa decimal)	0,4 ponto
• Obter $\text{Idade do Cachorro} \cong 20^{20}$ anos	+0,2 ponto
• Concluir que o valor encontrado é maior do que 14 bilhões	+0,2 ponto
• Erros pequenos de cálculo	–0,1 ponto

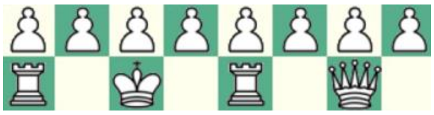
Outra solução é substituir a idade do universo e obter que a idade humana correspondente é $31 + \ln(14 \cdot 10^9) \cong 404{,}8$ anos, que é menor do que 1000 anos, ou seja, o cachorro precisaria ser mais velho para a idade humana ser 1000 anos. Nesse caso:

• Obter $\text{Idade Humana} \cong 404{,}8$ ou uma aproximação razoável	0,6 ponto
• Concluir	+0,2 ponto

PROBLEMA 2 – Nível Gama – Chess 960 – Valor: 2 pontos

Solução

a) Não. Se ocuparmos todas as casas pretas colocando torre, rei, torre e rainha nessa ordem, então não é possível colocar os bispos em casas de cores diferentes, pois há apenas casas brancas.



b) Na Disposição X temos 1 posição possível para o bispo numa casa preta e 4 posições para o bispo numa casa branca. Usando o princípio multiplicativo temos $1 \times 4 = 4$ maneiras de posicionar os bispos.

Usando a mesma ideia, na Disposição Y temos 3 posições para o bispo numa casa preta e 2 posições para o bispo numa casa branca. Portanto, são $3 \times 2 = 6$ maneiras de posicionar os bispos.

c) Seguindo a ordem sugerida, temos 4 opções para o bispo da casa preta, 4 opções para o bispo na casa branca e 6 opções para a rainha.

Agora temos 5 casas livres e devemos colocar os 2 cavalos. Temos 5 opções para o primeiro cavalo, 4 opções para o segundo e contamos cada par de casas duas vezes. Se escolhemos a primeira casa livre e depois a segunda ou a segunda e depois a primeira temos a mesma configuração de cavalos. Por isso, são $\frac{5\times4}{2} = 10$ maneiras de posicionar os cavalos.

Resta apenas 1 maneira de concluir, pois temos 3 casas livres para 3 peças e o rei deve estar entre as duas torres.

Usando o princípio multiplicativo, o número de disposições iniciais possíveis é

$$4 \times 4 \times 6 \times 10 \times 1 = 960$$

Critérios de correção

Item a: 0,4 ponto

• Afirmar que nem sempre será possível seguir a regra II após colocar rei, duas torres e rainha	0,3 ponto
• Justificativa correta, colocando as 4 peças numa das cores ou equivalente (o desenho não é obrigatório)	+0,1 ponto

Item b: 0,4 ponto

• 4 maneiras da disposição X	0,2 ponto
• 6 maneiras da disposição Y	0,2 ponto

Item c: 1,2 ponto

• 4 maneiras de colocar o bispo da casa preta	0,2 ponto
• 4 maneiras de colocar o bispo da casa branca	0,2 ponto
• 6 maneiras de colocar a rainha	0,2 ponto
• 10 maneiras de colocar os cavalos (pode ser feito exibindo todas as possibilidades)	0,2 ponto
• 1 maneira de colocar o rei e as duas torres	0,2 ponto
• Conclusão correta de que são 960 disposições com os 5 passos anteriores	+0,2 ponto

PROBLEMA 3 – Nível Gama – Soma de potências – Valor: 3 pontos

Solução

a) Para $n \geq 1$:

$$S_k(n+1) - S_k(n) = (0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k + n^k) - (0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k) = n^k$$

Observação: Como estamos supondo que S_k é um polinômio na variável n, $S_k(n+1) - S_k(n)$ também é um polinômio e, pela igualdade acima podemos concluir que $S_k(n+1) - S_k(n) = n^k$, para todo n real.

Logo $S_k(1) - S_k(0) = 0^k \Leftrightarrow 0^k - a_0 = 0^k \Leftrightarrow a_0 = 0$.

b) $S_4(n+1) - S_4(n) = n^4 \Leftrightarrow$

$$\big(a_5(n+1)^5 + a_4(n+1)^4 + a_3(n+1)^3 + a_2(n+1)^2 + a_1(n+1)\big) - (a_5n^5 + a_4n^4 + a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n) = n^4$$

$$\Leftrightarrow a_5\left(\binom{5}{5}n^5 + \binom{5}{4}n^4 + \binom{5}{3}n^3 + \binom{5}{2}n^2 + \binom{5}{1}n + \binom{5}{0}\right) + a_4\left(\binom{4}{4}n^4 + \binom{4}{3}n^3 + \binom{4}{2}n^2 + \binom{4}{1}n + \binom{4}{0}\right) +$$

$$a_3\left(\binom{3}{3}n^3 + \binom{3}{2}n^2 + \binom{3}{1}n + \binom{3}{0}\right) + a_2\left(\binom{2}{2}n^2 + \binom{2}{1}n + \binom{2}{0}\right) + a_1\left(+\binom{1}{1}n + \binom{1}{0}\right)$$

$$-(a_5n^5 + a_4n^4 + a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n) = n^4$$

$$\Leftrightarrow \left(\binom{5}{4}a_5\right)n^4 + \left(\binom{5}{3}a_5 + \binom{4}{3}a_4\right)n^3 + \left(\binom{5}{2}a_5 + \binom{4}{2}a_4 + \binom{3}{2}a_3\right)n^2 + \left(\binom{5}{1}a_5 + \binom{4}{1}a_4 + \binom{3}{1}a_3 + \binom{2}{1}a_2\right)n$$

$$+\left(\binom{5}{0}a_5 + \binom{4}{0}a_4 + \binom{3}{0}a_3 + \binom{2}{0}a_2 + \binom{1}{0}a_1\right) = n^4$$

Identificando coeficientes obtemos, então, o sistema apresentado.

c) Pelo item b, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 0 \\ 5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 = 0 \\ 10a_5 + 6a_4 + 3a_3 = 0 \\ 10a_5 + 4a_4 = 0 \\ 5a_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 0 \\ 1 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 = 0 \\ 2 + 6a_4 + 3a_3 = 0 \\ 1 + 2a_4 = 0 \\ a_5 = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + a_3 + a_2 + a_1 = 0 \\ 1 - 2 + 3a_3 + 2a_2 = 0 \\ 2 - 3 + 3a_3 = 0 \\ a_4 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a_2 + a_1 = 0 \\ 1 - 2 + 1 + 2a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{3} \\ a_4 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{30} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{3} \\ a_4 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Logo

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n.$$

Critérios de correção

Item a: 0,6 ponto

O item a consiste em fazer a observação de que $S_k(n+1) = 0^k + 1^k + \cdots + (n-1)^k + n^k = S_k(n) + n^k$. Isso vale 0,6 ponto. Casos particulares não ganham pontos. Ou seja, o item a não tem pontuação parcial. *Todas as notas no item a são 0,0 ou 0,6.*

Item b: 1,2 ponto

Esse item tem os seguintes passos:

(1) Desenvolver $S_4(n+1) = a_5(n+1)^5 + a_4(n+1)^4 + \cdots + a_1(n+1)$ pelo binômio de Newton e subtrair $S_4(n)$. Aqui, espera-se somente que se substitua as fórmulas do binômio de Newton para $(n+1)^5$, $(n+1)^4$, $(n+1)^3$ e $(n+1)^2$. Coeficientes numéricos no lugar dos binomiais também são aceitos.

(2) Obter os coeficientes do polinômio $S_4(n+1) - S_4(n)$ em função de $a_5, a_4, \dots, a_1$ e binomiais OU comparar binomiais com valores numéricos obtidos.

Consideramos que o problema está resolvido se ambos os passos forem desenvolvidos corretamente.

• Passo 1 (Desenvolver $S_4(n+1)$)..	0,6 ponto
• Passo 2 (Obter os coeficientes de $S_4(n+1) - S_4(n)$ em função de $a_5, a_4, \dots, a_1$ e binomiais).....................................	+0,6 ponto

Outra maneira de desenvolver $S_4(n+1)-S_4(n)$ é usar a identidade $a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\cdots+b^{k-1})$ para $a=n+1$ e $b=n$:

$$\begin{aligned}
&S_4(n+1)-S_4(n)\\
&=a_5((n+1)^5-n^5)+a_4((n+1)^4-n^4)+a_3((n+1)^3-n^3)+a_2((n+1)^2-n^2)+a_1\big((n+1)-n\big)\\
&=a_5((n+1)^4+(n+1)^3n+(n+1)^2n^2+(n+1)n^3+n^4)+a_4((n+1)^3+(n+1)^2n+(n+1)n^2+n^3)\\
&+a_3((n+1)^2+(n+1)n+n^2)+a_2(2n+1)+a_1\\
&=5a_5n^4+(10a_5+4a_4)n^3+(10a_5+6a_4+3a_3)n^2+(5a_5+4a_4+3a_3+2a_2)n+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1
\end{aligned}$$

e depois calcular os coeficientes binomiais e comparar.

A seguinte pontuação parcial não se soma com as demais.

• Usar a fatoração de a^k-b^k OU o binômio de Newton em **todos** os termos............ 0,3 ponto

Item c: 1,2 ponto

Nesse item, resolvemos o sistema. A solução é $a_5=\frac{1}{5}$, $a_4=-\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{3}$, $a_2=0$ e $a_1=-\frac{1}{30}$. A maneira mais natural é encontrar, na ordem, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1.

• Encontrar $a_5=\frac{1}{5}$ .... 0,3 ponto
• Encontrar a_4 a partir de a_5 .... +0,3 ponto
• Encontrar a_3 a partir de a_5 e a_4 .... +0,3 ponto
• Encontrar a_2 a partir de a_5, a_4 e a_3 .... +0,2 ponto
• Encontrar a_1 a partir dos outros valores .... +0,1 ponto

Caso um valor errado de a_k seja encontrado e as substituições posteriores forem corretas, deve-se dar a pontuação correspondente.

A seguinte pontuação parcial não se soma com as demais.

• Exibir uma fórmula para $S_4(n)$ sem demonstração .... 0,3 ponto

Observações adicionais sobre possíveis abordagens alternativas

Caso se prove que $S_4(n)=\frac{1}{5}n^5-\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$ por outro método:

Nesse caso, o item c foi resolvido, e deve-se dar 1,2 ponto; a parte 1 do item b pode ser considerada feita (veja mais explicações abaixo) e ganha-se mais 0,6 ponto. O item a e a parte 2 do item b ainda precisam ser feitos.

O item a pode ser feito também substituindo a fórmula e verificando que as identidades se satisfazem:

$$\begin{aligned}
&S_4(n+1)-S_4(n)=\frac{1}{5}(n+1)^5-\frac{1}{2}(n+1)^4+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{30}(n+1)-\left(\frac{1}{5}n^5-\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\right)\\
&=\frac{1}{5}(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)-\frac{1}{2}(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)+\frac{1}{3}(n^3+3n^2+3n+1)-\frac{1}{30}(n+1)-\frac{1}{5}n^5\\
&\qquad+\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{30}n\\
&=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)n^5+\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)n^4+\left(\frac{10}{5}-\frac{4}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)n^3+\left(\frac{10}{5}-\frac{6}{2}+\frac{3}{3}\right)n^2+\left(\frac{5}{5}-\frac{4}{2}+\frac{3}{3}-\frac{1}{30}+\frac{1}{30}\right)n+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}=n^4.
\end{aligned}$$

Para o item b, bastaria substituir os valores de a_5,a_4,a_3,a_2,a_1 no sistema (parte 2). A parte 1 é considerada feita pois, tendo os valores de a_5,a_4,a_3,a_2,a_1, não é necessário desenvolver $S_4(n+1)-S_4(n)$.

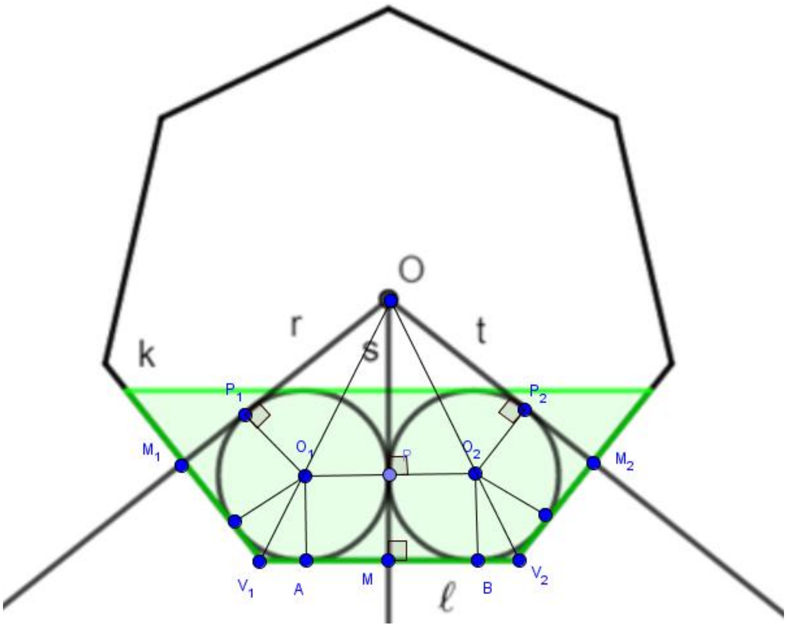
Esboço de outro método para encontrar uma fórmula fechada para $S_4(n)$

Um exemplo de método é usar diferenças finitas para obter $m^4=24\binom{m}{4}+36\binom{m}{3}+14\binom{m}{2}+\binom{m}{1}$ e usar o teorema das colunas para obter $S_4(n)=24\binom{n}{5}+36\binom{n}{4}+14\binom{n}{3}+\binom{n}{2}$.

PROBLEMA 4 – Nível Gama – Polígonos – **Valor: 3 pontos**

Solução

a) Seja O_1 e O_2 os centros das circunferências e V_1 e V_2 os vértices do lado que tangencia as duas circunferências.

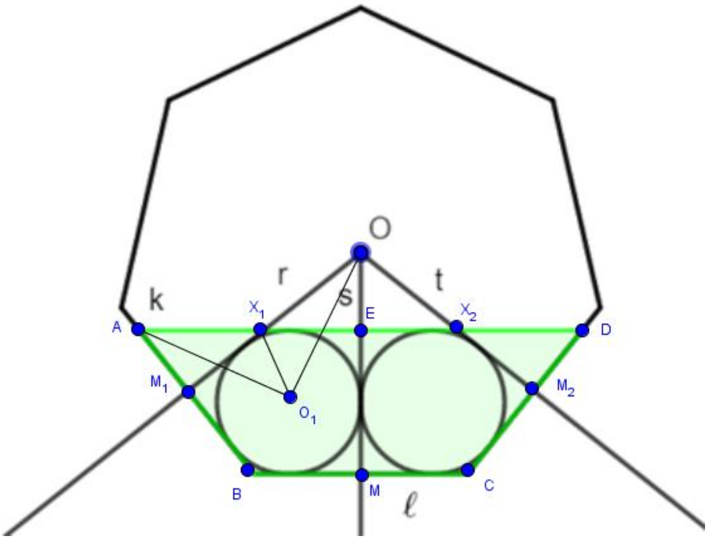


Por simetria a distância de O aos lados do polígono é a mesma e traçando os raios de O_1 e O_2 até os pontos de tangência das circunferências sabemos que O_1 é equidistante aos lados que se encontram em V_1 e O_2 é equidistante aos lados que se encontram em V_2. Podemos concluir que O_1 e O estão na bissetriz do ângulo interno $\angle V_1$ e os pontos O_2 e O estão na bissetriz interna do ângulo interno $\angle V_2$.

Seja P o ponto de tangência das duas circunferências. Veja que $P \in s$, $\angle OPO_1 = \angle OPO_2 = 90°$ e podemos concluir que $s \perp O_2O_2$. Note que O_1O_2 paralelo a AB, pois ABO_2O_1 é um retângulo e podemos concluir que s é perpendicular ao lado do polígono. Como O é o centro ele é equidistante dos vértices V_1 e V_2, dessa forma s é a mediatriz do lado V_1V_2 e corta o lado no ponto médio M.

Os triângulos OPO_1 e OP_1O_1 são congruentes por $LLA_{90°}$ já que possuem dois lados iguais $OO_1 = OO_1$ e $O_1P = O_1P_1$ e ângulo de 90°. Daí podemos concluir que os triângulos OMV_1 e OM_1V_1 são congruentes por ALA já que $OV_1 = OV_1$ e a reta OV_1 é bissetriz dos ângulos $\angle MOM_1 = \angle POP_1$ e $\angle MV_1M_1$. Concluímos que $M_1V_1 = MV_1 = \frac{\text{lado}}{2}$ e M_1 é ponto médio do outro lado que passa por V_1. Analogamente, M_2 é ponto médio do outro lado diferente de V_1V_2 que passa por V_2.

b) Seja $ABCD$ o trapézio e sejam X_1, E e X_2 os pontos de encontro da paralela ao lado com r, s e t, respectivamente.



O ângulo interno do polígono regular de n lados é $\frac{(n-2)180°}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$. Temos $\angle ABC = 180° - \frac{360°}{n}$ e $\angle DAB = \frac{360°}{n}$, pois é um trapézio. Isso nos leva a $\angle X_1AM_1 = \frac{360°}{n}$. Veja também que $\angle BOM = \angle BOM_1 = \frac{\angle BOC}{2} = \frac{360°/n}{2}$, pois simetria em relação ao centro. Assim, $\angle X_1OE = \angle M_1OM = \frac{360°}{n}$.

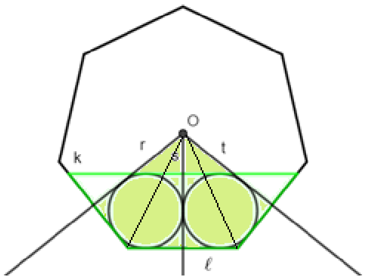
Isso nos permite concluir que os triângulos OEX_1 e AM_1X_1 possuem os mesmos ângulos, pois $\angle AX_1M_1 = \angle OX_1E$ (opostos pelo vértice) e $\angle M_1AX_1 = \angle EOX_1 = \frac{360°}{n}$.

Veja que os triângulos AX_1O_1 e OX_1O_1 são congruentes por ALA, pois $X_1O_1 = X_1O_1$ (aparece nos dois triângulos), X_1O_1 é bissetriz do ângulo EX_1M_1 já que O_1 é equidistante das retas EX_1 e M_1X_1 implicando $\angle AX_1O_1 = \angle OX_1O_1$ e ainda sabemos que $\angle X_1AO_1 = \frac{\angle X_1AM_1}{2} = \frac{180^\circ}{n} = \angle X_1OO_1$. Concluímos que $AX_1 = OX_1$.

Portanto, os triângulos OEX_1 e AM_1X_1 são congruentes. Analogamente, os triângulos OEX_2 e DM_2X_2 também são congruentes.

Há outras formas de provar que os triângulos possuem os mesmos ângulos. Poderíamos usar que $\angle OEX_1 = OMB = 90°$ *(retas AD e BC paralelas) e* $\angle AM_1X_1 = \angle AM_1O = 90°$ *(*OM_1 *é mediatriz do lado).*

c) Usando o resultado do item b podemos concluir que a área do trapézio é igual à área do pentágono destacado a seguir.



A área do pentágono é igual à soma das áreas de 4 triângulos retângulos congruentes. Suponha que cada triângulo tenha área S. Temos $\text{área}(T) = 4S$.

Já a área do polígono é $2nS$, separar o polígono em n triângulos isósceles usando o centro e um lado e cada um deles pode ser repartido em 2 triângulos de área S.

Concluímos que $\frac{\text{área}(T)}{\text{área}(P)} = \frac{4S}{2nS} = \frac{2}{n}$.

Critérios de correção

Nos critérios a seguir usamos com referência os nomes dos pontos usados na solução oficial.

Item a: 1,2 ponto

• Provar que O, O_1 e V_1 são colineares	0,6 ponto
• Provar que s é mediatriz de V_1V_2	0,3 ponto
• Provar que M_1 e M_2 são pontos médios	+0,3 ponto

Item b: 0,9 ponto

• Provar que $AX_1 = OX_1$ (usando que triângulos AX_1O_1 e OX_1O_1 são congruentes ou ideia similar)	0,3 ponto
• Provar que os triângulos AM_1X_1 e OEX_1 possuem os mesmos ângulos (são semelhantes)	0,3 ponto
• Concluir que os triângulos AM_1X_1 e OEX_1 são congruentes	+0,3 ponto

Item c: 0,9 ponto

• Afirmar usando b que $área(T)$ é igual área do pentágono r, t e os lados	0,3 ponto
• Recortou o pentágono em 4 triângulos retângulos e mesma área	+0,3 ponto
• Concluir corretamente que $\frac{\text{área}(T)}{\text{área}(P)} = \frac{2}{n}$	+0,3 ponto

PROBLEMA 5 – Nível Gama – Múltiplos com mesmos dígitos – Valor: 4 pontos

Solução

a) *Primeira parte*: sendo $\text{mdc}(D, 10) = 1$, existe $\alpha < D$ tal que $10^{\alpha} - 1$ é múltiplo de D.

Considere as D potências de 10: 1, 10, 100, ..., 10^{D-1}. Como D e 10 não têm fator primo em comum, nenhuma dessas potências é múltipla de 10. Como há $D - 1$ restos possíveis na divisão por D (pois, afinal, resto zero está eliminado), duas dessas potências, digamos 10^m e 10^n, com $m > n$, deixam o mesmo resto na divisão por D. Assim, D divide $10^m - 10^n = 10^n(10^{m-n} - 1)$. De $\text{mdc}(D, 10) = 1$, concluímos que D divide $10^{m-n} - 1$ e, sendo $1 \le m - n \le D - 1$, $\alpha = m - n < D$.

Outra solução para a primeira parte: tome $\alpha = \varphi(D)$. Temos que $\varphi(D) \le D - 1 < D$; sendo $\text{mdc}(D, 10) = 1$, pelo teorema de Euler-Fermat $10^{\alpha} \equiv 1 \pmod{D}$, ou seja, D divide $10^{\alpha} - 1$.

Segunda parte: o número p de dígitos na dízima de $\frac{1}{D}$ é o menor valor positivo de α.

$0,\overline{d_1 d_2 \dots d_p} = \frac{d_1 d_2 \dots d_p}{10^p - 1} = \frac{1}{D} \Longrightarrow \frac{10^p - 1}{D} = d_1 d_2 \dots d_p$, logo $\frac{10^p-1}{D}$ é inteiro, ou seja, D divide $10^p - 1$. O período p é a menor quantidade de dígitos do inteiro $\frac{10^p-1}{D}$. Como a quantidade de dígitos da parte inteira de $\frac{10^p-1}{D}$ aumenta com p, p também é o menor inteiro positivo tal que D divide $10^p - 1$.

b) Lembrando que $d_1 d_2 \dots d_p = \frac{10^p-1}{D}$, $m < D$ implica $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p = \frac{m}{D}(10^p - 1) < 10^p - 1$, ou seja, $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ tem no máximo p algarismos. Analogamente $n \cdot d_1 d_2 \dots d_p < 10^p - 1$ também tem no máximo p algarismos. Assim, sejam $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p = m_1 m_2 \dots m_p$ e $n \cdot d_1 d_2 \dots d_p = n_1 n_2 \dots n_p$, em que podemos ter, por exemplo, $m_1 = 0$ ou $n_1 = 0$. Note que

$$0,\overline{m_1 m_2 \dots m_p} = \frac{m_1 m_2 \dots m_p}{10^p - 1} = \frac{m \cdot d_1 d_2 \dots d_p}{10^p - 1} = m \cdot \frac{d_1 d_2 \dots d_p}{10^p - 1} = m \cdot \frac{1}{D} = \frac{m}{D}.$$

Analogamente, $0,\overline{n_1 n_2 \dots n_p} = \frac{n}{D}$.

Como $10^e \cdot m - n$ é múltiplo de D, a fração $\frac{10^e \cdot m - n}{D} = \frac{10^e \cdot m}{D} - \frac{n}{D}$ é um número inteiro. Mas note que $\frac{10^e \cdot m}{D}$ é obtido deslocando em e unidades para a direita a vírgula em $0,\overline{m_1 m_2 \dots m_p} = 0, m_1 m_2 \dots m_p m_1 m_2 \dots m_p \dots$, ou seja,

$$\frac{10^e \cdot m}{D} = m_1 m_2 \dots m_\ell, \overline{m_{\ell+1} m_{\ell+2} \dots m_p m_1 \dots m_\ell}.$$

Para que $\frac{10^e \cdot m}{D} - \frac{n}{D}$ seja inteiro, as partes decimais após a vírgula de $\frac{10^e \cdot m}{D}$ e $\frac{n}{D}$ devem se cancelar. Logo $m_{\ell+1} m_{\ell+2} \dots m_p m_1 \dots m_\ell = n_1 n_2 \dots n_p$, ou seja, deslocamos ciclicamente os dígitos de m para obter os dígitos de n. Assim, os dígitos de 1 a 9 de $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ e $n \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ são iguais e em mesma quantidade. Só não podemos dizer o mesmo para o zero pois as quantidades de dígitos desses dois números podem ser diferentes. Por exemplo, para $D = 13$, $m = 1$, $n = 3$, $e = 4$, temos $p = 6$, $d_1 d_2 \dots d_6 = m_1 m_2 \dots m_6 = 076923$ e $n_1 n_2 \dots n_6 = 230769$. Assim, $m \cdot d_1 d_2 \dots d_6 = 76923$ e $n \cdot d_1 d_2 \dots d_6 = 230769$ têm os mesmos dígitos não nulos, mas quantidades diferentes de zero.

Observações – item b:

1) A solução acima mostra que ℓ é o resto da divisão de e por p. Isso quer dizer que os dígitos de $n \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ são os de $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ deslocados ciclicamente de e unidades para a esquerda (com algumas voltas se for o caso).

2) O período de $\frac{m}{D}$ ou de $\frac{n}{D}$ não é necessariamente p, mas um divisor de p. Por exemplo, o período de $\frac{1}{49}$ é 42 e o período de $\frac{7}{49}$ é 6, que é divisor de 42. Se m e D são primos entre si, o período não muda.

3) Outras soluções podem surgir. Apresentamos mais uma a seguir.

Da mesma forma que fizemos na solução acima, mostramos que $n \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ e $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ têm no máximo p algarismos.

Mostraremos que os dígitos de $n \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ são os de $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ deslocados ciclicamente de e unidades para a esquerda, ou seja, que se $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p = m_1 m_2 \dots m_p$ então $n \cdot d_1 d_2 \dots d_p = m_{\ell+1} m_{\ell+2} \dots m_p m_1 \dots m_\ell$, em que ℓ é o resto da divisão de e por p. Sejam $A = m_1 m_2 \dots m_\ell$ e $B = m_{\ell+1} m_{\ell+2} \dots m_p$. Então $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p = A \cdot 10^{p-\ell} + B$.

Como $10^e \cdot m - n$ é múltiplo de D, $(10^e \cdot m - n) \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ também é. Assim,

$$(10^e \cdot m - n) \cdot d_1 d_2 \dots d_p = (10^e \cdot m - n) \cdot \frac{10^p - 1}{D} = (10^p - 1) \cdot \frac{10^e \cdot m - n}{D},$$

ou seja, $(10^e \cdot m - n) d_1 d_2 \dots d_p = 10^e \cdot m \cdot d_1 d_2 \dots d_p - n \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ é múltiplo de $10^p - 1$. Usando a notação de congruência,

$$10^e \cdot m \cdot d_1 d_2 \dots d_p \equiv n \cdot d_1 d_2 \dots d_p \pmod{10^p - 1}$$

Temos $10^e \cdot m \cdot d_1 d_2 \dots d_p = 10^e \left(A \cdot 10^{p-\ell} + B\right) = A \cdot 10^{p+e-\ell} + B \cdot 10^e$. Mas, sendo $e - \ell$ múltiplo de p, $10^{p+e-\ell}$ é da forma 10^{pt} e $10^{e-\ell} = 10^{p(t-1)} \equiv 1 \pmod{10^p - 1} \Longrightarrow 10^e \equiv 10^\ell \pmod{10^p - 1}$. Assim,

$$10^e \cdot m \cdot d_1 d_2 \dots d_p \equiv A \cdot 10^{pt} + B \cdot 10^e \equiv A + B \cdot 10^\ell \pmod{10^p - 1}.$$

Mas A tem ℓ dígitos, logo $A + B \cdot 10^\ell$ é o número obtido deslocando ciclicamente os dígitos de $m \cdot d_1 d_2 \dots d_p$ em ℓ unidades para a esquerda. Como $n \cdot d_1 d_2 \dots d_p < 10^p - 1$ e $A + B \cdot 10^\ell < 10^p - 1$, $n \cdot d_1 d_2 \dots d_p = A + B \cdot 10^\ell$.

c) Identificamos $m = 20$ e $n = 44$ e tentamos $e = 1$. Assim, procuramos um número D com $\text{mdc}(D, 10) = 1$ e $D > 44$ que divide $m \cdot 10^e - n = 200 - 44 = 156 = 2^2 \cdot 39$. Temos que D divide 39, que não é possível.

Podemos trocar m e n de lugar e tentar achar um divisor de $44 \cdot 10 - 20 = 420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 21$. Mas aí D divide 21, que não é possível.

Tentamos então $e = 2$. Para $m = 20$ e $n = 44$, obtemos $20 \cdot 10^2 - 44 = 2000 - 44 = 1956 = 2^2 \cdot 3 \cdot 163$, e podemos usar $D = 163$. Infelizmente o período de $\frac{1}{163}$ tem 81 dígitos, e fica difícil encontrar um valor para c, pois ainda é necessário verificar se as quantidades de zeros são iguais.

Trocamos m e n de lugar novamente, e obtemos $44 \cdot 10^2 - 20 = 4400 - 20 = 4380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 219$, e $219 = 3 \cdot 73$. Uma ideia é tentar $D = 73$. Temos $\frac{1}{73} = 0,\overline{01369863}$, $20 \cdot 1369863 = 27397260$ e $44 \cdot 1369863 = 60273972$. Assim podemos tomar $c = 1369863$.

Observações – item c:

Há várias possibilidades para c e D. Faremos algumas observações sobre os possíveis números que podem aparecer, para (esperamos!) ajudar na correção.

1) Para $D = 163$, um computador encontra

$$c = 613496932515337423458076612123738603010962271162138873974933392423575219999886688$$

Nesse caso, $20c$ e $44c$ são, respectivamente,

$$12269938650306748691615322424747720602192454232427774794986678484715043999973376 0,$$
$$26993865030674847121553709334444985324823399311341104548970692666373096799941 4272$$

2) Tentar $e = 3$ não ajuda muito, dando valores de D que geram valores de c ainda maiores.

3) Usando a ideia do problema de obter um deslocamento cíclico, o menor valor de $d_1 d_2 \ldots d_p$ é 913242, adaptado de $D = 219$ (usamos na verdade $\frac{2}{219}$ no lugar de $\frac{1}{219}$, que deixa zeros no começo de $20c$). Sem adaptações, o menor valor de c com $D < 10000$ é o encontrado na solução, ou seja, 1369863. O segundo menor valor tem 10 algarismos: 126582278481.

4) O menor valor de D para o qual é possível encontrar o valor de c é 47. Nesse caso, $c = 2127659574468085106382978723404255319148936 17$, que tem 46 dígitos. Os valores de D menores do que 100 e os valores correspondentes de c estão na tabela a seguir.

D	c
47	2127659574468085106382978723404255319148936 17
49	2040816326530612244897959183673469387755 1
51	196078431372549
57	17543859649122807
59	1694915254237288135593220338983050847457627118644067796 61
61	1639344262295081967213114754098360655737704918032786885245 9
67	149253731343283582089552238805 97
69	14492753623188405797 1
73	1369863
79	126582278481
87	114942528735632183908045977
89	11235955056179775280898876404494382022471 91
97	1030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556 7

5) Com o auxílio de um computador, encontramos todos os números c não múltiplos de 10 com no máximo 8 algarismos que satisfazem o enunciado (sendo que a grande maioria não usa a ideia mostrada nesse problema). A lista dos números está no final deste documento. Caso você esteja vendo este critério em um computador, você pode usar um mecanismo de busca para verificar se algum número com 8 algarismos ou menos serve.

Também listamos os números c não múltiplos de 10 com no máximo 8 algarismos que quase funcionam (todas quantidades de dígitos iguais, *exceto zero*). Esses números estão <u>sublinhados</u> para diferenciar dos números que servem.

Valores de $D < 1000$ para os quais o procedimento quase dá certo: 201, 203, 219, 223, 229, 233, 237, 257, 263, 267, 269, 289, 291, 293, 309, 313, 323, 327, 331, 337, 339, 343, 359, 361, 367, 373, 377, 379, 383, 389, 391, 393, 401, 413, 419, 431, 433, 437, 439. Note que nenhum valor de $D < 100$ quase dá certo.

É claro que você pode verificar se um número c funciona ou quase funciona calculando $20c$ e $44c$ e conferindo os algarismos.

Critérios de correção

Item a: 1,6 ponto

Esse item tem duas partes:

Primeira parte: sendo $\mathrm{mdc}(D, 10) = 1$, existe $\alpha < D$ tal que $10^{\alpha} - 1$ é múltiplo de D.

Segunda parte: o número p de dígitos na dízima de $\frac{1}{D}$ é o menor valor positivo de α.

A primeira parte vale 0,4 ponto e a segunda parte vale 1,2 ponto.

A primeira parte **não tem pontuações parciais**.

A segunda parte admite as seguintes pontuações parciais, que podem ser somadas entre si:

• Obter $0,\overline{d_1 d_2 \ldots d_p} = \frac{d_1 d_2 \ldots d_p}{10^p - 1}$ .... 0,4 ponto
• Mostrar que D divide $10^p - 1$ (por exemplo, usando $10^p - 1 = D \cdot d_1 d_2 \ldots d_p$) .... +0,6 ponto
• Mostrar que p é mínimo (por exemplo, usando o argumento de que quanto menor o expoente, menor é o período da fração $\frac{1}{D}$ .... +0,6 ponto

Item b: 1,2 ponto

Esse item tem como passos (1) mostrar que $m \cdot d_1 d_2 \ldots d_p$ e $n \cdot d_1 d_2 \ldots d_p$ têm no máximo p dígitos, (2) estudar $10^e \cdot m - n$ vezes $\frac{1}{D}$ ou $d_1 d_2 \ldots d_p$ em termos de dígitos e (3) concluir.

• (1) Mostrar que $m \cdot d_1 d_2 \ldots d_p$ e $n \cdot d_1 d_2 \ldots d_p$ têm no máximo p dígitos.......... 0,4 ponto
• (2) Comparar a representação decimal de $\frac{10^e \cdot m}{D}$ e $\frac{n}{D}$, ou obter que o número $(10^e \cdot m - n) d_1 d_2 \ldots d_p$ é múltiplo de $10^p - 1$ .... +0,4 ponto
• (3) Concluir, usando o fato de que $\frac{10^e \cdot m - n}{D}$ é inteiro, ou traduzindo a divisibilidade anterior em dígitos .... +0,4 ponto

Item c: 1,2 ponto

Para fazer esse item, basta citar um valor de c e mostrar que $20c$ e $44c$ têm os mesmos dígitos em mesmas quantidades.

As pontuações parciais a seguir NÃO se somam.

• Encontrar $D = 163$ sem encontrar c correspondente .... 0,4 ponto
• Encontrar $D = 73$ sem encontrar c correspondente .... 0,6 ponto
• Somente mostrar um valor de c que funciona, sem testar os dígitos .... 0,8 ponto
• Encontrar c que "quase funciona", ou seja, com quantidades iguais de algarismos, **exceto zero** .... 0,8 ponto

Erros de cálculo na hora de calcular dízimas: penalizar –0,2 ponto.

PROBLEMA 6 – Nível Gama – Conway – $\boxed{\text{Valor: 4 pontos}}$

Solução

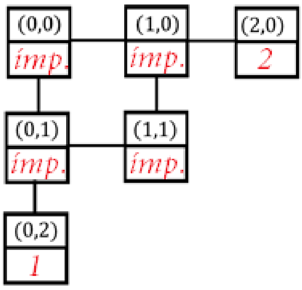
a) A resposta para $(6{,}0{,}0|6{,}7{,}8)$ é 4.

- A vê $b = 0$ e $c = 0$, mas seu número a pode ser 6, 7 ou 8.
- B vê $a = 6$ e $c = 0$, mas seu número b pode ser 0, 1 ou 2.
- C vê $a = 6$ e $b = 0$, mas seu número c pode ser 0, 1 ou 2.
- A continua vendo $b = 0$ e $c = 0$, mas agora ele sabe que $(8{,}0{,}0)$ seria resolvido em 2 perguntas e $(7{,}0{,}0)$ seria respondido em 3 perguntas. Portanto, ele pode concluir que $a = 6$ e responder "Sim".

b) A resposta para $(5{,}1{,}0|6{,}7{,}8)$ é 7.

- A vê $b = 1$ e $c = 0$, mas seu número a pode ser 5, 6 ou 7.
- B vê $a = 5$ e $c = 0$, mas seu número b pode ser 1, 2 ou 3.
- C vê $a = 5$ e $b = 1$, mas seu número c pode ser 0, 1 ou 2.
- A percebe que não está no caso $(7{,}1{,}0)$, pois teria sido resolvido em 3 perguntas. Mas ele não consegue resolver entre $(5{,}1{,}0)$ e $(6{,}1{,}0)$ e responde "Não".
- B percebe que não está no caso $(5{,}3{,}0)$, pois teria sido resolvido em 3 perguntas. Porém fica entre os casos $(5{,}2{,}0)$ e $(5{,}1{,}0)$ e responde "Não".
- C nem consegue eliminar possibilidades por enquanto. Ele continua entre $(5{,}1{,}0)$, $(5{,}1{,}1)$ e $(5{,}1{,}2)$.
- A percebe que não está no caso $(6{,}1{,}0)$, pois esse teria sido resolvido em 5 perguntas. Então ele pode concluir que $a = 5$ e responder "Sim".

c) A seguir temos o diagrama completo onde "ímp." Indica que é impossível.



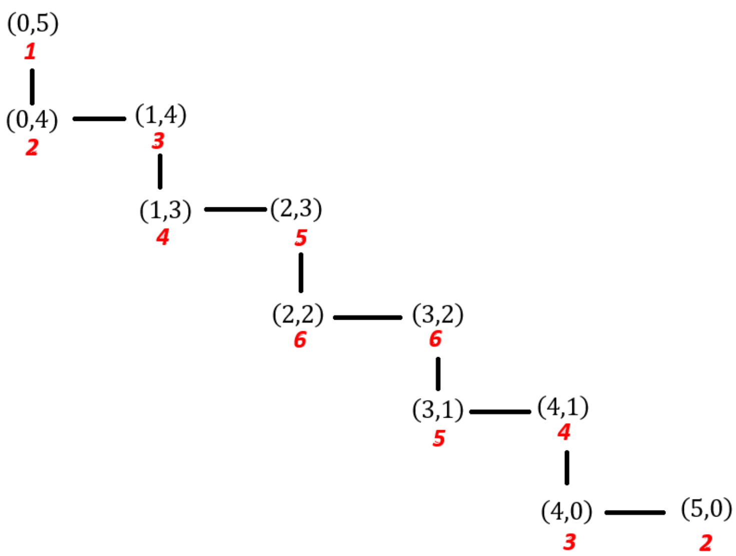
Veja que para $(0{,}2)$ é 1, pois A vê $b = 2$ e nota que seu número tem que ser $a = 0$. Já para $(2{,}0)$ o A não sabe, mas B pode concluir que $b = 0$ já que vê $a = 2$.

Os outros 4 casos são impossíveis de resolver, pois a cada rodada os jogadores não conseguem informações novas. Por exemplo, no caso $(0{,}0|0{,}1{,}2)$ temos

- A vê 0 e conclui que seu número é 0, 1 ou 2
- B vê 0 e como A não respondeu sabe que seu número não é 2. Conclui que seu número é 0 ou 1.
- A vê 0 e como B não respondeu sabe que seu número não é 2. Conclui que só pode ser 0 ou 1.

Agora eles ficariam em ciclo sem eliminar qualquer as possibilidades (1,0) e (0,1).

d) Na figura a seguir temos o diagrama completo.



e) Para resolver o quebra-cabeças $(n, n|2n, 2n+1)$ são necessárias $2n+2$ perguntas. Podemos preencher por camadas dos pontos mais distantes do centro ponto (n, n) no plano até o ponto (n, n).
Para o par $(0,2n+1)$ basta 1 pergunta, pois A vê $b = 2n+1$ e conclui que seu número é 0. Já para o par $(0,2n)$ são 2 perguntas, pois A vê $b = 2n$ e não saberia se é $(0,2n)$ ou $(1,2n)$ e B ao ver $a = 0$ e sabendo que $(0,2n+1)$ já estaria resolvido direto conclui que $b = 2n$. Para o par $(2n+1,0)$ bastam 2 perguntas, pois A na primeira não saberia dizer se é $(2n, 0)$ ou $(2n+1,0)$ e B na segunda vê $2n+1$ e conclui que $b = 0$.
Provaremos por indução que para $1 \leq k \leq n$ precisamos de $2k$ perguntas podemos resolver $(2n+2-k, k-1)$ e $(k-1,2n+1-k)$. Incluiremos também na indução que com até $2k$ perguntas só é possível resolver $(x, 2n-x)$ e $(x, 2n+1-x)$ para $x \leq k-1$ e $(2n-y, y)$ e $(2n+1-y, y)$ para $y \leq k-1$.

- Para resolver $(k, 2n+1-k)$ notemos que A está vendo $b = 2n+1-k$ e o par $(k-1,2n+1-k)$ seria resolvido com $2k$ perguntas. Assim, com $2k+1$ perguntas o A conclui corretamente que seu número é $a = k$.
- Para resolver $(2n+1-k, k-1)$ sabemos que A está vendo $b = k-1$ e o par $(2n+2-k, k-1)$ seria resolvido com $2k$ perguntas. Desse modo, com $2k+1$ perguntas o A conclui corretamente que $a = 2n+2-k$.
- Para resolver $(k, 2n-k)$ notemos que B está vendo $a = k$ e o par $(k, 2n+1-k)$ seria resolvido com $2k+1$ perguntas. Na pergunta $2k+2$ o B pode concluir que $b = 2n-k$.
- Para resolver $(2n+1-k, k)$ sabe-se que B vê $b = 2n+1-k$ e que o par $(2n+1-k, k-1)$ seria resolvido em $2k+1$ perguntas. Dessa forma, com $2k+2$ perguntas B pode concluir corretamente que $b = k$.

A outra parte da indução segue do fato de que para resolver (a, b) com $2k+2$ perguntas precisamos eliminar uma das possibilidade $(a, b \pm 1)$ ou $(a \pm 1, b)$ com $2k+1$ perguntas ou menos. Porém por hipótese isso não é possível.

Assim, para resolver $(1010,1010|2020,2021)$ são necessárias $2 \cdot 1010 + 2 = 2022$ perguntas.

f) A ideia é usar que $(a, b|s_1, s_2)$ tratamos pontos sobre os segmentos $x + y = s_1$ e $x + y = s_2$ com $x, y \geq 0$. Sabemos que $(0, s_2)$ pode ser resolvido com 1 pergunta e $(0, s_1)$ pode ser resolvido com 2 perguntas. Só queremos provar que é finito, então podemos fazer apenas da esquerda para a direita. Suponha que $(x, s_1 - x)$ e $(x, s_2 - x)$ para todo $x < k$ podem ser resolvidos com um número finito de perguntas, então para $x = k$ temos

- Para $(k, s_2 - k)$ se $s_2 - k > s_1$, então A consegue resolver com 1 pergunta. Se tivermos $s_2 - k \leq s_1$, então A teria que determinar qual dos pares $(s_1 - (s_2 - k), s_2 - k)$ ou $(k, s_2 - k)$ é o correto. Porém, $s_1 - (s_2 - k) = k - (s_2 - s_1) < k$ pode ser resolvido com um número finito de passos e com até 2 perguntas a mais A poderia resolver $(k, s_2 - k)$.
- Para $(k, s_1 - k)$ já sabemos que $(k, s_2 - k)$ pode ser resolvido e com 1 pergunta a mais B pode resolver $(k, s_1 - k)$.

Critérios de correção

Item a: 0,4 ponto

• Afirmou que são 4 perguntas	0,2 ponto
• Mostrou os 4 passos	+0,2 ponto

Item b: 0,8 ponto

• Afirmou que são 7 perguntas	0,4 ponto
• Mostrou os 7 passos	+0,4 ponto

Item c: 0,8 ponto

• Afirmou que para (0,2) e (2,0) bastam 1 e 2 perguntas, respectivamente	0,2 ponto
• Afirmou que para os outros 4 pares é impossível	0,2 ponto
• Argumentou que para esses pares A e B não conseguem eliminar possibilidades	+0,4 ponto

Item d: 0,8 ponto

As pontuações a seguir não devem ser somadas.

• Diagrama completo com os 11 valores corretos	0,8 ponto
• Diagrama completo com 9 ou 10 valores corretos	0,6 ponto
• Diagrama completo com 6, 7 ou 8 valores corretos	0,4 ponto
• Diagrama completo com menos que 6 valores corretos	0 ponto

Item e: 0,6 ponto

• Mostrar quebra-cabeça que precisa de mais que 2020 perguntas	0,2 ponto
• Justificar que o número de perguntas necessárias é maior que 2020	+0,4 ponto

Item f: 0,6 ponto

• Demonstração correta	0,6 ponto

PROBLEMA 7 – Nível Gama – Cortando a rosquinha – $\boxed{\text{Valor: 5 pontos}}$

Solução

a) A interseção do plano β com o toro forma duas circunferências. Por O estar no eixo z ele é equidistante dos pontos de cada uma das circunferências.

Como $OY = OQ$ temos Y na interseção de β com o toro. Como Y está na perpendicular por P a TT', então tem que estar sobre o plano α.

b) Provaremos que os triângulos CTO e OXP são semelhantes. É conhecido, por tangente, que $m(C\hat{T}O) = 90° = m(O\hat{X}P)$ e por alternos internos temos que $m(C\hat{O}T) = m(O\hat{P}X)$. Da razão entre os lados segue que $\frac{CT}{OX} = \frac{OC}{OP}$.

Usando novamente os ângulos de 90° e os ângulos alternos internos temos triângulos semelhantes OXQ e CRO. Usando que os lados são proporcionais temos $\frac{OX}{CR} = \frac{OQ}{OC}$.

c) Multiplicando as expressões do item anterior temos

$$\frac{CT}{CR} = \frac{OQ}{OP}$$

Mas sabemos que $CT = CQ$ e que $OQ = OY$ nos levando a

$$\frac{CQ}{CR} = \frac{OY}{OP}$$

Como $m(C\hat{R}Q) = m(O\hat{P}Y) = 90°$ concluímos que os ângulos $R\hat{C}Q$ e $P\hat{O}Y$ possuem o mesmo cosseno e estão entre 0° e 90°. Portanto, $m(R\hat{C}Q) = m(P\hat{O}Y) = x$ e os triângulos CQR e OYP são semelhantes por AA.

Os ângulos pedidos são

$$m(B\hat{O}Y) = m(B\hat{O}P) + m(P\hat{O}Y) = 90° + x \quad e \quad m(A\hat{O}Y) = 180° - m(B\hat{O}Y) = 90° - x$$

d) Por Lei dos Cossenos nos triângulos AOY e BOY,

$$AY^2 = OA^2 + OY^2 - 2 \cdot OA \cdot OY \cdot \cos A\hat{O}Y \quad e \quad BY^2 = OB^2 + OY^2 - 2 \cdot OB \cdot OY \cdot \cos B\hat{O}Y$$

Usando alguns resultados de trigonometria temos

$$\cos A\hat{O}Y = \cos(90° - x) = \operatorname{sen} x = \frac{RQ}{CQ} \quad e \quad \cos B\hat{O}Y = \cos(90° + x) = -\operatorname{sen} x = -\frac{RQ}{CQ}$$

Que nos leva a

$$AY^2 = OA^2 + OY^2 - 2 \cdot OA \cdot OY \cdot \frac{RQ}{CQ}$$

$$BY^2 = OB^2 + OY^2 + 2 \cdot OB \cdot OY \cdot \frac{RQ}{CQ}$$

e) Veja que $OB - OA = 2 \cdot CQ$, pois é o diâmetro da circunferência menor que fica entre as duas circunferências maiores. Como C é o centro, e CR é perpendicular à corta QS, então CR é mediatriz e temos $2 \cdot RQ = QS$. Logo,

$$OY + \frac{(OB - OA)RQ}{CQ} = OQ + \frac{2 \cdot CQ \cdot RQ}{CQ} = OQ + 2 \cdot RQ = OQ + QS = OS$$

f) Somando as duas expressões do item d e usando o resultado do item e

$$AY^2 + BY^2 = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OY \left(OY + \frac{(OB - OA)RQ}{CQ} \right) = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OQ \cdot OS$$

Mas por potência do ponto O em relação à circunferência de centro C temos $OQ \cdot OS = OA \cdot OB$ e concluímos que

$$AY^2 + BY^2 = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB = (OA + OB)^2 = AB^2$$

Assim, Y está na circunferência de diâmetro AB. Usando a equação de potência de ponto dada no enunciado temos que T e T' estão na circunferência de diâmetro AB. Logo, Y, T e T' estão na circunferência de diâmetro AB.

g) Com os passos demonstrados podemos concluir que as interseções de r com o toro determina quatro ponto B, A', A e B e cada plano β perpendicular ao eixo z determina dois pontos Y e Y' sobre α e o toro que estão sobre duas circunferências de diâmetros AB e $A'B'$, respectivamente, e passam pelos pontos T e T'.

Critérios de correção

Item a: 0,6 ponto

• Afirmou que as figuras formadas são circunferências .... 0,2 ponto • Explicou corretamente por que Y está na interseção de α com o toro .... +0,4 ponto

Item b: 1,2 ponto

• Provar a semelhança entre os triângulos CTO e OXP .... 0,6 ponto • Provar a semelhança entre os triângulos OXQ e CRO .... 0,6 ponto

Item c: 1,0 ponto

• Multiplicar as equações do item b para obter $\frac{CT}{CR} = \frac{OQ}{OP}$ ou equivalente $\frac{CQ}{CR} = \frac{OY}{OP}$ .... 0,5 ponto • Concluir corretamente a demonstração de que CQR e OYP são semelhantes .... +0,3 ponto • Escrever que $m\left(B\hat{O}Y\right) = 90° + x$ e $m\left(A\hat{O}Y\right) = 90° - x$ .... 0,2 ponto

Item d: 0,7 ponto

• Escrever as equações usando Lei dos Cossenos em AOY e BOY .... 0,4 ponto • Deixar apenas em função de OA, OB, OY, CQ e RQ .... +0,3 ponto

Item e: 0,5 ponto

• Demonstração correta de que $OS = OY + \frac{(OB-OA)RQ}{CQ}$ .... 0,5 ponto

Item f: 0,5 ponto

• Demonstração correta de $AY^2 + BY^2 = AB^2$ e mencionar diâmetro AB ou equivalente que relacione T .... 0,5 ponto

Item g: 0,5 ponto

• Argumentação correta mencionando duas circunferências de diâmetros AB e $A'B'$ ou equivalente que deixe claro como as duas circunferências podem ser encontradas .... 0,5 ponto

Problema 5 – Nível Gama – múltiplos com mesmos dígitos

Lista de valores de $c < 10^8$ que satisfazem o item c

138, 912, 2046, 6912, 9162, 9357, 10923, 12288, 12738, 12888, 13653, 14793, 16371, 20796, 61392, 63189, 64125, 68571, 68814, 69162, 69525, 69618, 70692, 71796, 71835, 81912, 91347, 91662, 93582, 102288, 109173, 109248, 114288, 118269, 118575, 122892, 124788, 125475, 127305, 127335, 127488, 127842, 127968, 128205, 128475, 129138, 132774, 136758, 138471, 142842, 147918, 149793, 166371, 171378, 182619, 182694, 183594, 183744, 191205, 192075, 192342, 193269, 193575, 196143, 204585, 204642, 206985, 208296, 209616, 211596, 214095, 214788, 577314, 591321, 591345, 593211, 594132, 609123, 609321, 609342, 611598, 613905, 613917, 614367, 616371, 620685, 623364, 626373, 626388, 632364, 632739, 633189, 637413, 641025, 641142, 641319, 641625, 643215, 659814, 662046, 683754, 685425, 685623, 685731, 685821, 691347, 691662, 696123, 696168, 697623, 706185, 706881, 706917, 708192, 710685, 716475, 716796, 717819, 717891, 718335, 725466, 729681, 743661, 796863, 817296, 818571, 818814, 819162, 819525, 819618, 820692, 821796, 821835, 831912, 842367, 913242, 914127, 916347, 916662, 923142, 923211, 924618, 928224, 931902, 932019, 932922, 933972, 934047, 935832, 940182, 947862, 961725, 966225, 981774, 1022892, 1024788, 1068912, 1071888, 1073364, 1086423, 1091412, 1091673, 1091748, 1092321, 1092498, 1093242, 1094232, 1141788, 1142892, 1150773, 1152378, 1152735, 1153728, 1153878, 1172805, 1182519, 1182564, 1182642, 1183269, 1185825, 1189725, 1190475, 1192962, 1198725, 1218288, 1227921, 1227945, 1228242, 1228653, 1228905, 1228917, 1229142, 1229238, 1229487, 1230975, 1232742, 1233729, 1238229, 1242738, 1242888, 1243287, 1243782, 1247892, 1249788, 1250475, 1266378, 1268925, 1269228, 1273335, 1273653, 1274283, 1274643, 1274805, 1274835, 1274988, 1277331, 1278417, 1279668, 1282092, 1283205, 1284288, 1285773, 1288653, 1289793, 1291638, 1292283, 1292958, 1293246, 1295892, 1318929, 1322919, 1322946, 1323729, 1324296, 1327749, 1332774, 1339779, 1347915, 1357296, 1365258, 1366758, 1367508, 1367583, 1369032, 1369863, 1375623, 1376073, 1380138, 1382442, 1383459, 1387563, 1391088, 1405773, 1406598, 1409532, 1409817, 1410282, 1410873, 1417842, 1418262, 1419327, 1420782, 1426383, 1427331, 1428417, 1430457, 1432155, 1434567, 1434657, 1436532, 1447683, 1461573, 1468203, 1470888, 1473093, 1477863, 1479168, 1482684, 1497918, 1499793, 1546143, 1571478, 1579623, 1579842, 1586448, 1593507, 1593711, 1595235, 1596339, 1602378, 1602735, 1603728, 1603878, 1609371, 1609392, 1609839, 1623705, 1637085, 1637142, 1637571, 1637628, 1638492, 1643397, 1643592, 1648725, 1666371, 1671378, 1687125, 1688721, 1689357, 1707735, 1734285, 1737138, 1737342, 1773849, 1773942, 1780689, 1784235, 1788849, 1818954, 1820094, 1822599, 1825119, 1825194, 1826421, 1826484, 1826493, 1827354, 1829859, 1832619, 1832694, 1833594, 1833744, 1837494, 1838094, 1839471, 1839492, 1839744, 1847859, 1859934, 1863804, 1872141, 1872441, 1880241, 1888119, 1891071, 1892625, 1897434, 1900932, 1902285, 1902375, 1903638, 1903875, 1907046, 1910523, 1912092, 1913721, 1914357, 1916205, 1917075, 1917342, 1920525, 1920825, 1923075, 1923417, 1924842, 1932519, 1932564, 1932642, 1933269, 1935825, 1939725, 1940475, 1942962, 1948725, 1961418, 1962843, 1962933, 1976433, 1978089, 1985934, 1989075, 1993884, 2009319, 2045835, 2046192, 2046405, 2046417, 2054571, 2068971, 2069046, 2069145, 2069871, 2069985, 2070546, 2071455, 2074641, 2075466, 2079585, 2079642, 2081985, 2083296, 2084865, 2091246, 2094786, 2096166, 2104638, 2114688, 2116455, 2116596, 2118456, 2119095, 2119638, 2119785, 2119875, 2123196, 2136963, 2139705, 2140455, 2141457, 2141595, 2145705, 2145912, 2146728, 2147319, 2147892, 2149788, 2164575, 2186463, 2191098, 2206896, 2209866, 2213955, 2234196, 2234691, 2243646, 2245941, 5122731, 5161371, 5182614, 5204616, 5229681, 5243661, 5261592, 5270466, 5409117, 5411592, 5461725, 5466225, 5613912, 5707731, 5711796, 5763663, 5768214, 5774814, 5827314, 5864025, 5912532, 5913231, 5913321, 5916321, 5916345, 5932086, 5932311, 5932617, 5933211, 5933814, 5934102, 5941332, 5941632, 5981625, 6012273, 6022821, 6025932, 6034275, 6071373, 6071388, 6091248, 6091623, 6093231, 6093321, 6093417, 6114573, 6115998, 6116478, 6116598, 6122898, 6122958, 6129888, 6136503, 6137538, 6139167, 6139734, 6139743, 6141237, 6143667, 6147339, 6166371, 6171378, 6183714, 6184236, 6187116, 6188814, 6207366, 6208185, 6211866, 6228525, 6231369, 6233364, 6236412, 6243867, 6248364, 6251373, 6251388, 6252285, 6252375, 6253638, 6253875, 6263748, 6298884, 6313689, 6313869, 6318594, 6318714, 6321369, 6321891, 6324864, 6327489, 6329589, 6332364, 6332739, 6333189, 6336414, 6336594, 6338799, 6338979, 6339789, 6341397, 6343647, 6344637, 6345639, 6345864, 6347364, 6352296, 6364038, 6371913, 6373119, 6374025, 6374163, 6374412, 6374913, 6376413, 6379809, 6381189, 6381414, 6384471, 6384492, 6384714, 6388119, 6391071, 6392625, 6397434, 6400932, 6402285, 6402375, 6403638, 6403875, 6407046, 6411405, 6411417, 6412638, 6412842, 6413241, 6413274, 6413319, 6413814, 6416025, 6416142, 6416319, 6416625, 6423141, 6432192, 6433215, 6441822, 6474339, 6478164, 6478209, 6479412, 6502341, 6599814, 6604623, 6604842, 6614145, 6614487, 6614928, 6620796, 6626478, 6641145, 6647814, 6659814, 6662046, 6704781, 6712296, 6728481, 6734616, 6784614, 6821019, 6826854, 6830265, 6833754, 6835269, 6837504, 6838014, 6840492, 6841902, 6842019, 6844065, 6847041, 6847431, 6849315, 6854175, 6854613, 6854763, 6856248, 6856413, 6857085, 6857142, 6857436, 6857481, 6858231, 6858321, 6858525, 6861963, 6864042, 6864045, 6865314, 6867621, 6876621, 6881025, 6891267, 6891315, 6892617, 6898179, 6901821, 6901842, 6902367, 6903867, 6913242, 6914127, 6916347, 6916662, 6923142, 6923211, 6924618, 6928224, 6942762, 6942822, 6942912, 6944277, 6947532, 6952638, 6952731, 6957618, 6958623, 6961248, 6961668, 6961863, 6968025, 6975123, 6975342, 6976023, 6976248, 6977148, 6981735, 6988209, 7015935, 7016391, 7018419, 7025466, 7046571, 7046784, 7068585, 7069167, 7069884, 7073766, 7081881, 7081917, 7083192, 7085685, 7089675, 7096116, 7097616, 7101819, 7107366, 7108185, 7111596, 7118766, 7131915, 7136538, 7141155, 7141857, 7142967, 7145673, 7150932, 7152285, 7152375, 7153638, 7153875, 7157046, 7163829, 7164291, 7166475, 7166796, 7167819, 7167891, 7168269, 7168575, 7172835, 7173291, 7175685, 7176891, 7178241, 7178274, 7178319, 7178916, 7179141, 7179585, 7179642, 7182051, 7182306, 7182381, 7182921, 7182945, 7183335, 7183971, 7184046, 7188141, 7192842, 7193292, 7193295, 7194282, 7198842, 7206876, 7208691, 7209186, 7213692, 7218285, 7218396, 7223691, 7241835, 7250466, 7254666, 7261596, 7264683, 7269891, 7285266, 7296681, 7296726, 7299066, 7310685, 7312365, 7314684, 7316046, 7321911, 7365231, 7366071, 7367625, 7373115, 7376175, 7376625, 7411836, 7413192, 7418211, 7419132, 7428216, 7435686, 7435866, 7436661, 7452366, 7453866, 7461684, 7468431, 7479681, 7493661, 7618215, 7663671, 7670685, 7681854, 7682169, 7684215, 7693215, 7718466, 7730115, 7730715, 7736721, 7761705, 7821774, 7842315, 7886721, 7911705, 7918224, 7918422, 7919322, 7921821, 7921842, 7923216, 7932195, 7966293, 7967025, 7973169, 7981569, 7981605, 7983615, 8013675, 8167296, 8174796, 8183754, 8185425, 8185623, 8185731, 8185821, 8191347, 8191662, 8196123, 8196168, 8197623, 8206185, 8206881, 8206917, 8208192, 8210685, 8216475, 8216796, 8217819, 8217891, 8218335, 8225466, 8229681, 8243661, 8296863, 8317296, 8318571, 8318814, 8319162, 8319525, 8319618, 8320692, 8321796, 8321835, 8331912, 8342367, 8415639, 8417367, 8423667, 8424867, 8428671, 8433765, 8435865, 8436564, 8452365, 8453865, 8468625, 8523675, 8526819, 8538675, 8568525, 8570685, 8593215, 8652435, 8654934, 8671425, 8674335, 8688114, 8743215, 8811864, 8844675, 8897175, 8904675, 8912967, 8956173, 8957175, 8968221, 8971821, 8971842, 8977671, 9046821, 9046842, 9049182, 9094527, 9095262, 9095322, 9095412, 9102762, 9102822, 9102912, 9119862, 9120138, 9120246, 9121788, 9123927, 9124377, 9124734, 9124743, 9127095, 9130137, 9132105, 9132417, 9132459, 9132492, 9133242, 9134742, 9139062, 9140382, 9141027, 9141252, 9141627, 9163242, 9164127, 9166347, 9166662, 9173142, 9173211, 9174618, 9178224, 9185712, 9201273, 9207762, 9207822, 9207912, 9211788, 9213927, 9225246, 9226473, 9231237, 9231405, 9231417, 9231645, 9232086, 9232311, 9232617, 9233211, 9233814, 9237312, 9238221, 9241338, 9246123, 9246168, 9247623, 9248142, 9248211, 9249618, 9276324, 9282249, 9283224, 9286713, 9287163, 9291324, 9292071, 9304572, 9310473, 9310482, 9319002, 9320019, 9320064, 9320142, 9320397, 9321105, 9321507, 9324102, 9326922, 9327195, 9327402, 9328572, 9329172, 9331287, 9331902, 9332019, 9332922, 9333972, 9334047, 9337179, 9337215, 9339927, 9341052, 9345612, 9356232, 9358332, 9359262, 9360705, 9364062, 9370617, 9373107, 9382206, 9400182, 9401832, 9420477, 9421827, 9422292, 9422295, 9422475, 9429207, 9435927, 9452292, 9452295, 9452475, 9457032, 9461232, 9472863, 9476232, 9487707, 9493137, 9497862, 9522921, 9522945, 9523092, 9523206, 9534297, 9537432, 9540912, 9543297, 9570231, 9571125, 9571407, 9572625, 9611412, 9616407, 9616725, 9632184, 9640707, 9666225, 9682134, 9713907, 9733614, 9741123, 9741342, 9743625, 9761412, 9777171, 9816774, 9817749, 9817974, 9821115, 9822615, 9867225, 9936612, 9981774, 10227921, 10227945, 10228242, 10228653, 10228905, 10228917, 10229142, 10229238, 10229487, 10230975, 10232742, 10233729, 10238229, 10242738, 10242888, 10243287, 10243782, 10247892, 10249788, 10255932, 10259232, 10270455, 10272921, 10272945, 10273092, 10273206, 10284297, 10287432, 10290912, 10293297, 10295673, 10322742, 10357275, 10365228, 10388229, 10392282, 10392957, 10422738, 10422888, 10427319, 10437957, 10447737, 10447887, 10461573, 10468203, 10470888, 10473093, 10481907, 10484157, 10512273, 10522968, 10570773, 10591323, 10609323, 10670478, 10672848, 10685523, 10687071, 10689162, 10706871, 10706892, 10707285, 10707375, 10711875, 10714137, 10716378, 10718235, 10728525, 10731369, 10733364, 10736412, 10743867, 10748364, 10768239, 10773912, 10797339, 10818912, 10821888, 10823364, 10836423, 10864173, 10864248, 10878423, 10887198, 10897923, 10899273, 10912188, 10912437, 10914162, 10916412, 10916673, 10916748, 10917321, 10917498, 10923231, 10923321, 10924821, 10924998, 10932105, 10932417, 10932459, 10932492, 10933242, 10935705, 10937175, 10941732, 10942332, 10942482, 10952319, 10974339, 10982184, 11027319, 11059323, 11068923, 11073189, 11091423, 11159937, 11173455, 11194728, 11195523, 11199387, 11204688, 11218455, 11240973, 11245923, 11376528, 11379153, 11392905, 11397255, 11404755, 11414292, 11414295, 11415525, 11416788, 11417892, 11418927, 11423292, 11423295, 11426871, 11426892, 11427921, 11427945, 11428242, 11428653, 11428905, 11428917, 11429142, 11429238, 11429487, 11436927, 11442687, 11447688, 11457255, 11492793, 11500773, 11507748, 11508273, 11512278, 11524878, 11527371, 11527485, 11528871, 11536428, 11537325, 11537478, 11541378, 11579928, 11585478, 11595771, 11596128, 11596293, 11597571, 11597628, 11599293, 11607378, 11672805, 11689257, 11702955, 11728578, 11732592, 11747805, 11756871, 11756892, 11757285, 11757375, 11778069, 11790984, 11790993, 11795538, 11796255, 11809575, 11809788, 11820756, 11824281, 11825019, 11825064, 11825142, 11825715, 11826288, 11826405, 11826417, 11826735, 11828721, 11829462, 11832519, 11832564, 11832642, 11833269, 11835525, 11837079, 11856228, 11857281, 11857638, 11858325, 11864427, 11870766, 11878125, 11879634, 11901825, 11917962, 11929857, 11942757, 11952975, 11961228, 11962293, 11963475, 11976228, 11978628, 11998725, 12022896, 12023796, 12027966, 12038796, 12068829, 12069288, 12086829, 12086925, 12092685, 12136755, 12157296, 12177819, 12177891, 12182892, 12183288, 12192738, 12192888, 12236829, 12236925, 12273006, 12275571, 12276255, 12278571, 12278763, 12279171, 12281415, 12282105, 12282417, 12282459, 12282492, 12283242, 12284769, 12286758, 12288471, 12289167, 12289734, 12289743, 12291255, 12291405, 12291417, 12291642, 12291738, 12292305, 12292335, 12292488, 12292824, 12293745, 12294588, 12294678, 12294738, 12294987, 12295521, 12295905, 12309288, 12322881, 12324291, 12327417, 12327459, 12327492, 12329274, 12329457, 12329769, 12332742, 12333729, 12335475, 12336429, 12337425, 12337479, 12337959, 12339729, 12342915, 12376728, 12379482, 12379734, 12379743, 12382425, 12382479, 12383229, 12384729, 12392925, 12414282, 12417738, 12417888, 12422838, 12423282, 12426888, 12427305, 12427335, 12427488, 12427842, 12427968, 12428205, 12428475, 12429138, 12429588, 12429678, 12429738, 12433287, 12433788, 12435975, 12437292, 12437295, 12437475, 12437832, 12442737, 12442887, 12457284, 12457734, 12457743, 12458925, 12475923, 12477921, 12477945, 12478242, 12478653, 12478905, 12478917, 12479142, 12479238, 12479487, 12480975, 12482742, 12483729, 12488229, 12492738, 12492888, 12493287, 12493782, 12497892, 12499788, 12500475, 12516378, 12518925, 12519228, 12529092, 12540975, 12542955, 12547284, 12547638, 12563925, 12573675, 12592923, 12595725, 12622755, 12622788, 12627738, 12627888, 12636528, 12642738, 12642888, 12647793, 12657978, 12666378, 12673728, 12688479, 12689175, 12691728, 12692325, 12692478, 12730092, 12730788, 12732051, 12732306, 12732381, 12732921, 12732945, 12733335, 12733971, 12734046, 12736758, 12738471, 12741783, 12742833, 12743835, 12746193, 12746418, 12748335, 12748653, 12749283, 12749643, 12749805, 12749835, 12749988, 12756858, 12757968, 12763455, 12773085, 12773331, 12773763, 12774831, 12784167, 12785913, 12788763, 12792138, 12796668, 12801819, 12811875, 12818721, 12820917, 12822921, 12822945, 12823092, 12823206, 12826824, 12829734, 12829743, 12832092, 12833205, 12834237, 12835923, 12841788, 12842892, 12847284, 12847638, 12857748, 12858273, 12861978, 12865848, 12868263, 12873342, 12874338, 12880773, 12881598, 12886758, 12888471, 12892842, 12897918, 12899793, 12909618, 12910938, 12913455, 12913653, 12914793, 12916638, 12917283, 12917958, 12921828, 12922833, 12924783, 12929583, 12932496, 12932847, 12933246, 12947283, 12947883, 12948375, 12948732, 12955368, 12957384, 12958392, 12958734, 12958743, 12958905, 12958917, 12961884, 12973734, 12973743, 12974385, 12978858, 12986907, 12987705, 13027365, 13028865, 13073775, 13078773, 13092873, 13092987, 13093287, 13093782, 13097868, 13187079, 13189179, 13189269, 13192428, 13228959, 13229169, 13236429, 13237425, 13237479, 13237959, 13241475, 13241796, 13242819, 13242891, 13243791, 13247919, 13247946, 13248729, 13249296, 13254684, 13266369, 13273929, 13274142, 13274238, 13274355, 13277421, 13277499, 13289274, 13292319, 13318929, 13322919, 13322946, 13323729, 13324296, 13327749, 13332774, 13339779, 13342869, 13369794, 13395729, 13399779, 13454769, 13457742, 13458729, 13460475, 13461975, 13464297, 13468269, 13468575, 13472919, 13472946, 13473729, 13474296, 13479165, 13497915, 13574796, 13579788, 13582296, 13594788, 13652508, 13652583, 13655448, 13666758, 13667508, 13667583, 13671078, 13675008,

13675083, 13675833, 13680963, 13683804, 13685763, 13688121, 13689063, 13690332, 13690623, 13690845, 13699863,
13700913, 13715238, 13715388, 13731255, 13732671, 13733571, 13740282, 13743588, 13745238, 13745388, 13747143,
13747443, 13750623, 13751073, 13754613, 13754763, 13756248, 13756413, 13760748, 13760823, 13761528, 13765848,
13765953, 13766028, 13767078, 13768098, 13770846, 13774533, 13782108, 13784613, 13784763, 13796043, 13796703,
13797033, 13799088, 13800138, 13800912, 13802046, 13804734, 13804743, 13806423, 13807923, 13809618, 13810938,
13811871, 13811892, 13814142, 13814238, 13817346, 13818804, 13819038, 13823079, 13824381, 13824417, 13824942,
13832442, 13833459, 13834584, 13846071, 13847085, 13847142, 13847442, 13869063, 13875063, 13876758, 13881255,
13910838, 13916088, 13929108, 13936563, 13949568, 13951593, 13959312, 13970643, 13971093, 13972908, 13979088,
13982907, 14006838, 14045643, 14046093, 14050932, 14057748, 14058273, 14059338, 14061888, 14064138, 14065998,
14066478, 14066598, 14074638, 14077458, 14078457, 14078982, 14079588, 14079678, 14079738, 14084637, 14087958,
14093352, 14095332, 14098167, 14099817, 14102832, 14108373, 14108748, 14108973, 14109618, 14110938, 14125638,
14131905, 14132055, 14138142, 14140638, 14147817, 14159532, 14159817, 14160282, 14160873, 14167842, 14168262,
14169327, 14170782, 14176383, 14177331, 14178417, 14180457, 14182512, 14183262, 14183721, 14188812, 14193252,
14193327, 14200932, 14207832, 14208282, 14214282, 14217825, 14222835, 14223291, 14230638, 14230782, 14238138,
14238342, 14251383, 14263833, 14273085, 14273331, 14273763, 14274831, 14284167, 14285913, 14288763, 14292138,
14296032, 14297331, 14298057, 14298807, 14304582, 14314095, 14314788, 14323065, 14323767, 14323815, 14326968,
14332155, 14336538, 14345667, 14346582, 14360688, 14365332, 14365623, 14365845, 14366088, 14381595, 14427468,
14475183, 14476833, 14523192, 14539182, 14547708, 14548407, 14550432, 14563437, 14564073, 14570238, 14570388,
14570643, 14571093, 14572863, 14577183, 14581728, 14593362, 14595432, 14602293, 14602932, 14612733, 14615748,
14615823, 14640732, 14670228, 14682258, 14682363, 14682708, 14683203, 14702283, 14706393, 14708388, 14708643,
14723391, 14723643, 14728908, 14729358, 14730918, 14740773, 14742843, 14742933, 14743392, 14743593, 14743842,
14748093, 14757183, 14759223, 14762733, 14770458, 14771598, 14773518, 14776908, 14778171, 14780184, 14780673,
14781642, 14781738, 14782038, 14784771, 14788143, 14789088, 14790873, 14791668, 14793588, 14795238, 14795388,
14806728, 14809293, 14820291, 14821575, 14822592, 14822931, 14825184, 14826834, 14828907, 14829225, 14829357,
14829771, 14832684, 14838429, 14839725, 14840475, 14847684, 14881728, 14884725, 14929338, 14933793, 14972943,
14977863, 14979168, 14982684, 14997918, 14999793, 15078432, 15234285, 15237138, 15237342, 15342735, 15359325,
15364338, 15382341, 15387138, 15387342, 15393375, 15418932, 15431895, 15439782, 15461418, 15462843, 15462933,
15476433, 15502341, 15591348, 15613938, 15614373, 15684621, 15696348, 15714825, 15714978, 15728481, 15734616,
15761598, 15773445, 15796248, 15798075, 15798417, 15799842, 15802296, 15821478, 15829623, 15829842, 15836448,
15841395, 15843645, 15843957, 15848364, 15864498, 15897963, 15914352, 15935007, 15935082, 15935532, 15935736,
15935871, 15935895, 15937086, 15939102, 15939612, 15939762, 15943977, 15952371, 15952485, 15953871, 15957135,
15963339, 15963525, 15964362, 15981735, 15988209, 16024878, 16027371, 16027485, 16028871, 16036428, 16037325,
16037478, 16041378, 16048593, 16052373, 16053873, 16053888, 16063938, 16064373, 16093905, 16093917, 16098339,
16099839, 16208955, 16209285, 16213755, 16228758, 16237092, 16248705, 16256871, 16256892, 16257285, 16257375,
16273758, 16288758, 16339455, 16347855, 16352955, 16359819, 16364538, 16364703, 16366053, 16370835, 16371192,
16371405, 16371417, 16373571, 16373721, 16375071, 16375128, 16375731, 16375821, 16378071, 16379103, 16380375,
16382619, 16382694, 16383594, 16383744, 16384917, 16384959, 16384992, 16385463, 16390575, 16391007, 16406895,
16413711, 16433397, 16433715, 16433742, 16433769, 16435638, 16435875, 16435917, 16438206, 16438767, 16438815,
16441377, 16442382, 16452285, 16452375, 16453638, 16453875, 16478628, 16498725, 16593507, 16593711, 16595235,
16596339, 16602378, 16602735, 16603728, 16603878, 16609371, 16609392, 16609839, 16623705, 16637085, 16637142,
16637571, 16637628, 16638492, 16643397, 16643592, 16648725, 16666371, 16671378, 16687125, 16688721, 16689357,
16707735, 16734285, 16737138, 16737342, 16773849, 16773942, 16780689, 16784235, 16788849, 16837119, 16839462,
16871142, 16871319, 16891257, 16893582, 16913712, 17036478, 17075685, 17076891, 17077371, 17077485, 17078871,
17082735, 17089575, 17092986, 17097936, 17118975, 17122785, 17137428, 17137758, 17142735, 17143287, 17143782,
17229396, 17283849, 17283945, 17284635, 17284884, 17285325, 17307735, 17315985, 17329635, 17336442, 17337141,
17338491, 17339625, 17339781, 17341785, 17346384, 17350932, 17359335, 17373075, 17373417, 17374842, 17376228,
17384145, 17384625, 17393292, 17393295, 17394282, 17433735, 17438835, 17484285, 17487138, 17487342, 17618871,
17623878, 17638758, 17688849, 17693871, 17735319, 17735391, 17738499, 17739381, 17739417, 17748849, 17748942,
17807364, 17807739, 17808189, 17813694, 17815989, 17841735, 17842371, 17842485, 17843706, 17864103, 17864358,
17873421, 17876433, 17888499, 17893374, 17893716, 17913849, 17936445, 17943645, 17943957, 17948871, 17958849,
17958945, 17960235, 17962392, 17973849, 17973942, 17985921, 18091395, 18093645, 18093957, 18098364, 18139455,
18189054, 18190071, 18190128, 18190371, 18190539, 18200094, 18202599, 18203946, 18205419, 18205446, 18205539,
18209406, 18209931, 18210069, 18225099, 18225999, 18236454, 18242076, 18243906, 18244236, 18244635, 18250119,
18250194, 18251421, 18251484, 18251493, 18253569, 18255114, 18255714, 18256239, 18256854, 18257169, 18259422,
18259524, 18260274, 18260739, 18262824, 18263469, 18264171, 18264468, 18264834, 18264918, 18264984, 18264993,
18270549, 18273954, 18274854, 18280719, 18281424, 18288024, 18289422, 18289524, 18292119, 18294462, 18298584,
18299859, 18302379, 18303729, 18303879, 18314379, 18318954, 18320094, 18322599, 18325119, 18325194, 18326421,
18326484, 18326493, 18327354, 18329859, 18332619, 18332694, 18333594, 18333744, 18337494, 18338094, 18339471,
18339492, 18339744, 18352569, 18352959, 18365394, 18374994, 18376644, 18394245, 18394917, 18394959, 18394992,
18397119, 18397494, 18401478, 18404619, 18409509, 18410538, 18415644, 18419007, 18420069, 18420756, 18423585,
18425874, 18430992, 18440592, 18463569, 18478584, 18478809, 18491907, 18493092, 18497859, 18530925, 18553425,
18561438, 18584235, 18599334, 18599934, 18642621, 18643563, 18644262, 18644427, 18644613, 18644763, 18709131,
18721191, 18721416, 18724416, 18724941, 18728124, 18763479, 18802416, 18802491, 18809121, 18813744, 18814794,
18874263, 18881904, 18891063, 18904092, 18905913, 18906963, 18907971, 18910425, 18910623, 18910731, 18910821,
18913092, 18916071, 18917625, 18920766, 18924336, 18925125, 18925716, 18926142, 18926319, 18931479, 18933654,
18938115, 18945618, 18945663, 18971184, 18974334, 18974934, 18978204, 18979071, 19000932, 19006821, 19006842,

19009332, 19011825, 19019325, 19023642, 19023819, 19023975, 19024785, 19024875, 19038642, 19038819, 19041375, 19046184, 19059123, 19059321, 19059342, 19068492, 19069623, 19070796, 19079571, 19082046, 19094862, 19099362, 19102428, 19104228, 19105248, 19120917, 19125705, 19127358, 19141257, 19143582, 19160523, 19162092, 19163721, 19164357, 19166205, 19167075, 19167342, 19170525, 19170825, 19173075, 19173417, 19174842, 19207281, 19207638, 19208325, 19212288, 19212738, 19212888, 19221378, 19226478, 19228071, 19229103, 19230825, 19232625, 19234167, 19235913, 19243236, 19243371, 19243395, 19246143, 19248075, 19248417, 19249842, 19261437, 19263708, 19274103, 19296324, 19320756, 19324281, 19325019, 19325064, 19325142, 19325715, 19326288, 19326405, 19326417, 19326735, 19328721, 19329462, 19332519, 19332564, 19332642, 19333269, 19335525, 19337079, 19356228, 19357281, 19357638, 19358325, 19364427, 19370766, 19378125, 19379634, 19401825, 19417962, 19429857, 19442757, 19452975, 19461228, 19462293, 19463475, 19476228, 19478628, 19498725, 19554321, 19554342, 19573431, 19576143, 19604325, 19611438, 19614168, 19620693, 19623093, 19628418, 19629333, 19634142, 19634238, 19751433, 19761438, 19764333, 19764843, 19773534, 19780839, 19841355, 19842384, 19852284, 19859334, 19862319, 19871184, 19890825, 19891128, 19938771, 19938834, 19958934, 19978089, 19985934, 19989075, 19993884, 20009319, 20039091, 20059341, 20068419, 20093241, 20093274, 20093319, 20159391, 20234196, 20234691, 20243646, 20245941, 20296641, 20318979, 20329569, 20369841, 20393196, 20397819, 20397891, 20455041, 20457051, 20457306, 20457381, 20457921, 20457945, 20458335, 20458971, 20459046, 20459541, 20460138, 20460291, 20460942, 20461881, 20461917, 20463465, 20464167, 20464734, 20464743, 20465235, 20467326, 20470785, 20470896, 20473926, 20474376, 20475945, 20476458, 20476488, 20478585, 20480592, 20481906, 20482056, 20484156, 20485692, 20488092, 20495931, 20502966, 20504616, 20512296, 20518491, 20525466, 20545731, 20545821, 20546025, 20546412, 20546628, 20547435, 20547648, 20547921, 20547945, 20548092, 20548206, 20559345, 20577648, 20593461, 20598663, 20604783, 20609346, 20639829, 20643465, 20645484, 20645493, 20646423, 20648289, 20691462, 20691645, 20695296, 20696238, 20696283, 20696346, 20699871, 20699985, 20704551, 20714592, 20730456, 20736471, 20746191, 20746416, 20749641, 20750466, 20754666, 20761596, 20764683, 20769891, 20773971, 20774046, 20779671, 20782974, 20784147, 20784246, 20784564, 20784615, 20784741, 20790945, 20792046, 20795835, 20796192, 20796405, 20796417, 20818971, 20819046, 20819145, 20819871, 20819985, 20820546, 20821455, 20824641, 20825466, 20829585, 20829642, 20831985, 20833296, 20834865, 20841897, 20849865, 20854638, 20864829, 20895471, 20897046, 20904546, 20911986, 20912496, 20912595, 20914617, 20914731, 20916246, 20923146, 20928981, 20934561, 20941095, 20949786, 20952966, 20957616, 20961666, 20963814, 20979681, 20993661, 21022896, 21023796, 21027966, 21038796, 21078648, 21079785, 21079875, 21089796, 21093456, 21094095, 21094638, 21094785, 21094875, 21099366, 21141546, 21141987, 21159585, 21159642, 21164592, 21166455, 21166596, 21183546, 21185796, 21186471, 21189675, 21191457, 21191595, 21198642, 21198819, 21198975, 21199785, 21199875, 21228465, 21232965, 21233196, 21248196, 21278466, 21281958, 21289683, 21319869, 21345465, 21345696, 21371988, 21374487, 21375471, 21378471, 21379905, 21382446, 21383469, 21397092, 21397905, 21404592, 21409617, 21409731, 21409815, 21412455, 21413745, 21414582, 21414792, 21414795, 21414975, 21416457, 21416595, 21424638, 21432465, 21434565, 21437967, 21446838, 21448365, 21454734, 21454743, 21456423, 21457092, 21458205, 21459162, 21459357, 21460923, 21464232, 21466728, 21467325, 21467478, 21471888, 21472824, 21473241, 21473274, 21473319, 21473415, 21473925, 21474138, 21474375, 21474819, 21477921, 21477945, 21478242, 21478653, 21478905, 21478917, 21479142, 21479238, 21479487, 21480975, 21482742, 21483729, 21488229, 21492738, 21492888, 21493287, 21493782, 21497892, 21499788, 21536478, 21595296, 21602796, 21604578, 21605478, 21645525, 21645825, 21647781, 21664575, 21696228, 21707796, 21709776, 21728046, 21774396, 21778491, 21795981, 21798456, 21809796, 21825945, 21826458, 21826488, 21828492, 21828945, 21835296, 21839496, 21845541, 21883491, 21889563, 21895623, 21895842, 21897138, 21898266, 21904638, 21910998, 21916098, 21932595, 21932895, 21948825, 21962283, 21964338, 21984285, 21987138, 21987342, 22045785, 22045896, 22054785, 22054875, 22073646, 22077396, 22081896, 22089546, 22098666, 22099866, 22118646, 22136985, 22137546, 22137846, 22139592, 22146888, 22147785, 22189638, 22282899, 22294896, 22309146, 22309641, 22328991, 22341465, 22341696, 22346916, 22364829, 22396425, 22397829, 22414638, 22459416, 22464141, 22484196, 22484691, 22493646, 22495941, 22569648, 22645458, 22646598, 22647846, 22648296, 50122731, 50161371, 50182614, 50204616, 50230911, 50231091, 50311365, 50718411, 50721366, 51022731, 51137763, 51137913, 51139725, 51140475, 51141282, 51142731, 51145725, 51147771, 51179625, 51213675, 51227436, 51227481, 51227625, 51229125, 51247731, 51252291, 51262275, 51273141, 51276138, 51291138, 51318264, 51364032, 51373125, 51388125, 51621375, 51637116, 51661371, 51821241, 51825114, 51832614, 51841206, 51888114, 52046166, 52079616, 52122966, 52147731, 52285266, 52296681, 52296726, 52299066, 52310685, 52312365, 52314684, 52316046, 52321911, 52365231, 52366071, 52367625, 52373115, 52376175, 52376625, 52411836, 52413192, 52418211, 52419132, 52428216, 52435686, 52435866, 52436661, 52452366, 52453866, 52461684, 52468431, 52479681, 52493661, 52511592, 52520466, 52615917, 52616592, 52618206, 52624182, 52626819, 52636608, 52663716, 52671375, 52684206, 52693206, 52704666, 52707966, 52967316, 53113665, 53116365, 53172966, 53182014, 53217291, 53217741, 53218206, 53221365, 53426367, 53427615, 53429115, 53522766, 53591175, 53636763, 53637663, 53648175, 53660913, 53676138, 53766138, 53834115, 53865231, 53866071, 53867625, 53873115, 53876175, 53876625, 53888115, 53977716, 54091167, 54091617, 54115917, 54116592, 54118206, 54124182, 54126819, 54159117, 54161592, 54182064, 54182115, 54182241, 54213675, 54228216, 54243186, 54243366, 54284115, 54295716, 54296625, 54319617, 54319731, 54461682, 54481365, 54522966, 54570231, 54571125, 54571407, 54572625, 54611412, 54616407, 54616725, 54632184, 54640707, 54666225, 54682134, 54713907, 54733614, 54741123, 54741342, 54743625, 54761412, 54809112, 54911232, 54931137, 55182114, 55932117, 55932231, 55934127, 56093412, 56139162, 56143662, 56161437, 56213673, 56320689, 56411412, 56614347, 56614473, 57045726, 57047541, 57047931, 57070476, 57070791, 57071475, 57071826, 57077436, 57077481, 57077625, 57079125, 57082731, 57102276, 57112296, 57116475, 57116796, 57117819, 57117891, 57123675, 57137763, 57137913, 57139725, 57140475, 57141282, 57142731, 57145725, 57147771, 57162825, 57179781, 57182076, 57182541, 57182814, 57184281, 57191325, 57213975, 57252966, 57254616, 57262296, 57268491, 57276231, 57291231, 57296181, 57513663, 57518214, 57591162, 57636663, 57661392, 57663189, 57683214, 57684231, 57731025, 57741321, 57741345, 57749814, 57761412, 57911412, 57975231, 57977634, 57979134, 57979314, 57986175, 58141275, 58207731,

58211796, 58263663, 58268214, 58274814, 58327314, 58364025, 58663479, 58981275, 59047731, 59102532, 59110023, 59123142, 59123211, 59124618, 59125032, 59125332, 59126178, 59127633, 59129133, 59131392, 59132085, 59132142, 59132436, 59132481, 59133231, 59133321, 59133525, 59134617, 59134731, 59134815, 59162532, 59163231, 59163321, 59166321, 59166345, 59320041, 59320701, 59320836, 59320881, 59321781, 59322306, 59322381, 59324361, 59324811, 59325117, 59326167, 59332086, 59332311, 59332617, 59333211, 59333814, 59336025, 59341002, 59341602, 59343147, 59360913, 59388117, 59413137, 59413332, 59416332, 59416632, 59481384, 59523141, 59526138, 59541138, 59616123, 59616342, 59634117, 59786163, 59816025, 59816142, 59816319, 59816625, 59821116, 59822616, 59981625, 60012273, 60022842, 60040932, 60068412, 60093207, 60102273, 60114273, 60122748, 60124773, 60163932, 60214773, 60227301, 60228231, 60228321, 60230475, 60230775, 60232731, 60247821, 60250932, 60256821, 60256842, 60259332, 60261825, 60269325, 60273141, 60276138, 60291138, 60320475, 60321825, 60322731, 60341775, 60411825, 60638448, 60713748, 60728436, 60731391, 60821373, 60821388, 60843867, 60863913, 60864123, 60881844, 60910023, 60912321, 60912498, 60916248, 60916623, 60932085, 60932142, 60932436, 60932481, 60933231, 60933321, 60933525, 60934167, 60935913, 60941232, 61047843, 61047933, 61141473, 61142898, 61145748, 61145823, 61159623, 61159821, 61159998, 61164825, 61164978, 61165998, 61166478, 61166598, 61182648, 61184145, 61184625, 61206846, 61213698, 61228998, 61229148, 61229583, 61232046, 61247898, 61247958, 61295898, 61299888, 61329819, 61365003, 61373019, 61375038, 61375392, 61380189, 61387653, 61388019, 61390746, 61391667, 61392336, 61392921, 61392945, 61393047, 61393095, 61393767, 61393815, 61397334, 61397418, 61397484, 61397493, 61399293, 61401888, 61407987, 61409352, 61412487, 61412883, 61413369, 61416237, 61423821, 61423845, 61428525, 61436667, 61437315, 61438215, 61445868, 61447368, 61458912, 61459362, 61473339, 61474839, 61487025, 61513848, 61538871, 61570485, 61576398, 61593507, 61593711, 61595235, 61596339, 61602378, 61602735, 61603728, 61603878, 61609371, 61609392, 61609839, 61623705, 61637085, 61637142, 61637571, 61637628, 61638492, 61643397, 61643592, 61648725, 61666371, 61671378, 61687125, 61688721, 61689357, 61707735, 61734285, 61737138, 61737342, 61773849, 61773942, 61780689, 61784235, 61788849, 61821285, 61833714, 61841736, 61842486, 61848615, 61851432, 61852281, 61859121, 61862046, 61871166, 61882614, 61912137, 62068731, 62073666, 62074866, 62082366, 62083185, 62086641, 62091186, 62093661, 62109366, 62116875, 62118666, 62136642, 62136738, 62136912, 62141367, 62147868, 62163975, 62178189, 62178891, 62179785, 62179875, 62184285, 62213685, 62236641, 62286603, 62287623, 62288445, 62301375, 62302365, 62303865, 62314365, 62333364, 62342367, 62364162, 62366205, 62367075, 62367342, 62371821, 62371842, 62376273, 62378412, 62382069, 62384457, 62387763, 62387913, 62389725, 62390475, 62391282, 62392731, 62395725, 62397771, 62413821, 62413845, 62433897, 62438364, 62438667, 62461839, 62478525, 62481369, 62483364, 62486412, 62493867, 62498364, 62501373, 62501388, 62502285, 62502375, 62503638, 62503875, 62513748, 62523642, 62523819, 62523975, 62524785, 62524875, 62538642, 62538819, 62541375, 62568525, 62570685, 62616378, 62622873, 62623773, 62627373, 62628873, 62628888, 62637321, 62637498, 62638653, 62639793, 62663871, 62684235, 62689125, 62704785, 62704875, 62733981, 62736603, 62737623, 62738445, 62739618, 62762388, 62786148, 62822391, 62841237, 62843397, 62843592, 62859123, 62859321, 62859342, 62861598, 62864133, 62886603, 62887623, 62888445, 62888763, 62912388, 62921373, 62921388, 62988771, 62988834, 62998884, 63013875, 63018864, 63038865, 63093867, 63139365, 63188754, 63189231, 63205935, 63214365, 63218916, 63240936, 63249864, 63261864, 63269364, 63274989, 63295839, 63318594, 63318714, 63321369, 63321891, 63324864, 63327489, 63329589, 63332364, 63332739, 63333189, 63336414, 63336594, 63338799, 63338979, 63339789, 63356889, 63359139, 63359364, 63364119, 63364164, 63364299, 63366594, 63374364, 63378414, 63387999, 63389925, 63389979, 63397914, 63397959, 63399789, 63410487, 63411897, 63416397, 63429897, 63445875, 63447285, 63447375, 63458364, 63474864, 63478671, 63486774, 63488679, 63491367, 63496839, 63514773, 63524796, 63539775, 63547842, 63591048, 63638004, 63640392, 63663804, 63690231, 63691221, 63719163, 63728454, 63741153, 63741663, 63742623, 63743571, 63743814, 63744162, 63744525, 63744618, 63748119, 63749025, 63749163, 63749412, 63749913, 63751413, 63752442, 63753429, 63762948, 63762984, 63762993, 63764163, 63767844, 63798084, 63799071, 63799809, 63800241, 63809412, 63814119, 63814164, 63814299, 63818904, 63819039, 63834459, 63844245, 63844917, 63844959, 63844992, 63874263, 63881904, 63891063, 63904092, 63905913, 63906963, 63907971, 63910425, 63910623, 63910731, 63910821, 63913092, 63916071, 63917625, 63920766, 63924336, 63925125, 63925716, 63926142, 63926319, 63931479, 63933654, 63938115, 63945618, 63945663, 63971184, 63974334, 63974934, 63978204, 63979071, 64000932, 64006821, 64006842, 64009332, 64011825, 64019325, 64023642, 64023819, 64023975, 64024785, 64024875, 64038642, 64038819, 64041375, 64046184, 64059123, 64059321, 64059342, 64068492, 64069623, 64070796, 64079571, 64082046, 64094127, 64095231, 64101273, 64102638, 64102731, 64104618, 64109412, 64112898, 64114167, 64114734, 64114743, 64115235, 64120692, 64121796, 64121835, 64122921, 64122945, 64123092, 64123206, 64125138, 64125912, 64127046, 64127331, 64128417, 64131369, 64132416, 64132491, 64132749, 64132959, 64133241, 64133274, 64133319, 64133979, 64134147, 64134246, 64134564, 64134615, 64134741, 64161405, 64161417, 64162638, 64162842, 64163241, 64163274, 64163319, 64163814, 64166025, 64166142, 64166319, 64166625, 64173141, 64191207, 64207731, 64211796, 64228314, 64231416, 64232616, 64248141, 64261392, 64263189, 64274436, 64284231, 64295814, 64296171, 64296621, 64313799, 64313979, 64314789, 64321881, 64321917, 64326165, 64332192, 64333215, 64336539, 64337664, 64341564, 64344567, 64344657, 64346115, 64347615, 64356912, 64365231, 64366071, 64367625, 64373115, 64376175, 64376625, 64411857, 64416822, 64418322, 64421775, 64429662, 64433679, 64456623, 64456863, 64457316, 64471368, 64486725, 64524366, 64571184, 64611423, 64618209, 64684407, 64711839, 64730934, 64731594, 64741143, 64743339, 64749339, 64761423, 64776234, 64776243, 64776408, 64781619, 64781664, 64781799, 64782039, 64782084, 64783209, 64789071, 64789134, 64789314, 64791234, 64791243, 64793571, 64793814, 64794162, 64794525, 64794618, 64822641, 64912293, 64913475, 64929321, 64929342, 64929618, 64978164, 64978209, 64979412, 65002341, 65023416, 65024841, 65204841, 65364321, 65364342, 65393364, 65463414, 65643414, 65846139, 65946321, 65946345, 65961621, 65962314, 65963139, 65963214, 65981025, 65991321, 65991345, 65999814, 66026478, 66029571, 66046248, 66048075, 66048417, 66049842, 66063948, 66070485, 66076398, 66093492, 66094623, 66098214, 66099123, 66140598, 66141462, 66141645, 66143745, 66144588, 66144678, 66144738, 66144987, 66148269, 66149178, 66149928, 66159621, 66204585, 66204642, 66206985, 66208296, 66209616, 66211596, 66214095, 66214788, 66228492,

66228945, 66234147, 66234246, 66234564, 66234615, 66234741, 66241098, 66243645, 66243957, 66251478, 66254625, 66257046, 66264825, 66264978, 66273963, 66284145, 66284625, 66289842, 66320991, 66329619, 66349095, 66349569, 66397125, 66404625, 66411462, 66416145, 66432147, 66457125, 66461412, 66464322, 66477621, 66479121, 66479634, 66491325, 66497814, 66599814, 66604623, 66604842, 66614145, 66614487, 66614928, 66620796, 66626478, 66641145, 66647814, 66659814, 66662046, 66704781, 66712296, 66728481, 66734616, 66784614, 67049781, 67079781, 67124796, 67129785, 67129875, 67146273, 67184781, 67284486, 67284936, 67284981, 67302966, 67304625, 67321146, 67341246, 67344786, 67346166, 67432986, 67434786, 67464321, 67464342, 67473441, 67478481, 67484616, 67637148, 67639842, 67739481, 67743981, 67844625, 67849125, 67946148, 67962648, 67963299, 67978149, 68147799, 68190042, 68190045, 68200419, 68200446, 68208519, 68210019, 68210064, 68210142, 68210256, 68215071, 68215128, 68215371, 68215539, 68220396, 68231019, 68241201, 68242536, 68251854, 68254215, 68254467, 68265123, 68269539, 68271549, 68289012, 68295024, 68302515, 68303679, 68321019, 68326854, 68330265, 68333754, 68335269, 68337504, 68338014, 68340492, 68350242, 68351412, 68352519, 68352564, 68352642, 68354289, 68359539, 68360289, 68360484, 68360493, 68366454, 68371539, 68374539, 68375004, 68378454, 68380014, 68390397, 68395164, 68399754, 68400246, 68401473, 68403897, 68404917, 68404959, 68404992, 68406048, 68412006, 68416902, 68417019, 68419002, 68420019, 68420064, 68420142, 68420397, 68423517, 68426037, 68430147, 68435562, 68441052, 68448567, 68454105, 68459064, 68461089, 68461119, 68461215, 68461242, 68461269, 68461521, 68462715, 68470416, 68474181, 68474226, 68474931, 68476215, 68476242, 68476269, 68491815, 68493567, 68499315, 68507175, 68513229, 68516205, 68517075, 68517342, 68520471, 68522046, 68525625, 68528115, 68539725, 68540475, 68541675, 68542638, 68542971, 68544792, 68544795, 68544975, 68545863, 68546268, 68547513, 68562321, 68562498, 68564163, 68570835, 68571192, 68571405, 68571417, 68573064, 68573814, 68574936, 68574981, 68578224, 68582085, 68582142, 68582436, 68582481, 68583231, 68583321, 68583525, 68587413, 68593563, 68594262, 68594427, 68594613, 68594763, 68602329, 68603229, 68603925, 68607435, 68607984, 68607993, 68609484, 68609493, 68621988, 68624487, 68625471, 68628471, 68629905, 68632446, 68633469, 68640315, 68640417, 68652621, 68654121, 68667621, 68671329, 68672076, 68675121, 68675814, 68678124, 68707176, 68710266, 68715231, 68716329, 68717541, 68731071, 68731215, 68731242, 68731269, 68744127, 68745231, 68751621, 68753115, 68762763, 68762913, 68764032, 68766621, 68776263, 68781171, 68791263, 68802615, 68804115, 68811735, 68812185, 68812689, 68813754, 68814231, 68824131, 68826624, 68826714, 68831289, 68835714, 68836299, 68836404, 68844711, 68873154, 68881539, 68882154, 68888154, 68910162, 68910267, 68911542, 68911545, 68912016, 68912517, 68912667, 68916267, 68916315, 68917617, 68925117, 68926167, 68971863, 68981679, 68981769, 68998179, 69001821, 69001842, 69004182, 69018231, 69018321, 69018417, 69023667, 69024867, 69038667, 69041367, 69046863, 69066048, 69079815, 69094527, 69095262, 69095322, 69095412, 69102762, 69102822, 69102912, 69119862, 69120138, 69120246, 69121788, 69123927, 69124377, 69124734, 69124743, 69127095, 69130137, 69132105, 69132417, 69132459, 69132492, 69133242, 69134742, 69139062, 69140382, 69141027, 69141252, 69141627, 69163242, 69164127, 69166347, 69166662, 69173142, 69173211, 69174618, 69178224, 69185712, 69201273, 69207762, 69207822, 69207912, 69211788, 69213927, 69225246, 69226473, 69231237, 69231405, 69231417, 69231645, 69232086, 69232311, 69232617, 69233211, 69233814, 69237312, 69238221, 69241338, 69246123, 69246168, 69247623, 69248142, 69248211, 69249618, 69276324, 69282249, 69283224, 69286713, 69287163, 69291324, 69292071, 69304572, 69310473, 69310482, 69328902, 69356178, 69357762, 69357822, 69357912, 69359427, 69378117, 69397662, 69409527, 69410277, 69417762, 69417822, 69417912, 69420777, 69425382, 69427512, 69428322, 69429162, 69435777, 69441777, 69442752, 69454275, 69461178, 69461793, 69473226, 69475032, 69475332, 69476178, 69479352, 69502284, 69525138, 69525912, 69527046, 69527436, 69527481, 69527625, 69529125, 69552618, 69554118, 69566253, 69570321, 69573135, 69575118, 69576168, 69581628, 69582618, 69583623, 69586248, 69589032, 69593613, 69600432, 69603225, 69609363, 69612321, 69612498, 69616668, 69628218, 69632193, 69636198, 69639312, 69657123, 69668025, 69679863, 69712368, 69750123, 69750342, 69751023, 69751248, 69752148, 69752331, 69753417, 69760248, 69762321, 69762498, 69764133, 69771498, 69785271, 69793512, 69793542, 69793545, 69794352, 69801384, 69816735, 69817371, 69817485, 69824136, 69837714, 69839064, 69840639, 69843567, 69852684, 69856623, 69861642, 69861738, 69861912, 69867363, 69870231, 69871863, 69874362, 69877071, 69882039, 69882084, 69883209, 69913392, 69928623, 69931392, 69936237, 69981735, 69988209, 70015935, 70016391, 70018419, 70041819, 70043196, 70093215, 70118289, 70136913, 70141821, 70141842, 70146843, 70161891, 70163916, 70164366, 70165935, 70166391, 70179891, 70184169, 70193289, 70230465, 70236981, 70250466, 70254666, 70261596, 70264683, 70269891, 70319571, 70320465, 70320696, 70386981, 70389675, 70396821, 70396842, 70398675, 70411596, 70460184, 70461192, 70464315, 70465731, 70465821, 70466784, 70467834, 70467942, 70476192, 70476468, 70476921, 70476942, 70483566, 70509117, 70511796, 70515936, 70519125, 70546863, 70566048, 70578663, 70611846, 70616871, 70616892, 70618731, 70634685, 70641192, 70641912, 70653189, 70653891, 70660488, 70660548, 70661985, 70662546, 70662846, 70663971, 70664046, 70664571, 70668492, 70669623, 70673046, 70678299, 70678446, 70678464, 70683519, 70685835, 70686531, 70687176, 70688064, 70691667, 70692336, 70692921, 70692945, 70693047, 70693095, 70694292, 70694295, 70695291, 70698771, 70698834, 70699386, 70699884, 70703196, 70705191, 70706646, 70715796, 70715976, 70725966, 70728516, 70736541, 70737516, 70737666, 70739766, 70741836, 70748766, 70779216, 70781922, 70786608, 70796571, 70796784, 70818585, 70819167, 70819884, 70823766, 70831881, 70831917, 70833192, 70835685, 70839675, 70843656, 70851819, 70857366, 70858185, 70861596, 70865319, 70865391, 70876641, 70896675, 70912692, 70919127, 70921776, 70926186, 70926936, 70932156, 70937661, 70958616, 70961166, 70975116, 70976166, 71001819, 71014182, 71016375, 71018241, 71018274, 71018319, 71031975, 71051841, 71068731, 71073666, 71074866, 71082366, 71083185, 71086641, 71091192, 71091912, 71093766, 71114688, 71116455, 71116596, 71118456, 71119095, 71119638, 71119785, 71119875, 71123196, 71154693, 71165796, 71168355, 71184156, 71185692, 71186541, 71187516, 71187666, 71191155, 71191857, 71192967, 71266875, 71281968, 71319165, 71319693, 71331915, 71365392, 71368563, 71369262, 71369427, 71369613, 71369763, 71376642, 71376738, 71376984, 71376993, 71381415, 71384679, 71384715, 71406987, 71413767, 71413815, 71416155, 71416857, 71417967, 71418582, 71429667, 71456673, 71456748, 71467293, 71467734, 71467743, 71476824, 71477658, 71478165, 71478768, 71500932, 71506821, 71506842, 71509332, 71511825, 71519325, 71523642, 71523819, 71523975, 71524785, 71524875,

71538642, 71538819, 71541375, 71546184, 71559123, 71559321, 71559342, 71568492, 71569623, 71570796, 71579571, 71582046, 71594292, 71594295, 71595291, 71595726, 71597541, 71600475, 71602791, 71607873, 71614755, 71618256, 71625975, 71638329, 71641791, 71642916, 71642961, 71647284, 71647638, 71663829, 71664291, 71666475, 71666796, 71667819, 71667891, 71668269, 71668575, 71672835, 71673291, 71675685, 71676891, 71678241, 71678274, 71678319, 71678916, 71679141, 71679585, 71679642, 71682519, 71682564, 71682642, 71683269, 71685825, 71689725, 71690475, 71692962, 71698725, 71707791, 71709276, 71727831, 71728335, 71728476, 71732691, 71732916, 71732976, 71733291, 71747835, 71748291, 71750685, 71751891, 71756391, 71757366, 71758185, 71763738, 71763783, 71763846, 71768916, 71773926, 71774376, 71775921, 71782416, 71782491, 71782749, 71782959, 71783241, 71783274, 71783319, 71783979, 71789166, 71789784, 71790942, 71791416, 71791641, 71793456, 71794095, 71794638, 71794785, 71794875, 71795835, 71796192, 71796405, 71796417, 71820396, 71820501, 71823516, 71824806, 71824881, 71826192, 71826468, 71826921, 71826942, 71828571, 71828763, 71829171, 71832051, 71832306, 71832381, 71832921, 71832945, 71833335, 71833971, 71834046, 71835138, 71835291, 71835942, 71837442, 71845635, 71857842, 71864613, 71864763, 71874336, 71881416, 71888016, 71895618, 71895663, 71909532, 71909817, 71910282, 71910873, 71917842, 71918262, 71919327, 71920782, 71926383, 71927331, 71928417, 71930457, 71932476, 71932692, 71932815, 71932917, 71933292, 71933295, 71933829, 71935782, 71938266, 71941782, 71941827, 71942832, 71963193, 71983881, 71983911, 71988417, 71993385, 71998842, 72064185, 72066396, 72068751, 72069285, 72069885, 72081876, 72083691, 72086916, 72091686, 72109185, 72136881, 72136917, 72138465, 72168975, 72182376, 72183285, 72183396, 72236916, 72248691, 72284151, 72291921, 72291942, 72294195, 72309192, 72319476, 72329466, 72365319, 72365391, 72376641, 72392691, 72416835, 72418335, 72433965, 72436911, 72437691, 72464184, 72491835, 72500466, 72504666, 72511596, 72514683, 72519891, 72540966, 72546666, 72546831, 72591195, 72595716, 72596625, 72604683, 72614688, 72616455, 72616596, 72618456, 72619095, 72619638, 72619785, 72619875, 72623196, 72645468, 72646638, 72646833, 72648192, 72664785, 72664875, 72682899, 72690945, 72692046, 72693456, 72694095, 72694638, 72694785, 72694875, 72698916, 72699891, 72761535, 72766035, 72818604, 72836604, 72851175, 72851625, 72852516, 72852666, 72861981, 72866013, 72880116, 72896634, 72896814, 72911535, 72960216, 72965814, 72966021, 72966681, 72966726, 72967041, 72967251, 72967635, 72968064, 72990666, 72999066, 73013766, 73046115, 73047615, 73059117, 73064115, 73077615, 73079115, 73096116, 73097616, 73101819, 73107366, 73108185, 73111596, 73124865, 73137669, 73140696, 73145664, 73146834, 73153641, 73157964, 73157991, 73159461, 73160946, 73160964, 73164564, 73164615, 73164741, 73166046, 73169625, 73174641, 73178991, 73192311, 73196181, 73199136, 73219161, 73226466, 73312866, 73321911, 73364016, 73411656, 73569117, 73641267, 73641315, 73642617, 73648179, 73652436, 73652481, 73652625, 73654125, 73660425, 73660623, 73660731, 73660821, 73663092, 73666071, 73667625, 73670766, 73674336, 73675125, 73675716, 73676142, 73676319, 73681479, 73719816, 73748115, 73751175, 73751625, 73761525, 73761675, 73766025, 73766142, 73766319, 73766625, 73782216, 73796634, 73796814, 73809117, 73814115, 73822191, 73892661, 73897266, 73904766, 73957266, 73961175, 73976175, 73976625, 73977681, 74101821, 74101842, 74118201, 74118336, 74118381, 74126835, 74131881, 74131917, 74133192, 74147316, 74161836, 74163192, 74168211, 74169132, 74178216, 74182086, 74182311, 74182617, 74183211, 74183814, 74184102, 74191332, 74191632, 74201841, 74263185, 74282166, 74283216, 74289816, 74358186, 74358366, 74358666, 74360685, 74361546, 74363196, 74366661, 74413365, 74523666, 74524866, 74538666, 74541366, 74549316, 74569134, 74569314, 74591181, 74611641, 74616684, 74616834, 74638164, 74642316, 74662284, 74684181, 74684226, 74691123, 74691342, 74693226, 74761641, 74785266, 74796681, 74796726, 74799066, 74810685, 74812365, 74814684, 74816046, 74821911, 74865231, 74866071, 74867625, 74873115, 74876175, 74876625, 74911836, 74913192, 74918211, 74919132, 74928216, 74935686, 74935866, 74936661, 74952366, 74953866, 74961684, 74968431, 74979681, 74993661, 75118215, 75163671, 75170685, 75181854, 75182169, 75184215, 75193215, 75218466, 75246684, 75431967, 75446682, 75467316, 75696618, 76168242, 76169232, 76173192, 76178415, 76182192, 76183215, 76191822, 76268415, 76418217, 76468218, 76568445, 76569345, 76618374, 76618716, 76631874, 76636671, 76663671, 76670685, 76707366, 76708185, 76711866, 76730685, 76731936, 76819539, 76821669, 76821921, 76821942, 76831854, 76832169, 76841715, 76841922, 76842192, 76911705, 76918224, 76918422, 76919322, 76921821, 76921842, 76923216, 76932192, 76933215, 76941822, 76966143, 77096616, 77161596, 77184195, 77184666, 77300115, 77307192, 77308215, 77310468, 77314215, 77315799, 77316474, 77316492, 77317899, 77318604, 77336604, 77366721, 77391267, 77391315, 77392617, 77398179, 77401821, 77401842, 77402367, 77403867, 77412468, 77413467, 77414817, 77436195, 77436711, 77437617, 77458164, 77466234, 77466243, 77469363, 77480115, 77480715, 77486721, 77511705, 77592162, 77616705, 77617092, 77619207, 77619357, 77626824, 77672391, 77683524, 77694207, 77694357, 77704671, 77706945, 77715945, 77717046, 77920716, 77921625, 78185724, 78192072, 78193572, 78206922, 78216774, 78217749, 78217974, 78219207, 78219357, 78321774, 78411537, 78417315, 78418572, 78424815, 78432015, 78445662, 78571821, 78571842, 78629673, 78653412, 78660708, 78670623, 78670842, 78672138, 78732216, 78743217, 78761523, 78766023, 78866721, 78901182, 78901932, 78981774, 79023867, 79116705, 79117092, 79119207, 79119357, 79126824, 79136721, 79161705, 79168224, 79168422, 79169322, 79171821, 79171842, 79173216, 79182249, 79183224, 79184172, 79193322, 79206912, 79209117, 79218231, 79218321, 79218417, 79220685, 79224366, 79232166, 79233216, 79248216, 79321647, 79321746, 79332195, 79342467, 79466232, 79473216, 79486707, 79548159, 79549317, 79571571, 79571784, 79581789, 79588164, 79602684, 79606623, 79611642, 79611738, 79611912, 79615368, 79616571, 79623165, 79640673, 79642317, 79650432, 79657071, 79657314, 79662918, 79666293, 79667025, 79673226, 79678164, 79678209, 79679412, 79686153, 79698618, 79711185, 79717839, 79717935, 79726185, 79726935, 79730664, 79731669, 79738164, 79741863, 79743681, 79748169, 79761642, 79761738, 79761912, 79769412, 79781715, 79785618, 79785663, 79788171, 79806774, 79809315, 79815741, 79815774, 79815819, 79816605, 79818609, 79821066, 79833615, 79836609, 79865721, 79876725, 79877175, 79881774, 79888179, 79890675, 79908675, 79910868, 79911588, 79913817, 79918362, 79931595, 79936155, 79961184, 79967934, 79976184, 79976934, 79981569, 79981605, 79983615, 80013675, 80136525, 80136675, 80177364, 80178864, 80266365, 80677299, 80697525, 80719275, 80867979, 80911788, 80928663, 80929815, 80933679, 81093675, 81163788, 81172785, 81177369, 81178869, 81183789, 81185475, 81187731, 81188679, 81286638, 81286821, 81286842, 81318789, 81365289, 81366429, 81367329, 81386529, 81411975, 81413679, 81423675, 81426864, 81527364,

81528864, 81572964, 81572991, 81577299, 81579789, 81604788, 81619575, 81637992, 81639729, 81647289, 81647769,
81649275, 81667296, 81674796, 81696273, 81729585, 81729642, 81749796, 81773799, 81779664, 81788799, 81788979,
81789789, 81795492, 81799095, 81799569, 81821019, 81826854, 81830265, 81833754, 81835269, 81837504, 81838014,
81840492, 81841902, 81842019, 81844065, 81847041, 81847431, 81849315, 81854175, 81854613, 81854763, 81856248,
81856413, 81857085, 81857142, 81857436, 81857481, 81858231, 81858321, 81858525, 81861963, 81864042, 81864045,
81865314, 81867621, 81876621, 81881025, 81891267, 81891315, 81892617, 81898179, 81901821, 81901842, 81902367,
81903867, 81913242, 81914127, 81916347, 81916662, 81923142, 81923211, 81924618, 81928224, 81942762, 81942822,
81942912, 81944277, 81947532, 81952638, 81952731, 81957618, 81958623, 81961248, 81961668, 81961863, 81968025,
81975123, 81975342, 81976023, 81976248, 81977148, 81981735, 81988209, 82015935, 82016391, 82018419, 82025466,
82046571, 82046784, 82068585, 82069167, 82069884, 82073766, 82081881, 82081917, 82083192, 82085685, 82089675,
82096116, 82097616, 82101819, 82107366, 82108185, 82111596, 82118766, 82131915, 82136538, 82141155, 82141857,
82142967, 82145673, 82150932, 82152285, 82152375, 82153638, 82153875, 82157046, 82163829, 82164291, 82166475,
82166796, 82167819, 82167891, 82168269, 82168575, 82172835, 82173291, 82175685, 82176891, 82178241, 82178274,
82178319, 82178916, 82179141, 82179585, 82179642, 82182051, 82182306, 82182381, 82182921, 82182945, 82183335,
82183971, 82184046, 82188141, 82192842, 82193292, 82193295, 82194282, 82198842, 82206876, 82208691, 82209186,
82213692, 82218285, 82218396, 82223691, 82241835, 82250466, 82254666, 82261596, 82264683, 82269891, 82285266,
82296681, 82296726, 82299066, 82310685, 82312365, 82314684, 82316046, 82321911, 82365231, 82366071, 82367625,
82373115, 82376175, 82376625, 82411836, 82413192, 82418211, 82419132, 82428216, 82435686, 82435866, 82436661,
82452366, 82453866, 82461684, 82468431, 82479681, 82493661, 82618215, 82663671, 82670685, 82681854, 82682169,
82684215, 82693215, 82718466, 82730115, 82730715, 82736721, 82761705, 82821774, 82842315, 82886721, 82911705,
82918224, 82918422, 82919322, 82921821, 82921842, 82923216, 82932195, 82966293, 82967025, 82973169, 82981569,
82981605, 82983615, 83013675, 83167296, 83174796, 83183754, 83185425, 83185623, 83185731, 83185821, 83191347,
83191662, 83196123, 83196168, 83197623, 83206185, 83206881, 83206917, 83208192, 83210685, 83216475, 83216796,
83217819, 83217891, 83218335, 83225466, 83229681, 83243661, 83296863, 83317296, 83318571, 83318814, 83319162,
83319525, 83319618, 83320692, 83321796, 83321835, 83331912, 83342367, 83415639, 83417367, 83423667, 83424867,
83428671, 83433765, 83435865, 83436564, 83452365, 83453865, 83468625, 83523675, 83526819, 83538675, 83568525,
83570685, 83593215, 83652435, 83654934, 83671425, 83674335, 83688114, 83743215, 83811864, 83844675, 83897175,
83904675, 83912967, 83956173, 83957175, 83968221, 83971821, 83971842, 83977671, 84046821, 84046842, 84049182,
84095367, 84102867, 84117855, 84118605, 84126855, 84139065, 84146862, 84165639, 84167367, 84173667, 84174867,
84178671, 84186402, 84201864, 84207867, 84236667, 84237315, 84238215, 84248667, 84249867, 84283674, 84286671,
84292185, 84333765, 84336519, 84337515, 84354567, 84354657, 84356595, 84358365, 84360915, 84364065, 84366105,
84386517, 84413652, 84468384, 84513684, 84524865, 84536592, 84541365, 84570366, 84618615, 84672936, 84686142,
84686319, 84702366, 84703866, 84763671, 84786165, 84817365, 85024182, 85136523, 85141182, 85182069, 85184274,
85228215, 85236525, 85236675, 85248675, 85251819, 85264182, 85266375, 85268241, 85268274, 85268319, 85386525,
85386675, 85413675, 85456623, 85456863, 85457316, 85471368, 85481592, 85482066, 85616373, 85616388, 85659345,
85661598, 85686621, 85687314, 85688139, 85688214, 85689117, 85707366, 85708185, 85711866, 85736625, 85818525,
85820685, 85868214, 85911642, 85911738, 85911912, 85914117, 85923663, 85932192, 85933215, 85941822, 86046843,
86048184, 86093415, 86141847, 86141973, 86154819, 86159487, 86159571, 86164095, 86164788, 86172846, 86173296,
86182464, 86182992, 86183799, 86184147, 86184246, 86184564, 86184615, 86184741, 86198364, 86263698, 86318469,
86318799, 86380164, 86392671, 86399268, 86401638, 86410173, 86411538, 86415231, 86421525, 86423016, 86448165,
86503425, 86518344, 86524935, 86532069, 86534289, 86534475, 86536413, 86539125, 86549334, 86549934, 86561844,
86579913, 86593563, 86594262, 86594427, 86594613, 86594763, 86602329, 86603229, 86603925, 86607435, 86607984,
86607993, 86609484, 86609493, 86638119, 86641071, 86642625, 86647434, 86671425, 86674335, 86682054, 86711829,
86711925, 86714175, 86743335, 86749335, 86762319, 86774421, 86774442, 86783424, 86789934, 86799108, 86807979,
86824131, 86826624, 86826714, 86831289, 86835714, 86836299, 86836404, 86912175, 86921175, 86923125, 86983614,
86991123, 86991342, 86993625, 87161829, 87161925, 87168429, 87294663, 87311415, 87316479, 87322191, 87411198,
87412968, 87418221, 87429663, 87432192, 87433215, 87441822, 87493215, 87616425, 87618429, 87640698, 87659412,
87662319, 87664125, 87678414, 87693429, 87699339, 87934716, 87948216, 87958164, 87966234, 87966243, 87969363,
87991158, 88016364, 88093215, 88113915, 88116369, 88163799, 88163979, 88164789, 88179549, 88186404, 88192413,
88192524, 88219329, 88219425, 88244115, 88344684, 88411971, 88411992, 88419912, 88426989, 88446675, 88449684,
88456164, 88466229, 88664721, 88669713, 88744815, 88767648, 88769913, 88906995, 88971675, 89027466, 89031957,
89039682, 89046675, 89115246, 89115471, 89124675, 89126595, 89129667, 89131971, 89131992, 89162967, 89199132,
89252466, 89261595, 89299716, 89561673, 89561748, 89571675, 89573115, 89582175, 89663229, 89672763, 89672913,
89676273, 89677413, 89683221, 89684262, 89693427, 89706912, 89709117, 89718231, 89718321, 89718417, 89720685,
89724366, 89743215, 89775171, 89776671, 89781165, 89782179, 89782215, 89786763, 89787663, 89794815, 89796771,
89797671, 89811975, 89826615, 89918427, 89926821, 89926842, 89933679, 89977671, 90138198, 90182046, 90184095,
90236595, 90245685, 90386595, 90389682, 90456912, 90459117, 90468231, 90468321, 90468417, 90470685, 90474366,
90491682, 90491832, 90493365, 90495684, 90499182, 90729966, 90796845, 90797967, 90935427, 90941202, 90945252,
90952071, 90952512, 90953322, 90954162, 91004232, 91027095, 91027512, 91028322, 91029162, 91038927, 91042923,
91048362, 91095423, 91102923, 91105023, 91154703, 91155423, 91173588, 91174758, 91180962, 91185762, 91187211,
91189062, 91190382, 91192077, 91193577, 91195257, 91197363, 91199862, 91200138, 91200912, 91202046, 91202496,
91202967, 91203297, 91203957, 91204095, 91207155, 91211655, 91215237, 91215387, 91216788, 91217892, 91218588,
91224693, 91225467, 91226958, 91231902, 91232019, 91232922, 91233972, 91234047, 91234152, 91238472, 91239177,
91239252, 91243587, 91243752, 91245237, 91245387, 91247334, 91247418, 91247484, 91247493, 91248927, 91249377,
91249734, 91249743, 91252095, 91252557, 91252857, 91254612, 91254762, 91256412, 91257315, 91265523, 91268721,
91270746, 91284612, 91284762, 91286073, 91292088, 91292178, 91292238, 91299087, 91300137, 91309377, 91310937,

91314237, 91319037, 91319703, 91320519, 91320855, 91321905, 91323105, 91324167, 91324584, 91324917, 91324959, 91324992, 91328922, 91332105, 91332417, 91332459, 91332492, 91333242, 91339245, 91344552, 91347417, 91347459, 91347492, 91352745, 91357095, 91374027, 91382004, 91392627, 91397112, 91397262, 91402377, 91403832, 91403877, 91404612, 91404762, 91406412, 91407246, 91410252, 91412502, 91416027, 91416252, 91416627, 91432152, 91447317, 91452315, 91457112, 91457262, 91474362, 91552314, 91594527, 91595262, 91595322, 91595412, 91602762, 91602822, 91602912, 91619862, 91620138, 91620246, 91621788, 91623927, 91624377, 91624734, 91624743, 91627095, 91630137, 91632105, 91632417, 91632459, 91632492, 91633242, 91634742, 91639062, 91640382, 91641027, 91641252, 91641627, 91663242, 91664127, 91666347, 91666662, 91673142, 91673211, 91674618, 91678224, 91685712, 91701273, 91707762, 91707822, 91707912, 91711788, 91713927, 91725246, 91726473, 91731237, 91731405, 91731417, 91731645, 91732086, 91732311, 91732617, 91733211, 91733814, 91737312, 91738221, 91741338, 91746123, 91746168, 91747623, 91748142, 91748211, 91749618, 91776324, 91782249, 91783224, 91786713, 91787163, 91791324, 91792071, 91804572, 91810473, 91810482, 91825422, 91846122, 91846272, 91847622, 91849227, 91856223, 91858212, 91872117, 91872231, 91873122, 91961223, 91962723, 91976223, 92001273, 92009322, 92011728, 92012748, 92023047, 92023095, 92024571, 92026482, 92029662, 92032047, 92047542, 92047545, 92049771, 92070792, 92070795, 92072595, 92076912, 92077512, 92078322, 92079162, 92082762, 92082822, 92082912, 92087763, 92087913, 92104275, 92109525, 92110275, 92112987, 92116788, 92117892, 92139177, 92139252, 92142762, 92142822, 92142912, 92143677, 92162928, 92177571, 92177628, 92177814, 92179128, 92182542, 92182545, 92207685, 92237763, 92237913, 92242821, 92250246, 92251473, 92252496, 92252967, 92253297, 92253957, 92254095, 92254617, 92254731, 92260473, 92260482, 92262987, 92264748, 92266395, 92268492, 92269623, 92270496, 92280117, 92284521, 92284542, 92284545, 92295123, 92295345, 92301282, 92304612, 92304762, 92306412, 92307762, 92307822, 92307912, 92309532, 92309817, 92310282, 92310873, 92312487, 92312883, 92313369, 92314167, 92314734, 92314743, 92315235, 92316462, 92316645, 92320041, 92320701, 92320836, 92320881, 92321781, 92322306, 92322381, 92324361, 92324811, 92325117, 92326167, 92332086, 92332311, 92332617, 92333211, 92333814, 92336025, 92345184, 92346117, 92347617, 92358663, 92361198, 92362698, 92374812, 92381412, 92383221, 92413338, 92416338, 92427633, 92429133, 92431473, 92438211, 92441337, 92457618, 92458623, 92461248, 92461668, 92461863, 92468025, 92475123, 92475342, 92476023, 92476248, 92477148, 92481237, 92481405, 92481417, 92481645, 92482086, 92482311, 92482617, 92483211, 92483814, 92487312, 92488221, 92491338, 92496123, 92496168, 92497623, 92498142, 92498211, 92499618, 92523717, 92523762, 92535912, 92537307, 92538717, 92538762, 92542137, 92625237, 92625387, 92635473, 92635482, 92703648, 92716395, 92731038, 92739042, 92739045, 92740032, 92743512, 92743542, 92743545, 92744352, 92751324, 92757171, 92763249, 92763324, 92763474, 92815239, 92820024, 92821422, 92822421, 92822499, 92832249, 92833224, 92841402, 92843562, 92844477, 92844612, 92844762, 92845242, 92857071, 92857314, 92862198, 92866713, 92871663, 92881023, 92891217, 92891262, 92892117, 92892231, 92899362, 92910423, 92913249, 92913324, 92913474, 92916324, 92917071, 92920731, 92920821, 92921025, 92921412, 92921628, 92922435, 92922648, 92923071, 92923314, 92924133, 92935245, 92960262, 92960322, 92960412, 92970123, 92970345, 92980572, 92985717, 92987217, 92988072, 92989062, 92990382, 92997309, 93012297, 93045822, 93047412, 93047922, 93096162, 93097314, 93104748, 93104832, 93104982, 93109347, 93109473, 93139245, 93147423, 93190002, 93190377, 93198522, 93200019, 93200064, 93200142, 93200715, 93201288, 93201405, 93201417, 93201735, 93203745, 93204147, 93204246, 93207006, 93208605, 93210642, 93210897, 93212565, 93212655, 93215007, 93215082, 93220092, 93223356, 93231105, 93235617, 93241002, 93241602, 93243147, 93247041, 93247431, 93249102, 93251922, 93252195, 93261537, 93266037, 93269172, 93271647, 93271746, 93274002, 93274902, 93285822, 93287217, 93288072, 93291672, 93292242, 93295902, 93296022, 93297021, 93297042, 93297045, 93309477, 93319002, 93320019, 93320064, 93320142, 93320397, 93321105, 93321507, 93324102, 93326922, 93327195, 93327402, 93328572, 93329172, 93331287, 93331902, 93332019, 93332922, 93333972, 93334047, 93337179, 93337215, 93339927, 93352047, 93354297, 93354612, 93354762, 93356412, 93361962, 93362547, 93362847, 93371679, 93371769, 93372192, 93372699, 93374262, 93374709, 93379221, 93382674, 93394677, 93396072, 93397242, 93397902, 93399177, 93399252, 93399477, 93399927, 93404742, 93407997, 93410502, 93416052, 93428562, 93431097, 93462657, 93529107, 93540927, 93562332, 93562482, 93563205, 93563457, 93569862, 93570138, 93570246, 93570642, 93571092, 93571155, 93579207, 93579612, 93579762, 93583332, 93585912, 93587175, 93589707, 93590457, 93591762, 93592512, 93607092, 93608205, 93619857, 93624705, 93630957, 93642627, 93647112, 93647262, 93660762, 93676257, 93706167, 93707016, 93721791, 93721836, 93731082, 93742632, 93743607, 93748107, 93754107, 93760707, 93761427, 93761757, 93763812, 93766257, 93776307, 93791307, 93809127, 93810912, 93812637, 93832206, 93871767, 93876762, 93881745, 93911562, 93967707, 93970662, 93976707, 94000182, 94001832, 94016382, 94018332, 94037682, 94045662, 94061637, 94091202, 94095207, 94107087, 94107237, 94137177, 94170477, 94171827, 94172292, 94172295, 94172475, 94179207, 94183722, 94202457, 94204752, 94207977, 94217757, 94218252, 94218327, 94222815, 94222917, 94224282, 94224792, 94224795, 94224975, 94243377, 94285707, 94291707, 94292082, 94292307, 94335477, 94337427, 94357977, 94359177, 94359252, 94364727, 94366077, 94387677, 94472817, 94520475, 94521825, 94522815, 94522917, 94524282, 94524792, 94524795, 94524975, 94542282, 94542957, 94552317, 94561323, 94570332, 94582032, 94586232, 94588812, 94612332, 94612482, 94613205, 94613457, 94618362, 94631637, 94677363, 94708842, 94723842, 94726383, 94728171, 94731093, 94732041, 94732716, 94733625, 94734315, 94743138, 94743384, 94747863, 94751232, 94760232, 94762332, 94762482, 94763205, 94763457, 94770648, 94771482, 94785207, 94786347, 94803657, 94810887, 94852182, 94856862, 94861857, 94864227, 94865712, 94867257, 94870662, 94875207, 94877082, 94885707, 94887267, 94897707, 94918137, 94958907, 94987707, 94993137, 94997862, 95068209, 95070684, 95122734, 95122743, 95207091, 95209125, 95211819, 95219325, 95228571, 95228763, 95229171, 95230917, 95232411, 95232615, 95233206, 95237175, 95239725, 95240475, 95242842, 95243397, 95243592, 95246184, 95247921, 95247945, 95248092, 95248206, 95259207, 95296725, 95341797, 95342292, 95342295, 95342475, 95342637, 95342742, 95374332, 95374932, 95380932, 95387175, 95389107, 95409162, 95409357, 95410923, 95415912, 95420475, 95421825, 95422842, 95431962, 95433297, 95446182, 95612523, 95632089, 95662071, 95686221, 95702436, 95702481, 95702625, 95704125, 95706123, 95706339, 95706621, 95707041, 95707716, 95708625, 95711142, 95711319, 95711571, 95712684, 95714082, 95714112, 95716128, 95721384, 95725125, 95725716,

95726142, 95726319, 95731125, 95761725, 95770716, 95771625, 95811273, 95820231, 95821125, 95821407, 95822625, 95861412, 96111423, 96114162, 96116205, 96117075, 96117342, 96121821, 96121842, 96126273, 96128412, 96132069, 96134457, 96140673, 96142317, 96150432, 96157071, 96157314, 96161907, 96162705, 96164082, 96164112, 96166407, 96166725, 96172284, 96172638, 96172863, 96177309, 96179907, 96180912, 96231774, 96268209, 96271821, 96271842, 96273171, 96293217, 96317739, 96320664, 96321834, 96332184, 96342315, 96382209, 96407082, 96408207, 96412707, 96622284, 96622638, 96625725, 96627075, 96627363, 96666225, 96820314, 96821121, 96821271, 96821334, 96822135, 96822621, 96832134, 96911223, 97023141, 97026138, 97041138, 97063389, 97068621, 97071384, 97073616, 97088814, 97111392, 97113189, 97116384, 97118625, 97126368, 97126839, 97138209, 97139082, 97139112, 97182135, 97213839, 97213884, 97229436, 97261392, 97263189, 97281624, 97281714, 97309134, 97309314, 97310934, 97314069, 97316094, 97333614, 97411248, 97413417, 97416123, 97416342, 97436142, 97436319, 97483614, 97491123, 97491342, 97493625, 97511412, 97570716, 97571625, 97614162, 97616205, 97617075, 97617342, 97621821, 97621842, 97626273, 97628412, 97632069, 97634457, 97636713, 97637163, 97643217, 97682124, 97752171, 97771671, 97862673, 97867113, 97867263, 97877163, 97890717, 97921863, 97923171, 97935717, 97967271, 97977171, 98092317, 98157069, 98166774, 98167749, 98167974, 98172921, 98172945, 98173092, 98173206, 98177421, 98177499, 98179749, 98191272, 98202615, 98204115, 98206731, 98208615, 98219112, 98225115, 98231115, 98241117, 98271615, 98321115, 98322615, 98361774, 98654322, 98667225, 98822184, 98867721, 99018225, 99066273, 99071775, 99118362, 99131637, 99136812, 99138162, 99182112, 99182262, 99184227, 99193227, 99226821, 99226842, 99273171, 99293217, 99311637, 99318522, 99320367, 99352182, 99356862, 99361857, 99366357, 99366612, 99777171, 99816774, 99817749, 99817974, 99821115, 99822615, 99867225, 99936612, 99981774

Lista de valores de $c < 10^8$ que “quase” satisfazem o item c (todas quantidades de dígitos iguais, exceto zero)

4092, 35925, 40917, 41592, 46125, 46407, 47625, 228585, 230592, 231906, 232056, 234156, 235692, 238092, 245931, 295671, 306975, 320592, 357291, 357975, 359175, 362955, 388092, 391092, 409167, 415917, 416592, 432456, 445638, 456123, 456339, 456621, 457041, 457716, 458625, 461142, 461319, 461571, 462684, 464082, 464112, 466128, 471384, 475125, 475716, 476142, 476319, 2274051, 2275581, 2276058, 2278581, 2282406, 2283105, 2285835, 2287608, 2288085, 2292051, 2305917, 2327406, 2329206, 2331906, 2332056, 2335641, 2339706, 2340456, 2341656, 2346066, 2351592, 2356881, 2356917, 2358192, 2370516, 2375625, 2379108, 2380917, 2383569, 2384706, 2405475, 2405775, 2407746, 2408796, 2431455, 2433756, 2439567, 2439657, 2459181, 2459226, 2460891, 2475921, 2478585, 2480592, 2481906, 2482056, 2484156, 2485692, 2488092, 2495931, 2609205, 2705796, 2728581, 2740641, 2841105, 2856138, 2909211, 2910921, 2920641, 2920911, 2921091, 2955216, 2956671, 2966907, 2968092, 2969307, 3068265, 3068379, 3069297, 3081975, 3091155, 3091857, 3092967, 3106875, 3159147, 3159246, 3159564, 3159615, 3159741, 3160455, 3174591, 3187206, 3190797, 3192357, 3194757, 3205917, 3227406, 3229206, 3241092, 3290922, 3296907, 3309297, 3320592, 3355932, 3359274, 3410787, 3419757, 3425865, 3429105, 3561825, 3568269, 3568575, 3572916, 3574791, 3576819, 3582291, 3582975, 3586425, 3591675, 3592638, 3592971, 3629592, 3637563, 3641088, 3657963, 3729108, 3756138, 3796158, 3805932, 3807291, 3807975, 3814092, 3830925, 3834105, 3845625, 3870516, 3875625, 3879108, 3880917, 3883569, 3884706, 3909102, 3910638, 3910875, 3910917, 3916092, 3948657, 3955725, 3956907, 3959112, 4068645, 4068957, 4079637, 4091667, 4092336, 4092921, 4092945, 4093047, 4093095, 4096125, 4096407, 4097625, 4105773, 4106598, 4106871, 4106892, 4107285, 4107375, 4109142, 4109238, 4138092, 4141092, 4159167, 4165917, 4166592, 4189107, 4205475, 4205775, 4209291, 4233591, 4234566, 4284105, 4290921, 4292091, 4295571, 4309095, 4324956, 4332456, 4364562, 4364607, 4410957, 4478592, 4506819, 4524591, 4546134, 4547634, 4552116, 4552716, 4561248, 4563339, 4563525, 4564071, 4564134, 4564314, 4566621, 4570416, 4570635, 4575216, 4577166, 4582041, 4582716, 4583625, 4586142, 4586319, 4609134, 4609314, 4610934, 4611405, 4611417, 4612638, 4612842, 4613241, 4613274, 4613319, 4614315, 4615731, 4615821, 4616907, 4618092, 4619112, 4625184, 4626834, 4631859, 4637721, 4638204, 4640832, 4641357, 4641612, 4657125, 4663575, 4666128, 4679634, 4682031, 4682634, 4683621, 4708881, 4708911, 4709136, 4713771, 4713834, 4721385, 4730931, 4743141, 4750125, 4750716, 4751142, 4751319, 4757166, 4758216, 4761405, 4761417, 4762638, 4762842, 4763241, 4763274, 4763319, 4763763, 4774086, 4781706, 4841067, 4857066, 4860684, 4872066, 4911093, 22740501, 22749051, 22750581, 22751058, 22755831, 22760583, 22785831, 22788081, 22805115, 22805715, 22809681, 22819509, 22824906, 22830765, 22830879, 22832406, 22833105, 22835571, 22835874, 22842006, 22845906, 22849659, 22850625, 22855623, 22856238, 22856283, 22856346, 22857051, 22857306, 22857381, 22857921, 22857945, 22858335, 22858971, 22859046, 22863096, 22875108, 22876083, 22876305, 22880571, 22880835, 22883079, 22890585, 22898406, 22908996, 22917051, 22920501, 22923306, 22945092, 22950921, 22953456, 22975581, 22976058, 23005911, 23006091, 23055912, 23057742, 23058729, 23059167, 23064105, 23065992, 23079105, 23079756, 23095635, 23108955, 23141055, 23190564, 23197581, 23203956, 23205564, 23269206, 23274906, 23285625, 23285706, 23286069, 23291706, 23295906, 23306379, 23327406, 23329206, 23331906, 23332056, 23335641, 23339706, 23340456, 23342856, 23356416, 23358741, 23360919, 23364609, 23376069, 23397906, 23410065, 23410155, 23415564, 23416656, 23419065, 23445567, 23458566, 23460666, 23465706, 23468406, 23469066, 23491566, 23501592, 23515917, 23516592, 23561835, 23568585, 23569167, 23569884, 23573766, 23581881, 23581917, 23583192, 23585685, 23589675, 23591541, 23626596, 23650842, 23653092, 23653575, 23658492, 23690625, 23705016, 23705166, 23706192, 23710692, 23717592, 23728563, 23741088, 23750625, 23756142, 23756319, 23759262, 23760705, 23785842, 23791083, 23791608, 23805912, 23807742, 23808729, 23809167, 23814105, 23815992, 23819859, 23820579, 23829609, 23830929, 23833569, 23835741, 23835774, 23835819, 23854563, 23856963, 23857971, 23883579, 23910792, 23910795, 23926092, 23956293, 23957907, 23971575, 23972592, 23975625, 24009282, 24046575, 24047592, 24057276, 24058275, 24064296, 24077496, 24077967, 24078297, 24078957, 24079095, 24082746, 24083796, 24098067, 24098817, 24100638, 24107883, 24108738, 24108783, 24108846, 24115578, 24181455, 24183507, 24190638, 24192807, 24273306, 24280692, 24283092, 24305457, 24307746, 24308796, 24314592, 24315996, 24328605, 24333756, 24336906, 24337506, 24337605, 24355638, 24355782, 24365541, 24376092, 24381906, 24382056, 24384561, 24388065, 24395667, 24396582, 24428592, 24488592, 24528591, 24552141, 24554184, 24560943, 24566442, 24569085, 24585891, 24590796, 24591021, 24591681, 24591726, 24592041, 24592251, 24592635, 24593064, 24593406, 24594066, 24599316, 24600684, 24602091, 24608391, 24608916, 24615093, 24637908, 24640593, 24641907, 24643092, 24644157, 24644568, 24668259, 24669075, 24675891, 24682809, 24693075, 24750921, 24756921, 24756942, 24759171, 24774051, 24775581, 24776058, 24778581, 24782406, 24783105, 24785835, 24787608, 24788085, 24792051, 24805917, 24827406, 24829206, 24831906, 24832056, 24835641, 24839706, 24840456, 24841656, 24846066, 24851592, 24856881, 24856917, 24858192, 24870516, 24875625, 24879108, 24880917, 24883569, 24884706, 24905475, 24905775, 24907746, 24908796, 24931455, 24933756, 24939567, 24939657, 24959181, 24959226, 24960891, 24975921, 24978585, 24980592, 24981906, 24982056, 24984156, 24985692, 24988092, 24995931, 25109205, 25205796, 25570641, 25570911, 25571091, 25591032, 25638069, 25682406, 25683105, 25690695, 25696158, 25705692, 25795671, 25806975, 25912557, 25914057, 25920642, 25921092, 25921155, 25923057, 25923807, 25930797, 25933557, 26091705, 26092092, 26206596, 26209566, 26245593, 26345592, 26357955, 26459307, 26557341, 26909907, 26920575, 27045585, 27056985, 27058296, 27285831, 27288081, 27305706, 27306906, 27307056, 27314559, 27342156, 27380706, 27391086, 27395613, 27395634, 27406416, 27406986, 27407961, 27453591, 27463809, 27478581, 27490641, 27842061, 28170456, 28205706, 28399107, 28410642, 28410897, 28416105, 28427406, 28429206, 28456125, 28570641, 28570911, 28571091, 28591071, 28592625, 28594107, 28607091, 28614705, 28638108, 28641108, 28834206, 28880706, 29091012, 29091042, 29091045, 29091711, 29092086, 29104092, 29109171, 29159211, 29160921, 29170641, 29170911, 29171091, 29206416, 29208591, 29209161, 29210916, 29284206, 29396607, 29463807, 29550216, 29552166, 29566038, 29566671, 29567085, 29567142, 29567331, 29574066, 29581569, 29581605, 29590695, 29642067, 29642157, 29660205, 29660643, 29660892, 29661255, 29666907, 29668092, 29669082, 29671575, 29672592, 29680917, 29683809, 29691807, 29693082, 29740692, 29755716, 29759217, 29906592, 30061365, 30456774, 30591822, 30659457, 30682515, 30682947, 30683265, 30683379, 30685929, 30691797, 30692292, 30692295, 30692475, 30692637, 30692742, 30697284, 30697638, 30697884, 30728766, 30766365, 30774684, 30793197, 30794682, 30818265, 30818379, 30819297, 30831975, 30842865, 30865929,

30879684, 30913767, 30913815, 30916155, 30916857, 30917967, 30918582, 30929667, 30948657, 30956625, 30957066, 31068369, 31068642, 31068819, 31069137, 31081875, 31086819, 31095684, 31115955, 31136505, 31256865, 31380915, 31406955, 31410915, 31506819, 31559319, 31568979, 31579569, 31591647, 31591746, 31591962, 31592496, 31595706, 31597416, 31597491, 31599684, 31604592, 31609455, 31609569, 31659147, 31659246, 31659564, 31659615, 31659741, 31660455, 31674591, 31728456, 31732956, 31745916, 31749591, 31856205, 31891062, 31905912, 31906962, 31908297, 31917357, 31923582, 31924857, 31947507, 31947582, 31961205, 31961907, 31962705, 31972809, 31974075, 31976205, 32009274, 32014092, 32055912, 32057742, 32058729, 32059167, 32064105, 32065992, 32091105, 32109105, 32274906, 32285625, 32285706, 32286069, 32291706, 32341065, 32370615, 32374107, 32409102, 32410638, 32410875, 32410917, 32416092, 32461569, 32477406, 32479206, 32491092, 32690922, 32740797, 32743557, 32909172, 32915922, 32969082, 32972859, 32975922, 33087729, 33091797, 33092292, 33092295, 33092475, 33092637, 33092742, 33187206, 33190797, 33192357, 33194757, 33205917, 33227406, 33229206, 33241092, 33290922, 33296907, 33309297, 33320592, 33355932, 33359274, 33559332, 33587274, 33591774, 33592749, 33592974, 33614097, 33715929, 33774108, 33809274, 33910797, 33990927, 34079547, 34108287, 34108788, 34109769, 34160787, 34169757, 34175865, 34179105, 34197507, 34197582, 34228065, 34246575, 34247592, 34250865, 34258365, 34268706, 34273356, 34277406, 34279206, 34285929, 34288092, 34291605, 34296105, 34296507, 34456575, 34547706, 34567281, 34637907, 34682706, 34770456, 34774659, 34785675, 34790865, 34794567, 34794657, 34795659, 34929567, 34929657, 35295675, 35562273, 35584275, 35615928, 35618325, 35622738, 35622888, 35627283, 35682519, 35682564, 35682642, 35683269, 35685825, 35689725, 35690475, 35692962, 35698725, 35705475, 35705775, 35709291, 35727306, 35727381, 35728206, 35728881, 35728911, 35729166, 35747916, 35749791, 35751819, 35764182, 35766375, 35768241, 35768274, 35768319, 35772921, 35772945, 35773092, 35773206, 35784297, 35787432, 35790912, 35793297, 35797284, 35797638, 35809275, 35818269, 35818575, 35822916, 35824791, 35826819, 35832291, 35832975, 35836425, 35842875, 35864175, 35878425, 35887971, 35897925, 35909427, 35914725, 35916675, 35917638, 35917971, 35923266, 35925138, 35925912, 35927046, 35927442, 35928429, 35940927, 36068925, 36069228, 36072819, 36072891, 36077319, 36091425, 36152955, 36245925, 36295917, 36369063, 36375063, 36376758, 36381255, 36410838, 36416088, 36429108, 36436563, 36449568, 36451593, 36459312, 36470643, 36471093, 36472908, 36479088, 36482907, 36553425, 36561438, 36582963, 36584145, 36584625, 36609258, 36831075, 36906138, 36932607, 37061835, 37084566, 37106835, 37285842, 37291083, 37291608, 37347066, 37432857, 37433592, 37456143, 37459113, 37479108, 37506138, 37593357, 37810683, 37841088, 37956408, 37956603, 37961583, 37964307, 37968075, 38059332, 38068269, 38068575, 38072916, 38074791, 38076819, 38082291, 38082975, 38086425, 38092842, 38106888, 38109138, 38113755, 38140917, 38141592, 38159145, 38159625, 38194257, 38197809, 38199075, 38265921, 38267091, 38274108, 38307729, 38309175, 38315979, 38330925, 38334105, 38341605, 38357091, 38409711, 38410746, 38410971, 38414562, 38414607, 38419857, 38425695, 38456142, 38456319, 38464107, 38466075, 38470641, 38470911, 38471091, 38569842, 38584095, 38650842, 38653092, 38653575, 38658492, 38690625, 38705016, 38705166, 38706192, 38710692, 38717592, 38728563, 38741088, 38750625, 38756142, 38756319, 38759262, 38760705, 38785842, 38791083, 38791608, 38805912, 38807742, 38808729, 38809167, 38814105, 38815992, 38819859, 38820579, 38829609, 38830929, 38833569, 38835741, 38835774, 38835819, 38854563, 38856963, 38857971, 39055932, 39057291, 39057975, 39064092, 39091002, 39091602, 39093147, 39107286, 39108375, 39108642, 39108819, 39108957, 39109167, 39112455, 39115575, 39137607, 39146157, 39159102, 39160638, 39160875, 39160917, 39166092, 39206475, 39319065, 39320565, 39335865, 39365625, 39486582, 39498657, 39545907, 39557025, 39558225, 39564225, 39566205, 39567075, 39567342, 39569082, 39577407, 39581907, 39589107, 39591357, 39591612, 39609225, 39614157, 39615705, 39735684, 39741093, 39759207, 39773406, 39781569, 39781605, 39790875, 39791907, 39793092, 39870675, 39872907, 39975684, 39977091, 40063638, 40068375, 40091382, 40513638, 40589775, 40593375, 40618875, 40637319, 40639092, 40641375, 40686462, 40688745, 40689582, 40689792, 40689795, 40689975, 40736457, 40746375, 40773957, 40786482, 40795875, 40797285, 40797375, 40818645, 40818957, 40829637, 40864095, 40864788, 40895457, 40897746, 40909521, 40909542, 40909545, 40910292, 40910295, 40912155, 40913355, 40914102, 40914612, 40914762, 40915236, 40916667, 40917336, 40917921, 40917945, 40918047, 40918095, 40919862, 40920138, 40920246, 40920792, 40920795, 40922595, 40923201, 40923336, 40923381, 40924836, 40926237, 40928571, 40928763, 40929171, 40932006, 40933605, 40937607, 40941087, 40942857, 40948857, 40950684, 40952091, 40954092, 40956123, 40956339, 40956621, 40957041, 40957716, 40958625, 40961142, 40961319, 40961571, 40962684, 40964082, 40964112, 40966128, 40971384, 40975125, 40975716, 40976142, 40976319, 40981569, 40981605, 40983615, 41005932, 41009232, 41020455, 41029092, 41040975, 41042955, 41045643, 41046093, 41050932, 41057748, 41058273, 41059338, 41061888, 41064138, 41065998, 41066478, 41066598, 41068905, 41068917, 41073642, 41073819, 41073975, 41074785, 41074875, 41077392, 41081871, 41081892, 41082285, 41082375, 41087319, 41089095, 41089788, 41091255, 41091405, 41091417, 41091642, 41091738, 41092305, 41092335, 41092488, 41092824, 41093355, 41096184, 41104593, 41125455, 41128455, 41206596, 41209566, 41245593, 41345592, 41357955, 41370516, 41375625, 41379108, 41380917, 41383569, 41384706, 41409102, 41410638, 41410875, 41410917, 41416092, 41448657, 41455725, 41456907, 41459112, 41523591, 41564319, 41579625, 41591667, 41592336, 41592921, 41592945, 41593047, 41593095, 41596125, 41596407, 41597625, 41605773, 41606598, 41606871, 41606892, 41607285, 41607375, 41609142, 41609238, 41638092, 41641092, 41659167, 41665917, 41666592, 41689107, 41705475, 41705775, 41709291, 41733591, 41734566, 41784105, 41790921, 41792091, 41795571, 41809095, 41819007, 41820069, 41825922, 41870625, 41891082, 41891607, 41897907, 41900682, 41905932, 41907957, 41922807, 41955432, 42006819, 42024591, 42046575, 42047592, 42057276, 42058275, 42064296, 42068256, 42079092, 42091791, 42092916, 42092961, 42109296, 42182592, 42259095, 42273306, 42280692, 42283092, 42320091, 42333591, 42335916, 42338091, 42345666, 42356835, 42483591, 42484566, 42568374, 42568716, 42592137, 42613755, 42730569, 42738069, 42740796, 42784206, 42820569, 42841605, 42857091, 42864108, 42888069, 42909171, 42915921, 42917091, 42920916, 42955125, 42955731, 42955821, 42956421, 42956484, 42956493, 42958092, 42959211, 42960921, 43069575, 43072956, 43091457, 43091595, 43099182, 43190547, 43190595, 43195542, 43195545, 43196007, 43198605, 43200456, 43200696, 43201455, 43205547, 43205595, 43205961, 43206096, 43209561, 43210956, 43245564, 43249956, 43256967, 43280697, 43285797, 43296105, 43296507, 43324956, 43332456, 43355457, 43356897, 43359147,

43359246, 43359564, 43359615, 43359741, 43360455, 43456092, 43595625, 43607955, 43645857, 43646082, 43646757, 43745625, 43829706, 43965927, 43968357, 43995675, 44054682, 44090952, 44109582, 44160957, 44245638, 44299557, 44554182, 44563653, 44564793, 44566098, 44600682, 44608638, 44660928, 44668257, 44682807, 44733591, 44734566, 44780865, 44785638, 44785875, 44785917, 44872857, 44978592, 45006819, 45068241, 45068274, 45068319, 45081819, 45090912, 45204591, 45228456, 45232956, 45245916, 45249591, 45296592, 45409095, 45458634, 45461271, 45461334, 45470316, 45471135, 45472635, 45475134, 45476271, 45476334, 45477081, 45502116, 45521166, 45525216, 45527166, 45531615, 45536175, 45536613, 45542316, 45570726, 45572541, 45593613, 45600432, 45603225, 45609363, 45612321, 45612498, 45618621, 45628623, 45633339, 45636804, 45638454, 45640731, 45640821, 45641271, 45641334, 45641634, 45641814, 45662085, 45662142, 45662571, 45662628, 45663492, 45666621, 45673041, 45690711, 45696363, 45698634, 45702141, 45702306, 45702381, 45703206, 45703881, 45703911, 45704166, 45705726, 45706431, 45709311, 45710931, 45711585, 45712566, 45728631, 45736266, 45750216, 45752166, 45761571, 45762684, 45771666, 45771831, 45796134, 45797634, 45817281, 45820416, 45820635, 45825216, 45827166, 45832041, 45832716, 45833625, 45836142, 45836319, 45859134, 45859314, 45860934, 45861405, 45861417, 45862638, 45862842, 45863241, 45863274, 45863319, 45874113, 45890625, 45902286, 45912612, 45912711, 45923136, 45941112, 45941127, 46012932, 46022931, 46052316, 46068621, 46071384, 46073616, 46088814, 46091271, 46091334, 46091634, 46091814, 46094112, 46102284, 46109334, 46112319, 46114167, 46114734, 46114743, 46115235, 46120692, 46121796, 46121835, 46122921, 46122945, 46123092, 46123206, 46125138, 46125912, 46127046, 46127331, 46128417, 46131369, 46132416, 46132491, 46132749, 46132959, 46133241, 46133274, 46133319, 46133979, 46134147, 46134246, 46134564, 46134615, 46134741, 46141815, 46152138, 46152384, 46153842, 46153884, 46157085, 46157142, 46157436, 46157481, 46158231, 46158321, 46158525, 46160205, 46160643, 46160892, 46161255, 46166907, 46168092, 46169082, 46171575, 46172592, 46180917, 46184064, 46191357, 46191612, 46218816, 46231569, 46231605, 46233615, 46250184, 46251834, 46256625, 46263768, 46266384, 46268334, 46269225, 46270692, 46271796, 46271835, 46276158, 46284315, 46291158, 46293315, 46315689, 46317285, 46317375, 46318584, 46320669, 46321569, 46331859, 46338654, 46341564, 46344567, 46344657, 46346115, 46347615, 46356912, 46365213, 46371771, 46372671, 46374312, 46375221, 46375407, 46382109, 46383204, 46385721, 46390857, 46393107, 46405725, 46408332, 46410207, 46411347, 46412067, 46412157, 46413582, 46416357, 46416612, 46470432, 46521138, 46521432, 46522341, 46523625, 46571142, 46571319, 46582125, 46600725, 46602075, 46612428, 46612758, 46621575, 46622592, 46635825, 46637226, 46663575, 46666128, 46679634, 46702281, 46728135, 46771371, 46796121, 46796271, 46796334, 46797135, 46797621, 46812735, 46814475, 46822581, 46823631, 46825134, 46826271, 46826334, 46827081, 46831128, 46832031, 46832634, 46833621, 46840236, 46863075, 46871316, 46888113, 46888134, 46891113, 46932612, 46932711, 46986342, 47022831, 47028411, 47034291, 47038341, 47042841, 47046135, 47047635, 47063931, 47064135, 47066235, 47066436, 47078625, 47083881, 47083911, 47086431, 47089161, 47091636, 47109135, 47112285, 47112375, 47135685, 47137041, 47137521, 47137863, 47138334, 47138571, 47140875, 47163726, 47179635, 47182635, 47208876, 47236191, 47236431, 47253591, 47256936, 47262285, 47262375, 47283624, 47289081, 47291034, 47293581, 47294211, 47294541, 47309181, 47309226, 47310891, 47336241, 47374113, 47390766, 47407731, 47411238, 47411283, 47411346, 47418141, 47428431, 47429331, 47431416, 47433906, 47435931, 47439066, 47440686, 47440866, 47453841, 47480931, 47493141, 47500125, 47500716, 47501142, 47501319, 47507166, 47508216, 47511405, 47511417, 47512638, 47512842, 47513241, 47513274, 47513319, 47513763, 47557116, 47561148, 47571666, 47571831, 47582166, 47583216, 47591217, 47591262, 47592117, 47592231, 47614167, 47614734, 47614743, 47615235, 47620692, 47621796, 47621835, 47622921, 47622945, 47623092, 47623206, 47625138, 47625912, 47627046, 47627331, 47628417, 47631369, 47632416, 47632491, 47632749, 47632959, 47633241, 47633274, 47633319, 47633979, 47634147, 47634246, 47634564, 47634615, 47634741, 47637513, 47638071, 47641032, 47643315, 47647863, 47660235, 47671371, 47682624, 47692125, 47704581, 47715981, 47730906, 47740635, 47740701, 47740836, 47740881, 47743086, 47749086, 47770581, 47808615, 47816706, 47856342, 47857041, 47857716, 47858625, 47863092, 47908716, 47920635, 47930706, 48059112, 48160575, 48410157, 48410667, 48416067, 48563184, 48569112, 48570666, 48582066, 48592266, 48592716, 48593115, 48606834, 48608184, 48619107, 48626592, 48640857, 48643107, 48720666, 48770625, 48809112, 48841062, 49072911, 49108842, 49110888, 49110918, 49161093, 49306137, 49337706, 49370661, 49561143, 49591134, 49635684, 49774086, 49781706, 49841067, 49857066, 49860684, 49872066, 49911093