XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Critérios

PROBLEMA 1

Critérios

Item a: 0,5 ponto

Escreveu 70148 degraus (com ou sem justificativa)........0,5 ponto

Não acumulativo

Escreveu apenas 71×988 sem concluir........0,3 ponto

Item b: 0,5 ponto

Escreveu 0,187 metros ou 18,7 centímetros (com ou sem justificativa)........0,5 ponto

Não acumulativo

Escreveu apenas $\frac{13145{,}65}{70148}$sem concluir........0,3 ponto

Item c: 0,5 ponto

Escreveu 185,15 metros ou apenas 185 metros (com ou sem justificativa)........0,5 ponto

Não acumulativo

Escreveu apenas $\frac{13145{,}65}{71}$sem concluir........0,3 ponto

Item d: 0,5 ponto

Escreveu apenas $\frac{70148}{12\times60\times60}$ ou $\frac{70148}{43200}$ sem concluir........0,4 ponto

Concluiu que foram 1,62 degraus por segundo .... +0,1 ponto

Não acumulativo

Escreveu apenas que 12 horas são $12 \times 60 \times 60$ segundos........0,2 ponto

Escreveu apenas 1,62 degraus por segundo sem justificativa........0,2 ponto

Erros de contas devem ser penalizados com -0,1 ponto por erro.

PROBLEMA 2

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Escreveu 121323........0,6 ponto

Item b: 0,8 ponto

Escreveu 123123, 123132, 123213 e 123231. .... 0,2 ponto cada

Item c: 0,6 ponto

Escreveu que existem 5 números começando com 12, ou seja, da forma 12_ _ _ _ ou equivalente........0,2 ponto

Escreveu que deve multiplicar por 6 usando a observação do enunciado ou equivalente ....0,2 ponto

Concluiu usando os dois passos anteriores que a resposta é $5 \times 6 = 30$ números .... +0,2 ponto

Não acumulativo

Listou todos os 30 números com argumentos de que são os únicos, por exemplo, seguindo certa ordem ....0,6 ponto

Listou todos os 30 números sem argumentos de que são os únicos........0,4 ponto

Listou menos que 30 números ....0,0 ponto

PROBLEMA 3
Critérios

Item a: 0,6 ponto
Escreveu $2y + x = 11$ ....0,6 ponto

Item b: 0,8 ponto
Escreveu que há dois quadrados de área L^2 ....0,2 ponto
Escreveu que há dois retângulos de área xy ....0,2 ponto
Escreveu que há 6 retângulos de área $\frac{xy}{2}$ ou como posicioná-los para formar 3 retângulos de área xy ....0,4 ponto

Item c: 0,6 ponto
Valor correto de x, y e L .... 0,2 ponto cada

Erros de contas devem ser penalizados com -0,1 ponto por erro.

PROBLEMA 4

Critérios

Item a: 0,7 ponto
Passos A, B, C, D, E, F e G que devem estar explícitos .... 0,1 ponto cada

Item b: 0,6 ponto
Escreveu que $(10a + b)(10c + d) = 100ac + 10ad + 10bc + bd$ ....0,3 ponto
Escreveu que $(a + b)(c + d) - (ac + bd) = ad + bc$ ....0,3 ponto

Item c: 0,4 ponto
Observou que são feitas 3 multiplicações de 4 dígitos....................0,2 ponto
Escreveu que são 27 multiplicações simples ....0,2 ponto

Item d: 0,3 ponto
Escreveu que usando o método Karatsuba são feitas 3^5 ou 243 multiplicações simples ....0,1 ponto
Escreveu que usando o método tradicional são feitas 32^2 ou 1024 multiplicações simples ....0,1 ponto
Concluiu que a razão $\frac{243}{1024} \approx 0{,}23 < \frac{1}{4}$ ou equivalente .... +0,1 ponto

Erros de contas devem ser penalizados com -0,1 ponto por erro.

PROBLEMA 5

Critérios

Item a: 0,6 ponto
Escreveu $2^{7-1}(2^7 - 1)$ ou $64 \cdot 127$ ou 8128. ....0,4 ponto
Escreveu que para $p = 6$ não funciona, pois 63 não é primo ....0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto
Calculou $\sigma(44) = 84$ ....0,3 ponto
Usando a razão concluiu que $x = 11$.................... +0,3 ponto

Item c: 0,4 ponto
Escreveu a razão $\frac{(1+3+3^2)(1+7+7^2)(1+11+11^2)(1+13+13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}$ ou equivalente ....0,2 ponto
Concluiu que $x = 11011$.................... +0,2 ponto

Item d: 0,4 ponto
Escreveu que $\sigma(22021) = 22022$ considerando que 22021 primo....................0,2 ponto
Chegou na expressão $\frac{22021}{11011} \cdot \frac{22022}{22021}$ ou equivalente .... +0,2 ponto

Erros de contas devem ser penalizados com -0,1 ponto por erro.

XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Critérios

PROBLEMA 1

Critérios

Item a: 0,6 ponto
Escreveu que 8,89 cm ou qualquer valor entre 8,8 e 9,0..0,6 ponto

Item b: 0,6 ponto
Escrever que o comprador do modelo híbrido gasta 6140,91 dólares em 5 anos (ou deixar a expressão $\frac{5\times 19300}{11}\times 0{,}70$) ....0,6 ponto

Item c: 0,8 ponto
Expressar a área do disquete $8{,}89\cdot 9{,}3\ cm^2$ ou calcular que é aproximadamente $82{,}7\ cm^2$ ....0,2 ponto
Expressar a área de cada sala como $500\cdot 600\ cm^2$, $30\ m^2$ ou equivalente..................................0,2 ponto
Escrever a expressão $\frac{26612\cdot 8{,}89\cdot 9{,}3}{500\cdot 600}$ ou equivalente .... +0,2 ponto
Concluiu que são $7{,}26$ salas de aula ou qualquer valor entre .... +0,2 ponto

O aluno não deve ser penalizado se passar pelas contas anteriores, mas concluir precisará de 8 salas de aula já que são mais que 7 salas.

PROBLEMA 2

Critérios

Item a: 0,6 ponto
Escreveu $2y+x=11$..0,6 ponto

Item b: 0,6 ponto
Valor correto de x, y e L.. 0,2 ponto cada

Item c: 0,8 ponto
Escrever $3a+b=41$ ou equivalente ....0,2 ponto
Escrever $3a+2b=26$ ou equivalente ....0,2 ponto
Concluir que o lado mede 13 .... +0,4 ponto

PROBLEMA 3
Critérios

Usar os critérios do problema 5 do alfa

PROBLEMA 4
Critérios

Item a: 0,8 ponto
Listar as permutações bacanas ....0,1 ponto para cada duas permutações bacanas

Item b: 0,6 ponto
Afirmar que é 1 ou n.. 0,2 ponto cada
Explicar que os $n-1$ números consecutivos são de 1 a $n-1$ ou de 2 a n............................ +0,2 ponto

Item c: 0,6 ponto
Explicar que o número de permutações bacanas de tamanho n terminadas em n é igual ao número de tamanho $n-1$ ....0,2 ponto
Explicar que o número de permutações bacanas de tamanho n terminadas em 1 é igual ao número de tamanho $n-1$ ....0,2 ponto
Das informações do enunciado e dos casos pequenos concluir que são 2^{n-1} sequências bacanas de tamanho n...........0,2 ponto

PROBLEMA 5

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Afirmar que $A^2 \geq 0$ para todo A real ou equivalente..0,2 ponto

Concluir que $x + r = x + s = 0$ .... +0,2 ponto

Concluir que $r = s$ contrariando o enunciado que $r \neq s$.. +0,2 ponto

Item b: 0,4 ponto

Afirmar que $\Delta \leq 0$ ....0,2 ponto

Concluir o resultado pedido .... +0,2 ponto

Item c: 0,6 ponto

Calcular a, b e c.. 0,2 ponto cada

Item d: 0,4 ponto

Afirmar que $\Delta \leq 0$ ....0,2 ponto

Concluir o resultado pedido .... +0,2 ponto

XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)
Nível γ (1º e 2º séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Critérios

PROBLEMA 1

Critérios

Usar os critérios do problema 1 do beta

PROBLEMA 2

Critérios

Item a: 0,3 ponto
Calculou AD corretamente .... 0,3 ponto

Item b: 0,9 ponto
Calculou as tangentes de $A\hat{B}D$, $C\hat{B}D$ e $D\hat{C}B$ .... 0,3 ponto cada

Item c: 0,8 ponto
Mostrou que $D\hat{C}B = A\hat{B}C$ .... 0,1 ponto
Usou corretamente arco tangente nos três ângulos .... 0,2 ponto cada
Concluiu corretamente a demonstração .... +0,1 ponto

Solução alternativa
Escreveu direta ou indiretamente $\text{tg}(x-y) = \frac{\text{tg}\, x - \text{tg}\, y}{1+\text{tg}\, x\, \text{tg}\, y}$ .... 0,4 ponto
Concluiu corretamente a demonstração .... +0,4 ponto

PROBLEMA 3

Critérios

Item a: 0,6 ponto
Expressou $\sigma(2^k) = 1 + 2 + \cdots + 2^k$ .... 0,3 ponto
Concluiu que de $\frac{\sigma(2^k)}{2^k} = \frac{2x-1}{x}$ tem-se $x = 2^k$ ou equivalente .... +0,3 ponto

Item b: 0,4 ponto
Escreveu a razão $\frac{(1+3+3^2)(1+7+7^2)(1+11+11^2)(1+13+13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}$ ou equivalente .... 0,2 ponto
Concluiu que $x = 11011$ .... +0,2 ponto

Item c: 0,4 ponto
Escreveu que $\sigma(22021) = 22022$ considerando que 22021 primo .... 0,2 ponto
Chegou na expressão $\frac{22021}{11011} \cdot \frac{22022}{22021}$ ou equivalente .... +0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto
Afirmou que se a soma de números ímpares é ímpar, então a quantidade somada é ímpar .... 0,2 ponto
Provou que se o número de divisores de n é ímpar, então o número n é um quadrado perfeito .... 0,2 ponto
Provou que todo número perfeito deficiente ímpar é um quadrado perfeito .... +0,2 ponto

Erros de contas devem ser penalizados com -0,1 ponto por erro.

PROBLEMA 4

Critérios

Item a: 0,4 ponto
Afirmou que para cada $f(i)$ tem $k-\ell$ possibilidades ....0,2 ponto
Concluiu que há $(k-\ell)^n$. funções.......... +0,2 ponto

Item b: 0,4 ponto
Escreveu que o total de funções é k^n..........0,2 ponto
Provou que $n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$.é o número de funções não sobrejetoras ....0,2 ponto

Item c: 0,6 ponto
Usou o princípio da inclusão-exclusão corretamente em $3^6 - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$..........0,2 ponto
Calculou $n(A_i) = 2^6$ ou 64, $n\left(A_i \cap A_j\right) = 1^6$ ou 1 e $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$.......... 0,1 ponto cada
Concluiu com o valor de 540 .... +0,1 ponto

Solução alternativa – quaisquer outras maneiras de fazer devem ser pontuadas de maneira proporcional, aqui foi usada como exemplo a maneira alternativa da solução oficial.
Casos (4,1,1), (3,2,1) e (2,2,2) .... 0,2 ponto cada

Item d: 0,6 ponto
Provou que o número de funções sobrejetoras é $n!$..........0,2 ponto
Provou que para cada i a soma das interseções de i conjuntos A_m é $\binom{n}{i}(n-i)^n$ ....0,2 ponto
Concluiu a demonstração usando corretamente o princípio da inclusão-exclusão.......... +0,2 ponto

PROBLEMA 5

Critérios

Item a: 0,4 ponto
Escreveu inequações $p^\beta \le n < p^{\beta+1}$ ou equivalentes ....0,2 ponto
Concluiu a demonstração.......... +0,2 ponto

Item b: 0,4 ponto
Escreveu a equação $L(n) = \prod_{p \le n} p^{\nu_p(L(n))}$..........0,2 ponto
Concluiu, usando o princípio multiplicativo .... +0,2 ponto

Item c: 0,4 ponto
Afirmou que $\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor \le \frac{\ln n}{\ln p}$ ou equivalente..........0,2 ponto
Concluiu a demonstração.......... +0,2 ponto

Item d: 0,4 ponto
Separou os primos em dois conjuntos o primeiro de maiores que ou iguais a y e o segundo de menores que y..........0,2 ponto
Concluiu a demonstração.......... +0,2 ponto

Item e: 0,4 ponto
Substituiu $y = \frac{n}{(\ln n)^2}$ no item d para obter $\pi(n) \cdot \ln n \le \frac{n}{\ln n} + \frac{\theta(n)}{1 - \frac{2 \ln \ln n}{\ln n}}$..........0,2 ponto
Concluiu a demonstração.......... +0,2 ponto