XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (11 de agosto de 2018)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Soluções

PROBLEMA 1

a) O dia possui 24 horas, que equivalem a 360 graus NET. Logo 1 hora equivale a $\frac{360}{24} = 15$ graus NET. Temos, assim, que $8{:}00$ é $8 \times 15 = 120$ graus NET. Já para $11{:}30$, perceba que seriam 11,5 horas (onze e meia) e, portanto, seria $11{,}5 \times 15 = 172{,}5$ graus NET.

b) Veja que podemos usar graus NET como a unidade graus de ângulos, pois as duas dividem a volta em 360 partes iguais.

Solução 1

Veja que de $00{:}01$ a $01{:}00$ o ponteiro dos minutos não cruza o ponteiro NET, pois ele já está à frente e é mais rápido.
Entre $01{:}00$ e $02{:}00$ o ponteiro NET vai de 15 até 30 e o dos minutos dá uma volta cruzando uma vez o ponteiro NET. Também há um cruzamento de $02{:}00$ até $03{:}00$, de $03{:}00$ até $04{:}00$ e assim por diante até $22{:}00$ às $23{:}00$. Nesse tempo, temos 22 cruzamentos.
Entre $23{:}00$ e $23{:}59$ não há cruzamento. O ponteiro dos minutos vai de $0°$ até $\frac{59}{60} \times 360° = 354°$ e o ponteiro NET vai de $23 \times 15 = 345$ graus NET até $345 + \frac{59}{60} \times 15 = 359{,}75$ graus NET. Isso significa que o ponteiro NET começa na frente às $23{:}00$ e ainda estará na frente às $23{:}59$ e, portanto, não houve ultrapassagem.

Solução 2

A velocidade do ponteiro dos minutos é $v_1 = \frac{360°}{1h} = 360°/h$ e do ponteiro NET é $v_2 = \frac{360°}{24h} = 15°/h$ haverá cruzamento nos momentos t em horas tais que

$$v_1 \cdot t = v_2 \cdot t + 360° \cdot k \Leftrightarrow 345° \cdot t = 360° \cdot k \Leftrightarrow t = \frac{24}{23} \cdot k$$

para algum inteiro não negativo k que mostra voltas completas do ponteiro dos minutos em relação ao ponteiro NET.

Para $k = 0$ temos $t = 0$ que seria $00{:}00$ que não deve ser contada.
Para $k = 1,2,\dots,22$ temos 22 momentos t entre $00{:}01$ e $23{:}59$ com cruzamentos.
Para $k = 23$ temos $t = 24$ que seria $24{:}00$ (ou $00{:}00$ do dia seguinte) que não deve ser contada.

Portanto são 22 cruzamentos.

Solução 3

Às 00:00 ambos os ponteiros estão na mesma posição. No período entre 00:00 e 24:00, o ponteiro dos minutos dá 24 voltas e o ponteiro NET, uma. Por isso, o ponteiro dos minutos ultrapassa o ponteiro NET 23 vezes, sendo a última às 24:00, que não conta. Assim há 22 cruzamentos.

Item a: 1,2 ponto
Perceber que 1 hora equivale a $\frac{360}{24} = 15$ graus NET....................0,4 ponto
Escrever que $8{:}00$ é $8 \times 15 = 120$ graus NET .... +0,4 ponto
Escrever que $11{:}30$ seriam 11,5 horas (onze e meia) e que $11{,}5 \times 15 = 172{,}5$ graus NET .... +0,4 ponto

Item b: 0,8 ponto
Perceber que o ponteiro dos minutos ultrapassa o ponteiro NET 23 vezes.....................0,4 ponto
Concluir que há 22 cruzamentos....................+0,4 ponto

PROBLEMA 2

a) A média é

$$\frac{0{,}93+0{,}54+0{,}91+0{,}95+0{,}75+0{,}27+0{,}99+0{,}97+1{,}31+0{,}00}{10} = \frac{7{,}62}{10} = 0{,}762 \text{ dólares.}$$

Logo, o preço do óleo diesel no Brasil está $0{,}91 - 0{,}762 = 0{,}148$ dólares acima da média.

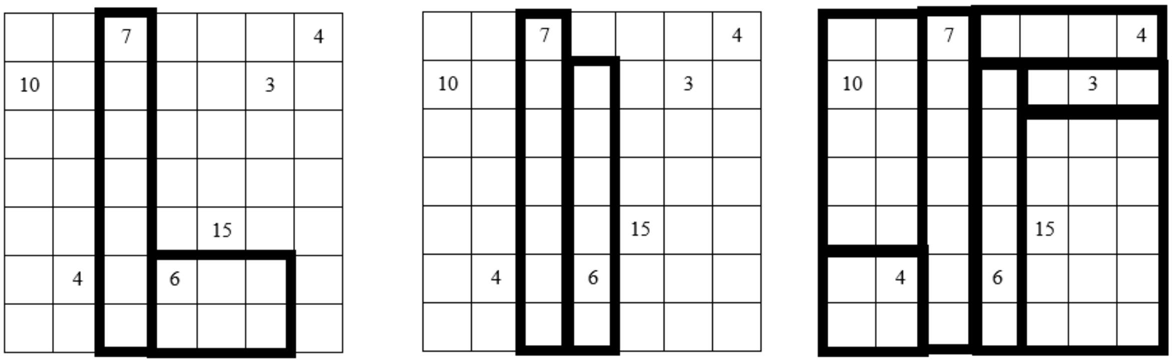
b) No Brasil serão $\frac{1500}{14{,}5}$ litros de óleo diesel resultando num gasto de $\frac{1500}{14{,}5} \times 0{,}91 = 94{,}14$ dólares. Analogamente, o gasto no Uruguai será $\frac{560}{14{,}5} \times 1{,}31 = 50{,}59$ dólares e na Argentina $\frac{30}{14{,}5} \times 0{,}93 = 1{,}92$ dólares.

Item a: 0,8 ponto
Calcular corretamente a média e chegar em 0,762 dólares ....0,5 ponto
Concluir que o preço no Brasil está acima da média ....+0,3 ponto

Item b: 1,2 ponto
Calcular que no Brasil serão gastos $\frac{1500}{14,5} \times 0,91 = 94,14$ dólares..0,4 ponto
Calcular que no Uruguai serão gastos $\frac{560}{14,5} \times 1,31 = 50,59$ dólares ....+0,4 ponto
Calcular que na Argentina serão gastos $\frac{30}{14,5} \times 0,93 = 1,92$ dólares..+0,4 ponto
Para erros em contas, penalizar 0,1 por país ....até -0,3 ponto

PROBLEMA 3

a) Só há duas formas de um retângulo ter 7 quadradinhos 1×7 ou 7×1. Veja que o 1×7 (horizontal) não cabe então temos que usar um 7×1 (vertical). Após isso só há duas formas de cobrir o 6 e a casinha imediatamente abaixo dela com um retângulo 2×3 ou um 6×1 mostradas nas duas primeiras figuras a seguir.



No primeiro caso é impossível cobrir o canto inferior direito então não é possível prosseguir.
No segundo caso temos que usar o 1×4 para cobrir a casa ao lado do 7. Feito isso, só existe uma forma de completar o tabuleiro usando 5×2, 2×2, 1×3 e 5×3 para cobrir 10, 4, 3 e 15, respectivamente, como mostrado na terceira figura acima.

b) Suponha que seja possível. Para cobrir 42 temos que usar $m \times n$ com $m, n \leq 10$ e $m \cdot n = 42$. Só é possível com 6×7 ou 7×6. Usando a mesma ideia, para o 36 temos três formas possíveis 6×6, 4×9 ou 9×4 e para 14 temos duas possibilidades 2×7 ou 7×2.
Diremos que uma coluna (ou linha) cruzam um retângulo quando existem quadradinhos dessa coluna dentro desse retângulo. Veja que se a colunas cruzam um retângulo, b colunas cruzam outro retângulo e $a + b > 10$ (que é o total de colunas diferentes disponíveis) então pelo menos uma coluna é contada duas vezes e cruza os dois retângulos.

Faremos casos em relação ao 36.
i) Se usarmos 6×6.
Se o retângulo do 42 for o 6×7, então $6 + 6 = 12 > 10$ e uma linha cruza os retângulos 36 e 42 e $6 + 7 = 13 > 10$ e uma coluna também cruza os dois retângulos. Isso gera uma contradição, pois o quadradinho no encontro dessa linha e dessa coluna está coberto pelos dois retângulos. O mesmo problema acontece se usarmos o 7×6 para o 42. Portanto, não é possível cobrir o tabuleiro usando o 6×6.

ii) Se usarmos o 4×9.
Se o retângulo do 42 for 7×6 teremos $4 + 7 = 11 > 10$ nas linhas e $9 + 6 = 16 > 10$ nas colunas. E haverá uma linha e uma coluna cruzando os dois retângulos e seu encontro está nos dois retângulos. Portanto, o retângulo do 42 é 6×7.
Se o retângulo do 14 for 7×2 teremos $4 + 7 = 11 > 10$ nas linhas e $9 + 2 = 11 > 10$ nas colunas. Novamente, algum quadradinho seria coberto pelos dois retângulos. Logo, o retângulo do 14 é 2×7.
Veja que há 4 linhas cruzando o retângulo 36, 6 linhas cruzando o retângulo 42 e 2 linhas cruzando o retângulo 14. Como $4 + 6 + 2 = 12 > 10$ então alguma linha está cortando dois ou mais desses retângulos.
ii.1) Se uma linha cruza os retângulos 36 e 42
Então nas colunas $9 + 7 = 16 > 10$ uma coluna também cruza esses retângulos e temos problema no quadradinho de encontro dessa linha e dessa coluna sendo coberto pelos dois retângulos.
ii.2) Se uma linha cruza os retângulos 36 e 14
Temos $9 + 7 = 16 > 10$ e temos o mesmo problema do caso anterior.
ii.3) Se uma linha cruza os retângulos 14 e 42
Temos $7 + 7 = 14 > 10$ e temos o mesmo problema dos dois casos anteriores.

Dessa forma, sempre haverá um quadradinho que teria que ser coberto por dois retângulos, o que torna impossível resolver o quebra-cabeça.

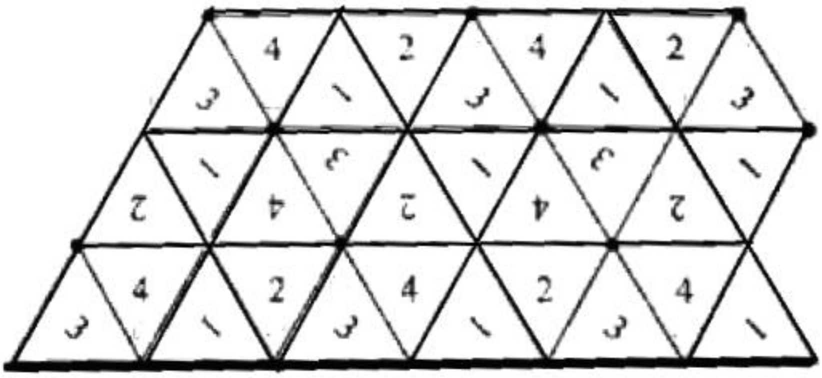
Item a: 0,6 ponto
Percebeu que só há duas formas de um retângulo ter 7 quadradinhos 1×7 ou 7×1. ....0,2 ponto
Percebeu que só há duas formas de cobrir o 6 e a casinha imediatamente abaixo dela com um retângulo 2×3 ou 6×1 .. +0,2 ponto
Concluiu que só existe uma forma de completar o tabuleiro, conforme mostrado .... +0,2 ponto

Item b: 1,4 ponto
Verificou que só é possível 42 com 6×7 ou 7×6, para o 36, só com 6×6, 4×9 ou 9×4 e para 14, só 2×7 ou 7×2. 0,4 ponto
Analisando casos em relação ao 36:
Verificou que não é possível cobrir o tabuleiro usando inicialmente o 6×6..........+0,4 ponto
Verificou que não é possível cobrir o tabuleiro usando inicialmente o 9×4..........+0,4 ponto
Concluiu que é impossível resolver quebra-cabeça ....+0,2 ponto
A distribuição da pontuação é equivalente para soluções análogas usando os outros casos.

PROBLEMA 4
a) Na região R será carimbolado o número 1 e na região S será carimbolado o 4.

b) Na região T será carimbolado o número 4, na região U será carimbolado o 2 e na região S será carimbolado o número $7 - 4 = 3$ que está na face oposta ao número 4.
Como a região S foi carimbolada de maneiras diferentes nos itens a e b podemos concluir que o cubo não é um carimbolão perfeito.

c) Realizando os tombamentos conforme foi descrito chegamos na seguinte configuração do plano



Então carimbolamos na região X o número 4, na Y o número 3 e na Z o número 1.

Item a: 0,4 ponto
Apresentou que na região R será carimbolado o número 1 . ...0,2 ponto
Apresentou que e na região S será carimbolado o 4 .... +0,2 ponto

Item b: 1,0 ponto
Apresentou que na região T será carimbolado o número 4..........0,2 ponto
Apresentou que na região U será carimbolado o 2 ....+0,2 ponto
Apresentou que na região S será carimbolado o número $7 - 4 = 3$, que está na face oposta ao número 4..........+0,3 ponto
Concluiu que o cubo não é um carimbolão perfeito..........+0,3 ponto

Item c: 0,6 ponto
Apresentou que na região X será carimbolado o número 4.. ....0,2 ponto
Apresentou que na região Y será carimbolado o 3 .... +0,2 ponto
Apresentou que na região Z será carimbolado o 1 ....+0,2 ponto

PROBLEMA 5
a) A fatoração de 153 é $3^2 \cdot 17$. Usando a fatoração $C = A - 3K = (N - 150K) - 3K = N - 153K = N - 17 \cdot (3^2K)$. Então se N é divisível por 17 temos $N = 17q \Rightarrow C = 17(q - 9K)$. Usando a mesma ideia se C é divisível por 17 então N também é.

b) Fazemos $E = D - K = A - 5K = N - 155K$. A fatoração de 155 é $5 \cdot 31$ e podemos determinar se N possui o fator 31. Veja que o 5 já foi testado no A.
Fazemos $F = E - K = A - 6K = N - 156K$. Como $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ sabemos que N possui o fator 13 se, e somente se, F tem o fator 13.

c) Veja que $3689 = 150 \cdot 24 + 89$ e, portanto, $K = 24$ e $A = 89$.
Como 2, 3 e 5 não são fatores de 89, então também não são de 3689.

- $B = A - 2K = 41$ não é divisível por 19 e 3689 não é.
- $C = B - K = 17$ é divisível por 17. Assim, 3689 é divisível por 17.
- $D = C - K = -7$ é divisível por 7. Logo, 3689 é divisível por 7.
- $E = D - K = -31$ é divisível por 31. Logo, 3689 é divisível por 31.

Nesse ponto, veja que $3689 = 7 \cdot 17 \cdot 31$ e a fatoração já está concluída.
O último passo seria

- $F = E - K = -55$ não é divisível por 13 e 3689 também não é.

d) Veja que $300 = 13 \cdot 23 + 1$ e temos no $299 = 13 \cdot 23$ um múltiplo de 23 próximo de 300.
Para testar se um número N é múltiplo de 23 podemos fazer a divisão por 300

$$N = 300K + A = 299K + K + A = 23 \cdot (13K) + A + K$$

Então N é divisível por 23 se, e somente se, $A + K$ é divisível por 23.

Item a: 0,3 ponto
Apresentou que a fatoração de 153 é $3^2 \cdot 17$ . ...0,1 ponto
Justificou que N é divisível por 17 se, e somente se, C é divisível por 17.. +0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto
Definiu $E = D - K = A - 5K = N - 155K$ ....0,1 ponto
A partir da fatoração de 155 é $5 \cdot 31$, julgou possível determinar se N possui o fator 31 ....+0,2 ponto
Definiu $F = E - K = A - 6K = N - 156K$ ....+0,1 ponto
A partir de $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, julgou que N possui o fator 13 se, e somente se, F tem o fator 13. ....+0,2 ponto

Item c: 0,7 ponto
Escreveu $3689 = 150 \cdot 24 + 89$ e, portanto, $K = 24$ e $A = 89$ ....0,1 ponto
Verificou que 2, 3 e 5 não são fatores de 89, portanto também não são de 3689.. +0,1 ponto
A partir de $B = A - 2K = 41$ não ser divisível por 19, concluiu que 3689 também não é divisível por 19 ....+0,1 ponto
A partir de $C = B - K = 17$, que é divisível por 17, concluiu que 3689 é divisível por 17 ....+0,1 ponto
A partir de $D = C - K = -7$, que é divisível por 7, concluiu que 3689 é divisível por 7..+0,1 ponto
A partir de $E = D - K = -31$, que é divisível por 31, concluiu que 3689 é divisível por 3 ....+0,1 ponto
Concluiu que a fatoração procurada é $3689 = 7 \cdot 17 \cdot 31$ ....+0,1 ponto

Item d: 0,4 ponto
Encontrou o número 299 ....0,4 ponto
As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores:
Encontrou o número 322 ....0,2 ponto
Encontrou qualquer outro número que não é 299 ou 322 ....0,0 ponto

XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (11 de agosto de 2018)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Soluções

PROBLEMA 1
a) A média é

$$\frac{0{,}93+0{,}54+0{,}91+0{,}95+0{,}75+0{,}27+0{,}99+0{,}97+1{,}31+0{,}00}{10}=\frac{7{,}62}{10}=0{,}762 \text{ dólares.}$$

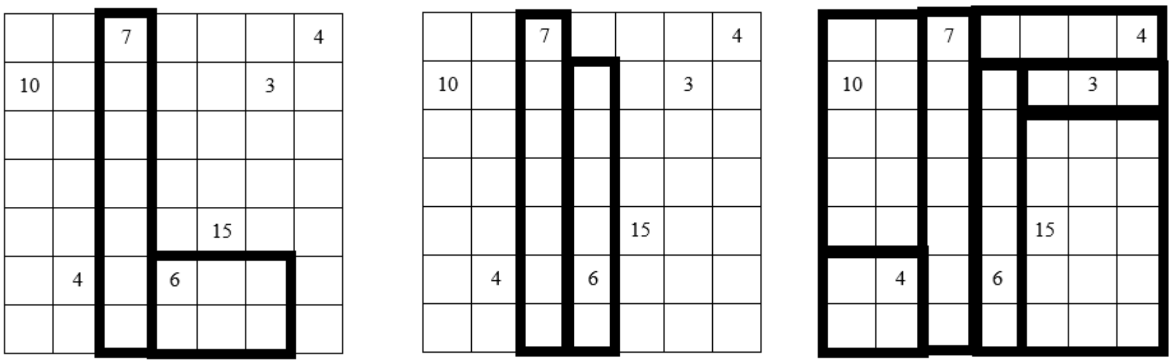
Logo, o preço do óleo diesel no Brasil está $0{,}91-0{,}762=0{,}148$ dólares acima da média.

b) No Brasil serão $\frac{1500}{14{,}5}$ litros de óleo diesel resultando num gasto de $\frac{1500}{14{,}5}\times 0{,}91=94{,}14$ dólares. Analogamente, o gasto no Uruguai será $\frac{560}{14{,}5}\times 1{,}31=50{,}59$ dólares e na Argentina $\frac{30}{14{,}5}\times 0{,}93=1{,}92$ dólares.
O gasto total dessa viagem é, portanto, $94{,}14+50{,}59+1{,}92=146{,}65$ dólares.

Item a: 0,6 ponto
Calcular corretamente a média e chegar em $0{,}762$ dólares ....0,3 ponto
Concluir que o preço no Brasil está acima da média ....+0,3 ponto

Item b: 1,4 ponto
Calcular que no Brasil serão gastos $\frac{1500}{14{,}5}\times 0{,}91=94{,}14$ dólares..0,4 ponto
Calcular que no Uruguai serão gastos $\frac{560}{14{,}5}\times 1{,}31=50{,}59$ dólares ....+0,4 ponto
Calcular que na Argentina serão gastos $\frac{30}{14{,}5}\times 0{,}93=1{,}92$ dólares..+0,4 ponto
Concluiu que o gasto total dessa viagem é $146{,}65$ dólares ....+0,2 ponto
Para erros em contas, penalizar 0,1 por país ....até -0,3 ponto

PROBLEMA 2
a) Só há duas formas de um retângulo ter 7 quadradinhos 1×7 ou 7×1. Veja que o 1×7 (horizontal) não cabe então temos que usar um 7×1 (vertical). Após isso só há duas formas de cobrir o 6 e a casinha imediatamente abaixo dela com um retângulo 2×3 ou um 6×1 mostradas nas duas primeiras figuras a seguir.



No primeiro caso é impossível cobrir o canto inferior direito então não é possível prosseguir.
No segundo caso temos que usar o 1×4 para cobrir a casa ao lado do 7. Feito isso, só existe uma forma de completar o tabuleiro usando 5×2, 2×2, 1×3 e 5×3 para cobrir 10, 4, 3 e 15, respectivamente, como mostrado na terceira figura acima.

b) Suponha que seja possível. Para cobrir 42 temos que usar $m\times n$ com $m,n\leq 10$ e $m\cdot n=42$. Só é possível com 6×7 ou 7×6. Usando a mesma ideia, para o 36 temos três formas possíveis 6×6, 4×9 ou 9×4 e para 14 temos duas possibilidades 2×7 ou 7×2.
Diremos que uma coluna (ou linha) cruzam um retângulo quando existem quadradinhos dessa coluna dentro desse retângulo. Veja que se a colunas cruzam um retângulo, b colunas cruzam outro retângulo e $a+b>10$ (que é o total de colunas diferentes disponíveis) então pelo menos uma coluna é contada duas vezes e cruza os dois retângulos.

Faremos casos em relação ao 36.
i) Se usarmos 6×6.
Se o retângulo do 42 for o 6×7, então $6+6=12>10$ e uma linha cruza os retângulos 36 e 42 e $6+7=13>10$ e uma coluna também cruza os dois retângulos. Isso gera uma contradição, pois o quadradinho no encontro dessa linha e dessa coluna está coberto

pelos dois retângulos. O mesmo problema acontece se usarmos o 7×6 para o 42. Portanto, não é possível cobrir o tabuleiro usando o 6×6.

ii) Se usarmos o 4×9.
Se o retângulo do 42 for 7×6 teremos $4 + 7 = 11 > 10$ nas linhas e $9 + 6 = 16 > 10$ nas colunas. E haverá uma linha e uma coluna cruzando os dois retângulos e seu encontro está nos dois retângulos. Portanto, o retângulo do 42 é 6×7.
Se o retângulo do 14 for 7×2 teremos $4 + 7 = 11 > 10$ nas linhas e $9 + 2 = 11 > 10$ nas colunas. Novamente, algum quadradinho seria coberto pelos dois retângulos. Logo, o retângulo do 14 é 2×7.
Veja que há 4 linhas cruzando o retângulo 36, 6 linhas cruzando o retângulo 42 e 2 linhas cruzando o retângulo 14. Como $4 + 6 + 2 = 12 > 10$ então alguma linha está cortando dois ou mais desses retângulos.
ii.1) Se uma linha cruza os retângulos 36 e 42
Então nas colunas $9 + 7 = 16 > 10$ uma coluna também cruza esses retângulos e temos problema no quadradinho de encontro dessa linha e dessa coluna sendo coberto pelos dois retângulos.
ii.2) Se uma linha cruza os retângulos 36 e 14
Temos $9 + 7 = 16 > 10$ e temos o mesmo problema do caso anterior.
ii.3) Se uma linha cruza os retângulos 14 e 42
Temos $7 + 7 = 14 > 10$ e temos o mesmo problema dos dois casos anteriores.

Dessa forma, sempre haverá um quadradinho que teria que ser coberto por dois retângulos, o que torna impossível resolver o quebra-cabeça.

Item a: 0,6 ponto
Percebeu que só há duas formas de um retângulo ter 7 quadradinhos 1×7 ou 7×1. ....0,2 ponto
Percebeu que só há duas formas de cobrir o 6 e a casinha imediatamente abaixo dela com um retângulo 2×3 ou 6×1 ... +0,2 ponto
Concluiu que só existe uma forma de completar o tabuleiro, conforme mostrado ....+0,2 ponto

Item b: 1,4 ponto
Verificou que só é possível 42 com 6×7 ou 7×6, para o 36, só com 6×6, 4×9 ou 9×4 e para 14, só 2×7 ou 7×2. 0,4 ponto
Analisando casos em relação ao 36:
Verificou que não é possível cobrir o tabuleiro usando inicialmente o 6×6..+0,4 ponto
Verificou que não é possível cobrir o tabuleiro usando inicialmente o 9×4..+0,4 ponto
Concluiu que é impossível resolver quebra-cabeça ....+0,2 ponto
A distribuição da pontuação é equivalente para soluções análogas usando os outros casos.

PROBLEMA 3
a) Usando a sugestão e desenvolvendo a expressão do lado esquerdo, temos
$$\begin{gathered} x\big(x + 3(k - x)\big)^2 + (k - x)\big(3x - (k - x)\big)^2 \\ = x(4x - 3k)^2 + (k - x)(4x - k)^2 \\ = x(16x^2 - 24xk + 9k^2) + (k - x)(16x^2 - 8xk + k^2) \\ = 16x^3 - 24x^2k + 9xk^2 + 16x^2k - 8xk^2 + k^3 - 16x^3 + 8x^2k - xk^2 \\ = (16 - 16)x^3 + (-24 + 16 + 8)x^2k + (9 - 8 - 1)xk^2 + k^3 \\ = k^3 \end{gathered}$$

b) Usaremos a identidade de Catalan com $x = 3^2$, $x = 2^2$ e $x = 1^2$
1) $x = 3^2$
$$\begin{gathered} 14^3 = 3^2\big(3^2 - 3(2^2 + 1^2)\big) + (2^2 + 1^2)\big(3 \cdot 3^2 - (2^2 + 1^2)\big)^2 \\ 14^3 = 3^2 \cdot 6^2 + (2^2 + 1^2) \cdot 22^2 \\ 14^3 = 18^2 + 44^2 + 22^2 \end{gathered}$$
e podemos colocar as parcelas na ordem decrescente
$$14^3 = 44^2 + 22^2 + 18^2$$
2) $x = 2^2$
$$\begin{gathered} 14^3 = 2^2\big(2^2 - 3(3^2 + 1^2)\big) + (3^2 + 1^2)\big(3 \cdot 2^2 - (3^2 + 1^2)\big) \\ 14^3 = 2^2 \cdot 26^2 + (3^2 + 1^2) \cdot 2^2 \\ 14^3 = 52^2 + 6^2 + 2^2 \end{gathered}$$
3) $x = 1^2$
$$\begin{gathered} 14^3 = 1^2\big(1^2 - 3(3^2 + 2^2)\big) + (3^2 + 2^2)\big(3 \cdot 1^2 - (3^2 + 2^2)\big) \\ 14^3 = 1^2 \cdot 38^2 + (3^2 + 2^2) \cdot 10^2 \\ 14^3 = 38^2 + 30^2 + 20^2 \end{gathered}$$

Outra de representar que também pode ser encontrada rapidamente a partir das informações do enunciado é
$$14^3 = 14^2(3^2 + 2^2 + 1^2) = 42^2 + 28^2 + 14^2$$

Além dessas 4 soluções existem outras 4 soluções:
$$14^3 = 38^2 + 34^2 + 12^2$$

$$14^3 = 38^2 + 36^2 + 2^2$$
$$14^3 = 46^2 + 22^2 + 12^2$$
$$14^3 = 50^2 + 12^2 + 10^2$$

Quaisquer 3 soluções dessas 8 soluções dadas pelo aluno são consideradas corretas.

Item a: 0,8 ponto
Realizou a substituição $x + y + z = k$ corretamente, obtendo o lado esquerdo apenas em termos de x e k ....0,3 ponto
Concluiu corretamente, conforme mostrado .... +0,5 ponto
Item b: 1,2 ponto
Para cada maneira distinta e correta de escrever 14^3 como soma de três quadrados...0,4 ponto

PROBLEMA 4

a) Seja Z' e W' os pés das perpendiculares de Z e W sobre a reta XY. Prove que se $Z' = W'$ então $ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$ (essa é a ida do teorema).

Pelo Teorema de Pitágoras, temos
$$ZX^2 = Z'X^2 + ZZ'^2$$
$$ZY^2 = Z'Y^2 + ZZ'^2$$
E subtraindo as equações
$$ZX^2 - ZY^2 = Z'X^2 - Z'Y^2$$
Usando a mesma ideia no W temos
$$WX^2 - WY^2 = W'X^2 - W'Y^2$$
Se $Z' = W'$ então das duas equações
$$ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$$

Não fazia parte do exercício, mas podemos provar a volta usando estas equações. Se $ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$ então
$$Z'X^2 - Z'Y^2 = W'X^2 - W'Y^2 \Leftrightarrow (Z'X + Z'Y)(Z'X - Z'Y) = (W'X + W'Y)(W'X - W'Y)$$
Aí analisamos os seguintes casos para provar que $Z' = W'$.

i) Se Z' e W' estão dentro do segmento XY. Temos $Z'X + Z'Y = XY = W'X + W'Y \Rightarrow Z'X - Z'Y = W'X - W'Y$. Com isso,
$$\begin{cases} Z'X + Z'Y = W'X + W'Y \\ Z'X - Z'Y = W'X - W'Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z'X = W'X \\ Z'Y = W'Y \end{cases} \Rightarrow Z' = W'$$

ii) Se Z' e W' são fora do segmento XY. Veja que eles devem estar do mesmo lado em relação ao segmento XY, pois caso contrário teríamos uma equação com um lado positivo e o outro negativo. Supondo que estão à esquerda de X temos $Z'X - Z'Y = -XY = W'X - W'Y$ e segue como o caso i.

iii) Se um deles está fora do segmento e o outro dentro. Suponha sem perda de generalidade que Z' está fora à esquerda de X e que W' está entre X e Y. Temos $Z'X - Z'Y = -XY$ e $W'X + W'Y = XY$ implicando
$$-(Z'X + Z'Y) = W'X - W'Y \Leftrightarrow W'Y = W'X + Z'X + Z'Y$$
mas isso é impossível, pois $W'Y < XY$ e $Z'Y > XY$. De fato, nesse caso não teria como $Z' = W'$ e esperávamos uma contradição.

b)

Solução 1

Os triângulos ABC e AED são semelhantes pelo caso L_pAL_p já que $\frac{DA}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{EA}{BA}$ e $\angle DAE = \angle CAB$. Como a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$ temos $\frac{DE}{CB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow DE = \frac{a}{2}$.

Solução 2

É conhecido que DE é base média de CB. Assim, $DE = \frac{a}{2}$ e os triângulos ABC e AED são semelhantes pelo caso $L_pL_pL_p$ já que a razão entre os pares de lados é $\frac{1}{2}$.

c) Pelo teorema auxiliar temos
$$BC^2 - BE^2 = DC^2 - DE^2 \Leftrightarrow a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4a^2 - c^2 = b^2 - a^2 \Leftrightarrow c^2 = 5a^2 - b^2 .$$

d) Juntando as informações do item c e do Teorema de Pitágoras no triângulo ABC
$$\begin{cases} c^2 = 5a^2 - b^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 = 3a^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a\sqrt{3} \\ b = a\sqrt{2} \end{cases}$$
Isso significar que as duas equações são satisfeitas se, e somente se, os lados (a, b, c) são proporcionais $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$. Concluímos que os triângulos retângulos com medianas perpendiculares são aqueles que possuem lados proporcionais a $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Item a: 0,5 ponto
Aplicou o Teorema de Pitágoras corretamente . ... 0,3 ponto
Concluiu corretamente, conforme mostrado .... +0,2 ponto

Item b: 0,5 ponto
Justificou a semelhança pelo caso L_pAL_p .... 0,3 ponto
Como a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$ temos $\frac{DE}{CB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow DE = \frac{a}{2}$ .... +0,2 ponto

Item c: 0,5 ponto
Aplicou o Teorema dado corretamente . ... 0,3 ponto
Concluiu corretamente, conforme mostrado .... +0,2 ponto

Item d: 0,5 ponto
Juntou as informações do item c e do Teorema de Pitágoras no triângulo ABC .... 0,3 ponto
Concluiu corretamente, conforme mostrado .... +0,2 ponto

A distribuição da pontuação é equivalente para outras soluções corretas.

PROBLEMA 5
a) A fatoração de 153 é $3^2 \cdot 17$. Usando a fatoração $C = A - 3K = (N - 150K) - 3K = N - 153K = N - 17 \cdot (3^2K)$. Então se N é divisível por 17 temos $N = 17q \Rightarrow C = 17(q - 9K)$. Usando a mesma ideia se C é divisível por 17 então N também é.

b) Fazemos $E = D - K = A - 5K = N - 155K$. A fatoração de 155 é $5 \cdot 31$ e podemos determinar se N possui o fator 31. Veja que o 5 já foi testado no A.
Fazemos $F = E - K = A - 6K = N - 156K$. Como $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ sabemos que N possui o fator 13 se, e somente se, F tem o fator 13.

c) Veja que $3689 = 150 \cdot 24 + 89$ e, portanto, $K = 24$ e $A = 89$.
Como 2, 3 e 5 não são fatores de 89, então também não são de 3689.

- $B = A - 2K = 41$ não é divisível por 19 e 3689 não é.
- $C = B - K = 17$ é divisível por 17. Assim, 3689 é divisível por 17.
- $D = C - K = -7$ é divisível por 7. Logo, 3689 é divisível por 7.
- $E = D - K = -31$ é divisível por 31. Logo, 3689 é divisível por 31.

Nesse ponto, veja que $3689 = 7 \cdot 17 \cdot 31$ e a fatoração já está concluída.
O último passo seria

- $F = E - K = -55$ não é divisível por 13 e 3689 também não é.

d) Primeiro listamos os primos menores que 70 e, em seguida, vemos os múltiplos deles que estão no intervalo entre 1950 e 2050.
$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61 \; e \; 67$$

Os primos maiores são mais complicados de resolver então começaremos com eles.
i) 67
$$2000 = 67 \cdot 29 + 57$$
O único múltiplo de 67 no intervalo é $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$.

ii) 61
$$2000 = 61 \cdot 32 + 48$$
Os únicos múltiplos de 61 no intervalo são $1952 = 2^5 \cdot 61$ e $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.

iii) 59
$$2000 = 59 \cdot 33 + 53$$
O único múltiplo de 59 no intervalo é $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$.

Agora vamos usar a dica da resolução. Veja que
$$37 \cdot 53 = (45 - 8)(45 + 8) = 45^2 - 8^2 = 1961$$
$$7^2 \cdot 41 = 49 \cdot 41 = (45 + 4)(45 - 4) = 45^2 - 4^2 = 2009$$
$$43 \cdot 47 = (45 - 2)(45 + 2) = 45^2 - 2^2 = 2021$$

Dessa forma, se usarmos os 6 números a seguir
$$2010, 2013, 2006, 1961, 2009 \; e \; 2021$$
Fica faltando apenas múltiplos dos primos
$$13, 17, 19, 23, 29 \; e \; 31$$

Voltamos aos casos acima a partir do 31

iv) 31

$$2000 = 31 \cdot 64 + 16$$

As possibilidades são $1953 = 31 \cdot 63$, $1984 = 31 \cdot 64$, $2015 = 31 \cdot 65 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ ou $2046 = 31 \cdot 66$. Usando o 2015 já cobrimos 13 e 31.

v) 29

$$2000 = 29 \cdot 68 + 28$$

As possibilidades são $1972 = 29 \cdot 68 = 2^2 \cdot 17 \cdot 29$, $2001 = 29 \cdot 69 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ ou $2030 = 29 \cdot 70$. Usando o 1972 já cobrimos 17 e 29.

Considerando os 8 números

$$2010, 2013, 2006, 1961, 2009, 2021, 2015\ e\ 1972$$

Falta cobrir apenas 19 e 23 e basta tomar múltiplos desses dois primos. Por exemplo, $1995 = 19 \cdot 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ e $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$.

Observação: vale ressaltar que essa solução não é única. Durante a correção qualquer exemplo com 10 números em que o aluno verifique que aparecem todos os fatores primos menores que 70 *deve ser aceito como correto.*
De fato, há soluções com 9 números. Um de muitos exemplos é 2001, 2006, 2009, 2010, 2013, 2014, 2015, 2021, 2035.
Não há soluções com 8 números ou menos.

Item a: 0,3 ponto
Apresentou que a fatoração de 153 é $3^2 \cdot 17$ . ...0,1 ponto
Justificou que N é divisível por 17 se, e somente se, C é divisível por 17.................... +0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto
Definiu $E = D - K = A - 5K = N - 155K$ ....0,1 ponto
A partir da fatoração de 155 é $5 \cdot 31$, julgou possível determinar se N possui o fator 31 ....+0,2 ponto
Definiu $F = E - K = A - 6K = N - 156K$ ....+0,1 ponto
A partir de $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, julgou que N possui o fator 13 se, e somente se, F tem o fator 13. ....+0,2 ponto

Item c: 0,7 ponto
Escreveu $3689 = 150 \cdot 24 + 89$ e, portanto, $K = 24$ e $A = 89$ ....0,1 ponto
Verificou que 2, 3 e 5 não são fatores de 89, portanto também não são de 3689.................... +0,1 ponto
A partir de $B = A - 2K = 41$ não ser divisível por 19, concluiu que 3689 também não é divisível por 19 ....+0,1 ponto
A partir de $C = B - K = 17$, que é divisível por 17, concluiu que 3689 é divisível por 17 ....+0,1 ponto
A partir de $D = C - K = -7$, que é divisível por 7, concluiu que 3689 é divisível por 7....................+0,1 ponto
A partir de $E = D - K = -31$, que é divisível por 31, concluiu que 3689 é divisível por 3 ....+0,1 ponto
Concluiu que a fatoração procurada é $3689 = 7 \cdot 17 \cdot 31$ ....+0,1 ponto

Item d: 0,4 ponto
Qualquer solução com 9 ou 10 números nas condições dadas e que contenham todos primos menores que 70 ....0,4 ponto

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores:
Encontrou um número usando a dica no enunciado ....0,1 ponto
Encontrou os múltiplos de 67, 61 e 59 no intervalo ....0,2 ponto

XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (11 de agosto de 2018)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Soluções

PROBLEMA 1
a) A fatoração de 153 é $3^2 \cdot 17$. Usando a fatoração $C = A - 3K = (N - 150K) - 3K = N - 153K = N - 17 \cdot (3^2K)$. Então se N é divisível por 17 temos $N = 17q \Rightarrow C = 17(q - 9K)$. Usando a mesma ideia se C é divisível por 17 então N também é.

b) Fazemos $E = D - K = A - 5K = N - 155K$. A fatoração de 155 é $5 \cdot 31$ e podemos determinar se N possui o fator 31. Veja que o 5 já foi testado no A.
Fazemos $F = E - K = A - 6K = N - 156K$. Como $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ sabemos que N possui o fator 13 se, e somente se, F tem o fator 13.

c) Veja que $3689 = 150 \cdot 24 + 89$ e, portanto, $K = 24$ e $A = 89$.
Como 2, 3 e 5 não são fatores de 89, então também não são de 3689.

- $B = A - 2K = 41$ não é divisível por 19 e 3689 não é.
- $C = B - K = 17$ é divisível por 17. Assim, 3689 é divisível por 17.
- $D = C - K = -7$ é divisível por 7. Logo, 3689 é divisível por 7.
- $E = D - K = -31$ é divisível por 31. Logo, 3689 é divisível por 31.

Nesse ponto, veja que $3689 = 7 \cdot 17 \cdot 31$ e a fatoração já está concluída.
O último passo seria

- $F = E - K = -55$ não é divisível por 13 e 3689 também não é.

d) O menor primo que o Método 150 de Conway não detecta é 23. Logo o menor número composto para o qual esse método não funciona é $23^2 = 529$.

Item a: 0,3 ponto
Apresentou que a fatoração de 153 é $3^2 \cdot 17$ . ... 0,1 ponto
Justificou que N é divisível por 17 se, e somente se, C é divisível por 17.. +0,2 ponto

Item b: 0,6 ponto
Definiu $E = D - K = A - 5K = N - 155K$ .... 0,1 ponto
A partir da fatoração de 155 é $5 \cdot 31$, julgou possível determinar se N possui o fator 31 .... +0,2 ponto
Definiu $F = E - K = A - 6K = N - 156K$ .... +0,1 ponto
A partir de $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, julgou que N possui o fator 13 se, e somente se, F tem o fator 13. .... +0,2 ponto

Item c: 0,7 ponto
Escreveu $3689 = 150 \cdot 24 + 89$ e, portanto, $K = 24$ e $A = 89$ .... 0,1 ponto
Verificou que 2, 3 e 5 não são fatores de 89, portanto também não são de 3689.. +0,1 ponto
A partir de $B = A - 2K = 41$ não ser divisível por 19, concluiu que 3689 também não é divisível por 19 .... +0,1 ponto
A partir de $C = B - K = 17$, que é divisível por 17, concluiu que 3689 é divisível por 17 .... +0,1 ponto
A partir de $D = C - K = -7$, que é divisível por 7, concluiu que 3689 é divisível por 7.. +0,1 ponto
A partir de $E = D - K = -31$, que é divisível por 31, concluiu que 3689 é divisível por 3 .... +0,1 ponto
Concluiu que a fatoração procurada é $3689 = 7 \cdot 17 \cdot 31$ .... +0,1 ponto

Item d: 0,4 ponto
Apresentou que 23 é o menor primo que o Método 150 de Conway não detecta. .... 0,2 ponto
Concluiu corretamente .... +0,2 ponto

PROBLEMA 2
a) Seja Z' e W' os pés das perpendiculares de Z e W sobre a reta XY. Prove que se $Z' = W'$ então $ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$ (essa é a ida do teorema).
Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$ZX^2 = Z'X^2 + ZZ'^2$$
$$ZY^2 = Z'Y^2 + ZZ'^2$$

E subtraindo as equações

$$ZX^2 - ZY^2 = Z'X^2 - Z'Y^2$$

Usando a mesma ideia no W temos

$$WX^2 - WY^2 = W'X^2 - W'Y^2$$

Se $Z' = W'$ então das duas equações

$$ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$$

Não fazia parte do exercício, mas podemos provar a volta usando estas equações. Se $ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$ *então*

$$Z'X^2 - Z'Y^2 = W'X^2 - W'Y^2 \Leftrightarrow (Z'X + Z'Y)(Z'X - Z'Y) = (W'X + W'Y)(W'X - W'Y)$$

Aí analisamos os seguintes casos para provar que $Z' = W'$.

i) Se Z' *e* W' *estão dentro do segmento* XY. *Temos* $Z'X + Z'Y = XY = W'X + W'Y \Rightarrow Z'X - Z'Y = W'X - W'Y$. *Com isso,*

$$\begin{cases} Z'X + Z'Y = W'X + W'Y \\ Z'X - Z'Y = W'X - W'Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z'X = W'X \\ Z'Y = W'Y \end{cases} \Rightarrow Z' = W'$$

ii) Se Z' *e* W' *são fora do segmento* XY. *Veja que eles devem estar do mesmo lado em relação ao segmento* XY, *pois caso contrário teríamos uma equação com um lado positivo e o outro negativo. Supondo que estão à esquerda de* X *temos* $Z'X - Z'Y = -XY = W'X - W'Y$ *e segue como o caso i.*

iii) Se um deles está fora do segmento e o outro dentro. Suponha sem perda de generalidade que Z' *está fora à esquerda de* X *e que* W' *está entre* X *e* Y. *Temos* $Z'X - Z'Y = -XY$ *e* $W'X + W'Y = XY$ *implicando*

$$-(Z'X + Z'Y) = W'X - W'Y \Leftrightarrow W'Y = W'X + Z'X + Z'Y$$

mas isso é impossível, pois $W'Y < XY$ *e* $Z'Y > XY$. *De fato, nesse caso não teria como* $Z' = W'$ *e esperávamos uma contradição.*

b)

Solução 1

Os triângulos ABC e AED são semelhantes pelo caso L_pAL_p já que $\frac{DA}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{EA}{BA}$ e $\angle DAE = \angle CAB$. Como a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$ temos $\frac{DE}{CB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow DE = \frac{a}{2}$.

Solução 2

É conhecido que DE é base média de CB. Assim, $DE = \frac{a}{2}$ e os triângulos ABC e AED são semelhantes pelo caso $L_pL_pL_p$ já que a razão entre os pares de lados é $\frac{1}{2}$.

c) Pelo teorema auxiliar temos

$$BC^2 - BE^2 = DC^2 - DE^2 \Leftrightarrow a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4a^2 - c^2 = b^2 - a^2 \Leftrightarrow c^2 = 5a^2 - b^2 .$$

d) Juntando as informações do item c e do Teorema de Pitágoras no triângulo ABC

$$\begin{cases} c^2 = 5a^2 - b^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 = 3a^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a\sqrt{3} \\ b = a\sqrt{2} \end{cases}$$

Isso significar que as duas equações são satisfeitas se, e somente se, os lados (a, b, c) são proporcionais $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$. Concluímos que os triângulos retângulos com medianas perpendiculares são aqueles que possuem lados proporcionais a $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Item a: 0,5 ponto
Aplicou o Teorema de Pitágoras corretamente . ... 0,3 ponto
Concluiu corretamente, conforme mostrado .... +0,2 ponto

Item b: 0,5 ponto
Justificou a semelhança pelo caso L_pAL_p .... 0,3 ponto
Como a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$ temos $\frac{DE}{CB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow DE = \frac{a}{2}$ .... +0,2 ponto

Item c: 0,5 ponto
Aplicou o Teorema dado corretamente . ... 0,3 ponto
Concluiu corretamente, conforme mostrado .... +0,2 ponto

Item d: 0,5 ponto
Juntou as informações do item c e do Teorema de Pitágoras no triângulo ABC . ... 0,3 ponto
Concluiu corretamente, conforme mostrado .... +0,2 ponto

A distribuição da pontuação é equivalente para outras soluções corretas.

PROBLEMA 3

a) Sendo $x = \sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \theta$,

$$ax^2 + bx - c = 0 \Leftrightarrow a \cdot \frac{c}{a} \operatorname{tg}^2 \theta + b\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \theta - c = 0 \Leftrightarrow \frac{c \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{b\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{a}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \sqrt{c}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \Leftrightarrow \operatorname{sen}2\theta = \frac{2\sqrt{ac}}{b}\cos 2\theta \Leftrightarrow \operatorname{tg}2\theta = \frac{2\sqrt{ac}}{b}.$$

b) Sendo $x = \sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{tg}\theta$,

$$ax^2 + bx - c = 0 \Leftrightarrow a\cdot\frac{c}{a}\operatorname{tg}^2\theta + b\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{tg}\theta + c = 0 \Leftrightarrow \frac{c\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{b\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + c = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{a}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\sqrt{c}(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) \Leftrightarrow \operatorname{sen}2\theta = -\frac{2\sqrt{ac}}{b}.$$

c) Na equação $ax^2 + bx \pm c = 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$ e $c > 0$.

- Se o sinal de c for negativo, fazemos a substituição do item a, e obtemos $\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\sqrt{ac}}{b}$, que sempre tem solução, pois a função tangente cobre todos os números reais. Nesse caso, $\Delta = b^2 + 4ac > 0$.
- Se o sinal de c for positivo, fazemos a substituição do item a, e obtemos $\operatorname{sen}2\theta = -\frac{2\sqrt{ac}}{b}$, que não tem solução real se, e somente se, $\left|-\frac{2\sqrt{ac}}{b}\right| > 1 \Leftrightarrow \frac{4ac}{b^2} > 1 \Leftrightarrow 4ac > b^2 \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$.
- Finalmente, se $c = 0$, a equação $ax^2 + bx = 0$ admite pelo menos a solução real $x = 0$, e nesse caso, $\Delta = b^2 \geq 0$.

Com isso, uma equação do 2º grau não possui raiz real se, e somente se, $\Delta < 0$.
Note que é necessário verificar que $\Delta \geq 0$ nos casos $c > 0$ e $c = 0$.

d) Sendo $a = 1$, $b = -2$ e o coeficiente independente negativo, usamos $c = 1$ no item a, e sendo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi < \theta < \pi$, obtemos

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\sqrt{1\cdot 1}}{-2} = -1 \Leftrightarrow 2\theta = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } 2\theta = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{8} \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{8}.$$

Note que, se resolvermos essa equação do segundo grau com a fórmula de Bhaskara, obtemos que $\left\{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}, \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right\} = \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$. *Analisando o sinal da tangente, obtemos* $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ *e* $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \sqrt{2}$.

Item a: 0,5 ponto
Reduziu o problema a algo do tipo $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = k(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$, k constante, ou $\operatorname{tg}\theta = k(1 - \operatorname{tg}^2\theta)$, k constante ....0,3 ponto
Obteve $\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\sqrt{ac}}{b}$ .... +0,2 ponto

Item b: 0,5 ponto
Reduziu o problema a algo do tipo $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = k(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)$, k constante ....0,3 ponto
Obteve $\operatorname{sen}2\theta = -\frac{2\sqrt{ac}}{b}$ .... +0,2 ponto

Item c: 0,4 ponto
Observou que $|\operatorname{sen}2\theta| \leq 1$ . ...0,2 ponto
Provou que a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a > 0$, $c > 0$, não tem solução se, e somente se, $\Delta < 0$, <u>usando a desigualdade acima</u> .... +0,1 ponto
Provou que, nos outros casos, $\Delta \geq 0$ .... +0,1 ponto

Item d: 0,6 ponto
Identificou qual item (a ou b) usar ....0,2 ponto
Obteve $\operatorname{tg}2\theta = -1$ .... +0,1 ponto
Concluiu corretamente .... +0,3 ponto

Obteve $x = 1 \pm \sqrt{2}$ .... 0,0 ponto

PROBLEMA 4

a) Escolhemos k números de $\{1,2,\ldots,2n\}$, o que pode ser feito de $\binom{2n}{k}$ maneiras, e escolhemos os demais $2n+1-k$ números de $\{2n+1, 2n+2, \ldots, 4n+1\}$, que tem $4n+1-2n = 2n+1$ elementos, o que pode ser feito de $\binom{2n+1}{2n+1-k} = \binom{2n+1}{k}$ maneiras. Com isso, a resposta é $\binom{2n}{k}\binom{2n+1}{k}$.

b) Escolhemos k números de $\{1,2,\ldots,2n+1\}$, o que pode ser feito de $\binom{2n+1}{k}$ maneiras, e escolhemos os demais $2n+1-k$ números de $\{2n+2, 2n+2, \ldots, 4n+1\}$, que tem $4n+1-(2n+1) = 2n$ elementos, o que pode ser feito de $\binom{2n}{2n+1-k} = \binom{2n}{k-1}$ maneiras. Com isso, a resposta é $\binom{2n+1}{k}\binom{2n}{k-1}$.

c) Os itens a e b contam a quantidade de subconjuntos de $2n+1$ elementos $\{1,2,\dots,4n+1\}$, de acordo com a quantidade de números "pequenos" (escolhemos de 0 a n números entre 1 e $2n$ no item a e de $n+1$ a $2n+1$ números entre 1 e $2n+1$ no item b). As contagens do item a e b têm repetição quando escolhermos n números no item a e $n+1$ números no item b, sendo $2n+1$ um dos números; ou seja, quando escolhemos n números entre 1 e $2n$ e n números entre $2n+2$ e $4n+1$ (um total de $4n = 1-(2n+1) = 2n$ números. Logo contamos $\binom{2n}{n}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}^2$ subconjuntos repetidos.
Logo, sendo o total de subconjuntos de $2n+1$ elementos de $\{1,2,\dots,4n+1\}$ igual a $\binom{4n+1}{2n+1} = \binom{4n+1}{2n}$,

$$\binom{4n+1}{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\binom{2n}{k-1} - \binom{2n}{n}^2,$$

e o resultado segue.

Item a: 0,8 ponto
Escreveu que podemos escolher k números de $\{1,2,\dots,2n\}$ de $\binom{2n}{k}$ maneiras .... 0,4 ponto
Escreveu que podemos escolher os demais $2n+1-k$ números de $\{2n+1, 2n+2,\dots,4n+1\}$ de $\binom{2n+1}{k}$ maneiras
(a solução $\binom{2n+1}{2n+1-k}$ também deve ser considerada certa) .... +0,3 ponto
Obteve a resposta $\binom{2n}{k}\binom{2n+1}{k}$ (a solução $\binom{2n}{k}\binom{2n+1}{2n+1-k}$ também deve ser considerada certa) .... +0,1 ponto

Item b: 0,8 ponto
Escreveu que podemos escolher k números de $\{1,2,\dots,2n+1\}$ de $\binom{2n+1}{k}$ maneiras .... 0,4 ponto
Escreveu que podemos escolher os demais $2n+1-k$ números de $\{2n+2, 2n+2,\dots,4n+1\}$ de $\binom{2n}{k-1}$ maneiras
(a solução $\binom{2n}{2n+1-k}$ também deve ser considerada certa) .... +0,3 ponto
Obteve a resposta $\binom{2n+1}{k}\binom{2n}{k-1}$ (a solução $\binom{2n+1}{k}\binom{2n}{2n+1-k}$ também deve ser considerada certa) .... +0,1 ponto

Item c: 0,4 ponto
Explicou que as duas somas contam os subconjuntos de $2n+1$ elementos de $\{1,2,\dots,4n+1\}$ com repetições. .... 0,1 ponto
Contou as repetições ($\binom{2n}{n}^2$) .... +0,2 ponto
Concluiu corretamente .... +0,1 ponto

PROBLEMA 5

a) Retiramos dois retângulos de base $\frac{1}{4}$ e alturas $1-\frac{1}{1+\frac{1}{4}} = 1-\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}-\frac{4}{7}$. Com isso, a área retirada na aproximação 3 é $\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{5}+\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$.

b) Na aproximação n, $n\ge 2$, retiramos 2^{n-2} retângulos com base $\frac{1}{2^{n-1}}$. O k-ésimo retângulo, $1\le k\le 2^{n-2}$, tem altura $\frac{1}{1+\frac{k-1}{2^{n-2}}} - \frac{1}{1+\frac{2k-1}{2^{n-1}}} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2k-2} - \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2k-1}$. Com isso, a área retirada na aproximação n é

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1} + \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2} - \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2^{n-1}-2} - \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2^{n-1}-1}\right)\\ &= \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} - \frac{1}{2^{n-1}+3} + \dots + \frac{1}{2^n-2} - \frac{1}{2^n-1}.\end{aligned}$$

Com isso, após uma quantidade grande de aproximações, a área se aproxima mais de $\ln 2$, de modo que

$$\begin{aligned}\ln 2 &= 1 - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\dots-\frac{1}{15}\right) - \dots - \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n-2} - \frac{1}{2^n-1}\right) + \cdots\\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots.\end{aligned}$$

c) Na aproximação n, $n\ge 2$, retiramos 2^{n-2} retângulos com base $\frac{1}{2^{n-1}}$. A altura do k-ésimo retângulo, $1\le k\le 2^{n-2}$, é $\frac{1}{2\left(1+\frac{2k-2}{2^{n-1}}\right)} - \frac{1}{2\left(1+\frac{2k-1}{2^{n-1}}\right)} = \frac{1}{2\left(1+\frac{2k-2}{2^{n-1}}\right)} - \left(\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2^{n-1}}} - \frac{1}{2\left(1+\frac{2k-1}{2^{n-1}}\right)}\right) = \frac{2^{n-1}}{2^n+4k-4} - \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2k-1} + \frac{2^{n-1}}{2^n+4k-2}$.

Com isso, retiramos na aproximação n a área

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^n+2} + \frac{1}{2^n+4} - \frac{1}{2^{n-1}+3} + \frac{1}{2^n+6} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n-4} - \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}-1} + \frac{1}{2^n+2^n-2}\\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^n+2} + \frac{1}{2^n+4} - \frac{1}{2^{n-1}+3} + \frac{1}{2^n+6} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-4} - \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^{n+1}-2}.\end{aligned}$$

Nessa conta aparecem os inversos de todos os ímpares entre $2^{n-1}+1$ e 2^n-1, inclusive, e os inversos de todos os pares entre 2^n e $2^{n+1}-2$, inclusive. Na hora de retirar da aproximação 1, $1-\frac{1}{2}$, os inversos de todos ímpares aparecem com o sinal positivo e os inversos de todos os pares aparecem com o sinal negativo; isso conclui a nossa demonstração.

Item a: 0,8 ponto
Descreveu as dimensões dos dois retângulos .... 0,3 ponto
Concluiu corretamente .... +0,5 ponto

Item b: 0,8 ponto
Descreveu as dimensões dos retângulos da aproximação n .... 0,3 ponto
Concluiu corretamente .... +0,5 ponto

Item c: 0,4 ponto
Descrever as dimensões dos retângulos da aproximação n .... 0,2 ponto
Concluiu corretamente .... +0,2 ponto