XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Soluções

PROBLEMA 1

a) Multiplicamos a quantidade de subidas pelo número de degraus de cada subida $71 \times 988 = 70148$ degraus.

b) Dividimos a distância total de subida pelo número de degraus $\frac{13145{,}65}{70148} = 0{,}187$ metros ou 18,7 centímetros.

c) Dividimos distância total de subida pela quantidade de subidas $\frac{13145{,}65}{71} = 185{,}15$ metros. O nome da torre faz referência a sua altura aproximada.

d) Em 12 horas temos $12 \times 60 \times 60 = 43200$ segundos. Para obter o número médio de degraus por segundo fazemos a divisão do total de degraus pelo tempo $\frac{70148}{43200} = 1{,}62$ degraus por segundo.

PROBLEMA 2

a) O número é 121323. Como há dois algarismos 3 que não podem ser vizinhos temos que colocar o 2 na quinta posição e os dois 3 na quarta posição e na sexta.

b) Devemos completar o número com um 1, um 2 e um 3. Na quarta posição podemos colocar 1 ou 2.

Se colocarmos 1 na quarta posição, podemos colocar na posição seguinte 2 ou 3 e em cada caso completamos com o algarismo que falta. Temos os números 123123 e 123132.

Se colocarmos 2 na quarta posição, podemos colocar na posição seguinte 1 ou 3 e em cada caso completamos com o algarismo que falta. Temos os números 123213 e 123231.

Os quatro números são 123123, 123132, 123213 e 123231.

c) Pelos itens a e b sabemos que existem 5 formas de organizar os algarismos começando com 1 seguido de 2, ou seja, 1 2 _ _ _ _ . De acordo com a observação dada no enunciado existem 6 formas diferentes de trocar as posições de 1, 2 e 3. Os dois primeiros dígitos podem ser 12, 13, 21, 23, 31 ou 32. Logo, temos $5 \times 6 = 30$ números que satisfazem as condições do problema.

PROBLEMA 3

a) Usando os segmentos horizontais foi obtida a equação $y + 2x = 10$. Usando os segmentos verticais temos $2y + x = 11$.

b) Observe que a área da figura foi dividida em dois quadrados de lado L, seis triângulos retângulos de área $\frac{xy}{2}$ e dois retângulos de área xy. Portanto, a área é $2L^2 + 6\frac{xy}{2} + 2xy = 2L^2 + 5xy$.

c) Somando as equações do item a temos $3y + 3x = 21 \Leftrightarrow x + y = 7$. Dessa forma, $10 = y + 2x = (x + y) + x \Rightarrow x = 3$ e $y = 7 - x = 4$.

Para calcular L podemos usar a área do retângulo maior: $11 \times 10 = 2L^2 + 5xy \Leftrightarrow 110 = 2L^2 + 5 \times 3 \times 4 \Leftrightarrow 50 = 2L^2 \Leftrightarrow L^2 = 25$. Como L é o lado de um quadrado podemos concluir que $L = 5$.

PROBLEMA 4

a) Seguindo os passos do método de Karatsuba temos

(A) $61 \to 6\ \ 1$
$36 \to 3\ \ 6$
(B) $6 \times 3 = 18$
(C) $1 \times 6 = 6$
(D) $6 + 1 = 7$
$3 + 6 = 9$
(E) $7 \times 9 = 63$
(F) $63 - 6 - 18 = 39$
(G) $1800 + 390 + 6 = 2196$

b) Veja que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow (a + b)(c + d) - (ac + bd) = ad + bc$. Agora podemos desenvolver a multiplicação com os fatores 10:

$$(10a + b)(10c + d) = 100ac + 10ad + 10bc + bd = 100ac + bd + 10[(a + b)(c + d) - (ac + bd)]$$

c) Ao multiplicar dois números de 8 dígitos usando o método de Karatsuba precisamos usar o método de Karatsuba para 4 dígitos três vezes, nos passos B, C e E. Logo, são feitas $3 \times 9 = 27$ multiplicações simples.

d) Note que usando Karatsuba para dois números de 16 dígitos são feitas

$$3 \times (multiplicações\ simples\ de\ 8\ dígitos) = 3 \times 27 = 81$$

multiplicações simples e para dois números de 32 dígitos são feitas

$$3 \times (multiplicações\ simples\ de\ 16\ dígitos) = 3 \times 81 = 243$$

multiplicações simples.

No algoritmo tradicional são usadas $32 \times 32 = 1024$ multiplicações simples.

A razão entre as quantidades de multiplicações simples é $\frac{243}{1024} = 0{,}237 < 0{,}25 = \frac{1}{4}$. Outra forma de ver que é melhor que $\frac{1}{4}$ é notar que $243 < 256 = 2^8$ e $\frac{243}{1024} < \frac{256}{1024} = \frac{2^8}{2^{10}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

PROBLEMA 5

a) Para $p = 6$, $2^6 - 1 = 63 = 3 \cdot 21$ não é primo; para $p = 7$, $2^7 - 1 = 127$ é primo: 127 é ímpar, deixa resto 1 na divisão por 3, não é múltiplo de 5, deixa resto 1 na divisão por 7 e resto 6 na divisão por 11. Assim, o quarto número da sequência dos números perfeitos pares é $2^{7-1}(2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$.

b) Os divisores positivos de $44 = 2^2 \cdot 11$ são 1, 2, 4, 11, 22 e 44. Assim

$$\frac{\sigma(44)}{44} = \frac{1 + 2 + 4 + 11 + 22 + 44}{44} = \frac{84}{44} = \frac{21}{11} = \frac{2 \cdot 11 - 1}{11},$$

de modo que $x = 11$.

c) Temos

$$\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{(1 + 3 + 3^2)(1 + 7 + 7^2)(1 + 11 + 11^2)(1 + 13 + 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{13 \cdot 57 \cdot 133 \cdot 183}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}$$

$$= \frac{(3 \cdot 19) \cdot (7 \cdot 19) \cdot (3 \cdot 61)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{19^2 \cdot 61}{7 \cdot 11^2 \cdot 13} = \frac{22021}{11011} = \frac{2 \cdot 11011 - 1}{11011},$$

e $x = 11011$.

d) Se 22021 fosse primo, a soma de seus divisores seria $1 + 22021 = 22022$. Logo, sendo 22021 e $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$ primos entre si, $\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021}$ seria igual a

$$\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} \cdot \frac{22022}{22021} = \frac{22021}{11011} \cdot \frac{22022}{22021} = 2,$$

e teríamos $\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021) = 2(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021)$, ou seja, $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021$ seria perfeito.

XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Soluções

PROBLEMA 1

a) A medida do lado menor do disquete em cm é $3{,}5 \cdot 2{,}54 = 8{,}89$ cm.

b) Como $\frac{38{,}32 \cdot 1000}{1{,}44} = 26611{,}1$ ..., a quantidade de disquetes necessária para armazenar o arquivo do FIFA 19 é 26612.

c) A área total dos disquetes é $26612 \cdot 8{,}89 \cdot 9{,}3$ cm^2, e a área da sala de aula é $500 \cdot 600$ cm^2. Assim, os disquetes correspondem à área de $\frac{26612 \cdot 8{,}89 \cdot 9{,}3}{500 \cdot 600} \cong 7{,}26$ salas de aula.

PROBLEMA 2

a) $x + 2y$ é igual à altura do retângulo, que é 11.

b) De $2x + y = 10$ e $x + 2y = 11$ temos $2x + y + x + 2y = 21 \Leftrightarrow x + y = 7$. Logo $x = (2x + y) - (x + y) = 10 - 7 = 3$, $y = (2y + x) - (x + y) = 11 - 7 = 4$, e $L^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow L^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow L = 5$.

c) Sejam a e b os lados dos triângulos retângulos obtidos traçando linhas verticais e horizontais passando pelos vértices e ℓ o lado de cada quadrado que compõe o pentaminó.

Temos $3a + b = 41$ e $3a + 2b = 46$. Logo $b = (3a + 2b) - (3a + b) = 46 - 41 = 5$, $3a + 5 = 41 \Leftrightarrow a = 12$, e $\ell^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \ell^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow \ell = 13$.

PROBLEMA 3

a) Para $p = 6$, $2^6 - 1 = 63 = 3 \cdot 21$ não é primo; para $p = 7$, $2^7 - 1 = 127$ é primo: 127 é ímpar, deixa resto 1 na divisão por 3, não é múltiplo de 5, deixa resto 1 na divisão por 7 e resto 6 na divisão por 11. Assim, o quarto número da sequência dos números perfeitos pares é $2^{7-1}(2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$.

b) Os divisores positivos de $44 = 2^2 \cdot 11$ são 1, 2, 4, 11, 22 e 44. Assim

$$\frac{\sigma(44)}{44} = \frac{1 + 2 + 4 + 11 + 22 + 44}{44} = \frac{84}{44} = \frac{21}{11} = \frac{2 \cdot 11 - 1}{11},$$

de modo que $x = 11$.

c) Temos

$$\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{(1 + 3 + 3^2)(1 + 7 + 7^2)(1 + 11 + 11^2)(1 + 13 + 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{13 \cdot 57 \cdot 133 \cdot 183}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}$$
$$= \frac{(3 \cdot 19) \cdot (7 \cdot 19) \cdot (3 \cdot 61)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{19^2 \cdot 61}{7 \cdot 11^2 \cdot 13} = \frac{22021}{11011} = \frac{2 \cdot 11011 - 1}{11011},$$

e $x = 11011$.

d) Se 22021 fosse primo, a soma de seus divisores seria $1 + 22021 = 22022$. Logo, sendo 22021 e $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$ primos entre si, $\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021}$ seria igual a

$$\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} \cdot \frac{22022}{22021} = \frac{22021}{11011} \cdot \frac{22022}{22021} = 2,$$

e teríamos $\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021) = 2(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021)$, ou seja, $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021$ seria perfeito.

PROBLEMA 4

a) Observe que podemos pegar as 8 possibilidades de $n = 4$ e colocar 5 no final

(1,2,3,4,5), (2,1,3,4,5), (2,3,1,4,5), (3,2,1,4,5), (2,3,4,1,5), (3,2,4,1,5), (3,4,2,1,5) e (4,3,2,1,5)

Uma forma de listar as outras 8 sequências podemos trocar cada número por seu simétrico de 1 até 5, ou seja, trocar x por $6 - x$.

(5,4,3,2,1), (4,5,3,2,1), (4,3,5,2,1), (3,4,5,2,1), (4,3,2,5,1), (3,4,2,5,1), (3,2,4,5,1) e (2,3,4,5,1)

Podemos ver que a propriedade descrita no enunciado é mantida.

b) O número que sobrou só pode ser 1 ou n, pois se for qualquer outro número na última posição os outros $n - 1$ números incluem 1 e n e para aparecerem esses números num bloco de números consecutivos seria necessário pelo menos n números.

c) Seja B_n o número de permutações bacanas de tamanho n e B_{n-1} o número de permutações bacanas de tamanho $n - 1$. Entre as permutações bacanas de tamanho n separemos as que terminam em n e as que terminam em 1.

Para cada uma que termina em n se removermos o n ficamos com uma permutação bacana de tamanho $n - 1$. Por exemplo, a sequência $(3,4,2,1,5)$ estaria associada à sequência $(3,4,2,1)$. Vale também que para cada permutação bacana de tamanho $n - 1$ se adicionarmos n no final temos uma permutação bacana de tamanho n. Portanto, há B_{n-1} permutações bacanas de tamanho n terminadas em n.

Para cada uma que termina em 1, podemos apagar o 1 (ficando com números de 2 até n) e subtrair 1 de cada um dos outros números (ficando com números de 1 até $n-1$) para obter uma sequência bacana de tamanho $n-1$. Por exemplo, a sequência (3,2,4,5,1) passaria a (3,2,4,5) apagando o 1 e (2,1,3,4) subtraindo 1 de cada termo. Vale também que podemos fazer o processo contrário e podemos concluir que também nesse caso há B_{n-1} permutações bacanas de tamanho n terminadas em 1.

Portanto, $B_n = B_{n-1} + B_{n-1} = 2B_{n-1}$.

Considerando que para $n = 1$ temos $2^0 = 1$ sequência bacana e que a cada passo multiplicamos por 2 podemos concluir que $B_n = 2^{n-1}$. Existem 2^{n-1} sequências bacanas de tamanho n.

PROBLEMA 5

a) Temos $A^2 \geq 0$ para todo A real, com igualdade se, e somente se, $A = 0$. Assim, $(x+r)^2 + (x+s)^2 \geq 0$. Como a igualdade só ocorre se $x + r = x + s = 0 \Longrightarrow r = s$, e $r \neq s$, $(x+r)^2 + (x+s)^2$ é sempre positivo, ou seja, nunca é igual a zero. Portanto a quantidade de soluções da equação dada é zero.

b) A equação é equivalente a $x^2 + 2rx + r^2 + x^2 + 2sx + s^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2(r+s)x + r^2 + s^2 = 0$. Tal equação não tem soluções, e portanto tem discriminante negativo, ou seja,

$$\Delta = \left(2(r+s)\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (r^2 + s^2) < 0 \Leftrightarrow (r+s)^2 - 2r^2 - 2s^2 < 0 \Leftrightarrow r^2 + 2rs + s^2 - 2r^2 - 2s^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{r^2 + s^2}{2} < rs.$$

c) Temos $(x + a_i)^2 = x^2 + 2a_i x + a_i^2$, de modo que

$$a = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{10 \text{ uns}} = 10,\ b = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_{10} \text{ e } c = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{10}^2.$$

d) Sendo o primeiro membro da equação uma soma de quadrados, ela só é igual a zero caso $x + a_i = 0 \Leftrightarrow x = -a_i$ para todo $i = 1,2,\ldots,10$. Assim, a quantidade de soluções da equação é no máximo 1, o que equivale a $\Delta \leq 0$. Assim,

$$\Delta = (2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_{10})^2 - 4 \cdot 10 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{10}^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})^2 - 4 \cdot 10 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{10}^2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{10}^2}{10} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}}{10}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{10}^2}{10}} \geq \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}}{10}\right| \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}}{10}.$$

XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (10 de agosto de 2019)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Soluções

PROBLEMA 1

a) A medida do lado menor do disquete em cm é $3{,}5 \cdot 2{,}54 = 8{,}89$ cm.

b) Como $\frac{38{,}32 \cdot 1000}{1{,}44} = 26611{,}1 \ldots$, a quantidade de disquetes necessária para armazenar o arquivo do FIFA 19 é 26612.

c) A área total dos disquetes é $26612 \cdot 8{,}89 \cdot 9{,}3$ cm^2, e a área da sala de aula é $500 \cdot 600$ cm^2. Assim, os disquetes correspondem à área de $\frac{26612 \cdot 8{,}89 \cdot 9{,}3}{500 \cdot 600} \cong 7{,}26$ salas de aula.

PROBLEMA 2

a) Pelo Teorema de Pitágoras, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{4}{4}} \Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}$, pois AD é real não negativo.

b) Usando que tangente é cateto oposto sobre cateto adjacente temos

$$\operatorname{tg} A\hat{B}D = \frac{AD}{BD} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

Veja que $DC = AC - AD = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$. Agora podemos calcular as outras tangentes:

$$\operatorname{tg} C\hat{B}D = \frac{DC}{BD} = \frac{1/\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi}$$

$$\operatorname{tg} D\hat{C}B = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{1/\varphi} = \varphi$$

c) Usando as tangentes desenvolvidas no item anterior e que $D\hat{C}B = A\hat{B}C$, pois o triângulo ABC é isósceles com $AB = AC$, temos

$$\operatorname{arctg} \varphi - \operatorname{arctg} \frac{1}{\varphi} = D\hat{C}B - C\hat{B}D = A\hat{B}C - C\hat{B}D = A\hat{B}D = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Este item também poderia ser resolvido algebricamente:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \varphi - \operatorname{arctg} \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \varphi) - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\varphi}\right)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \varphi)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\varphi}\right)} = \frac{\varphi - \frac{1}{\varphi}}{1 + \varphi \cdot \frac{1}{\varphi}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como $\varphi > \frac{1}{\varphi}$, $0 < \operatorname{arctg} \varphi - \operatorname{arctg} \frac{1}{\varphi} < \frac{\pi}{2}$, de modo que

$$\operatorname{arctg} \varphi - \operatorname{arctg} \frac{1}{\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 3

a) Para $n = 2^k$ temos

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1 + 2^1 + \cdots + 2^k}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} = \frac{2 \cdot 2^k - 1}{2^k}$$

E podemos concluir que 2^k é perfeito deficiente com $x = 2^k$.

b) Usando a fórmula

$$\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{(1+3+3^2)(1+7+7^2)(1+11+11^2)(1+13+13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{13 \cdot 57 \cdot 133 \cdot 183}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2}$$

Veja que $57 = 3 \cdot 19$, $133 = 7 \cdot 19$ e $183 = 3 \cdot 61$.

$$\Rightarrow \frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{19 \cdot 19 \cdot 61}{7 \cdot 11^2 \cdot 13} = \frac{22021}{11011}$$

Resolvendo a equação $\frac{2x-1}{x} = \frac{22021}{11011} \Leftrightarrow x = 11011$.

c) Se 22021 fosse primo, então

$$\frac{\sigma(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021} = \frac{(1+3+3^2)(1+7+7^2)(1+11+11^2)(1+13+13^2)(1+22021)}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 22021} = \frac{22021 \cdot 22022}{11011 \cdot 22021} = 2$$

d) Se n é ímpar então todos os seus divisores são ímpares. A soma de k números ímpares é ímpar se, e somente se, k é ímpar. Portanto, para n ímpar, $\sigma(n)$ é ímpar se, e somente se, o número de divisores somados é ímpar.

Os divisores d de um número n diferentes de $\sqrt{n}$ podem organizados em pares de produto n, cada número d é colocado junto com o $\frac{n}{d}$. Dessa forma, a quantidade de divisores diferentes de $\sqrt{n}$ é par. Logo n é quadrado perfeito quando $\sqrt{n}$ é inteiro e conta mais divisor implicando que o número de divisores é ímpar. Veja que $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{2x-1}{x} \Leftrightarrow \sigma(n)x = n(2x-1)$ e para n ímpar, temos $n(2x-1)$ ímpar e $\sigma(n)$ é ímpar, pois é divisor de um número ímpar.

PROBLEMA 4

a) O conjunto $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}$ é a interseção dos conjuntos das funções que não contêm $i_1, i_2, \dots, i_\ell$ em suas imagens, ou seja, é o conjunto das funções que não contêm esses números em suas imagens. Assim, para cada $i = 1,2,\dots,n$, $f(i)$ pode ser qualquer um dos números $1,2,\dots,k$, exceto $i_1, i_2, \dots, i_\ell$, num total de $k-\ell$ possibilidades. Desta forma, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de funções em $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}$ é $n\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}\right) = (k-\ell)^n$.

b) O conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ consiste nas funções que não contêm 1 na imagem ou não contêm 2 na imagem ou … ou não contêm k na imagem, ou seja, são as funções que não contêm algum dos números $1,2,\dots,k$ na sua imagem. Em outras palavras, são as funções que não são sobrejetoras.

Como o total de funções, sobrejetoras ou não, é k^n (cada $f(i)$ pode ser qualquer um dos k valores $1,2,\dots,k$), a quantidade de funções sobrejetoras é $k^n - n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$.

c) Utilizando o princípio da inclusão-exclusão, e considerando que nesse caso $n(A_i) = (3-1)^6 = 2^6 = 64$, $n\left(A_i \cap A_j\right) = (3-2)^6 = 1$ para $1 \le i < j \le 3$ e $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = (3-3)^6 = 0$, a quantidade pedida é

$$\begin{aligned} 3^6 - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 3^6 - \big(n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\big) \\ &= 729 - 3 \cdot 64 + 3 \cdot 1 - 0 = 540. \end{aligned}$$

O problema também pode ser resolvido de outras maneiras. Por exemplo, podemos contar diretamente as funções para os quais $f(k) = 1$ para a valores de k, $f(k) = 2$ para b valores de k e $f(k) = 3$ para c valores de k, $a+b+c = 6$, a,b,c inteiros positivos e permutar a, b e c:

a	*b*	*c*	*Permutações de a, b e c*	*Total de funções (anagramas com a uns, b dois e c três)*	*Total do caso*
4	1	1	$\frac{3!}{1!\,2!} = 3$	$\frac{6!}{4!\,1!\,1!} = 30$	$3 \cdot 30 = 90$
3	2	1	$3! = 6$	$\frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$	$6 \cdot 60 = 360$
2	2	2	1	$\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$	$1 \cdot 90 = 90$

No total temos $90 + 360 + 90 = 540$ funções sobrejetoras.

d) Para $k = n$, a única maneira de a imagem de $f: \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ ser $\{1,2,\dots,n\}$ é fazer com que $\big(f(1), f(2), \dots, f(n)\big)$ seja uma permutação de $(1,2,\dots,n)$. Assim, há $n!$ funções sobrejetoras de $\{1,2,\dots,n\}$ em $\{1,2,\dots,n\}$. Por outro lado, a interseção de i conjuntos A_m tem $(n-i)^n$ elementos, e há $\binom{n}{i}$ escolhas para os i índices m. Assim, pelo resultado do item b e pelo princípio da inclusão-exclusão, o total de funções sobrejetoras é

$$\begin{aligned} n! = n^n - n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= n^n - \left(\binom{n}{1}(n-1)^n - \binom{n}{2}(n-2)^n + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)^n\right) \\ &= \binom{n}{0}(n-0)^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n + \cdots - (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^n, \end{aligned}$$

pois $(-1)^0 = 1$ e $-(-1)^{n+1} = -(-1)^n \cdot (-1) = (-1)^n$.

PROBLEMA 5

a) O expoente $\alpha = v_p\big(L(n)\big)$ em $L(n) = \mathrm{mmc}(1,2,\dots,n)$ é igual ao máximo dos expoentes $v_p(1), v_p(2), \dots, v_p(n)$; se $p^\beta \le n < p^{\beta+1}$ então $v_p(i) \le \beta$ para $i \in \{1,2,\dots,n\}$, e $\beta = \lfloor \log_p n \rfloor$ e portanto $\alpha = \beta = \lfloor \log_p n \rfloor$.

b) Pelo item a,

$$L(n) = \prod_{p \le n} p^{v_p(L(n))} \Leftrightarrow \ln L(n) = \sum_{p \le n} \ln p^{v_p(L(n))} \Leftrightarrow \ln L(n) = \sum_{p \le n} \ln p \cdot \lfloor \log_p n \rfloor \Leftrightarrow \ln L(n) = \sum_{p \le n} \ln p \cdot \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor.$$

c) Pelo item b,

$$\ln L(n) = \sum_{p \le n} \ln p \cdot \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor \le \sum_{p \le n} \ln p \cdot \frac{\ln n}{\ln p} = \sum_{p \le n} \ln n.$$

As parcelas da soma $\sum_{p \le n} \ln n$ não depende de p e são em total de $\pi(n)$ termos, logo $\sum_{p \le n} \ln n = \pi(n) \cdot \ln n$, e temos

$$\ln L(n) \le \pi(n) \cdot \ln n.$$

d) Temos

$$\pi(n) = \sum_{p \le n} 1 = \sum_{1 \le p \le y} 1 + \sum_{y < p \le n} 1 = \pi(y) + \sum_{y < p \le n} 1.$$

Há menos de y primos entre 1 e y, e $1 \le \log_y p$ para $p > y$, logo

$$\pi(n) < y + \sum_{y < p \le n} \log_y p = y + \frac{\sum_{y < p \le n} \ln p}{\ln y} \le y + \frac{\sum_{p \le n} \ln p}{\ln y} = y + \frac{\theta(n)}{\ln y}.$$

e) Primeiro note que cada primo menor do que n aparece na fatoração de $L(n)$, logo

$$\theta(n) = \sum_{p \le n} \ln p = \ln \prod_{p \le n} p \le \ln L(n)$$

Fazendo $y = \frac{n}{(\ln n)^2}$ no resultado do item d,

$$\pi(n) \le \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{\theta(n)}{\ln\left(\frac{n}{(ln\, n)^2}\right)} \Leftrightarrow \pi(n) \cdot \ln n \le \frac{n}{\ln n} + \frac{\theta(n) \ln n}{\ln n - \ln(\ln n)^2} = \frac{n}{\ln n} + \frac{\theta(n)}{1 - \frac{2 \ln \ln n}{\ln n}}.$$

Nota matemática extra (não necessária na solução): tecnicamente, supondo que os limites existam obtemos

$$\frac{\theta(n)}{n} \le \frac{\ln L(n)}{n} \le \frac{\pi(n) \ln n}{n} \le \frac{1}{\ln n} + \frac{\theta(n)}{n\left(1 - \frac{2 \ln \ln n}{\ln n}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\theta(n)}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\ln L(n)}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n) \ln n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} + \frac{\theta(n)}{n\left(1 - \frac{2 \ln \ln n}{\ln n}\right)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ *e* $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2 \ln \ln n}{\ln n}\right) = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(n)}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\ln L(n)}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n) \ln n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\theta(n)}{n},$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln L(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n) \ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta(n)}{n},$$