XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (12 de agosto de 2017)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

a) Em 5 anos são $5 \times 19300 = 96500$ km. O modelo híbrido consome $\frac{96500}{11} = 8.772{,}73$ litros e o não híbrido consome $\frac{96500}{8{,}9} = 10.842{,}70$ litros de gasolina.

b) O comprador gastará $8.772{,}73 \times 0{,}70 = 6.140{,}91$ dólares.

c) O modelo não híbrido gastará $10.842{,}70 \times 0{,}70 = 7.589{,}89$ dólares. O valor economizado será de $7.589{,}89 - 6.140{,}91 = 1448{,}98$ dólares. Podemos concluir que os especialistas estavam errados, pois o valor economizado em 5 anos é menor que a diferença de preço para comprar o modelo híbrido.

PROBLEMA 2

a) A velocidade de Desert correndo fora da esteira é $\frac{60\ m}{12\ s} = 5$ m/s e a velocidade de Desert sobre a esteira é $\frac{60\ m}{10\ s} = 6$ m/s. A velocidade de Desert é $v = 5$ m/s e a velocidade da esteira é $6 - 5 = 1$ m/s.

b) Vamos calcular o tempo de cada uma das opções

i) $t_1 = 15 + \frac{120}{2} = 15 + 60 = 75$ s

ii) $t_2 = 15 + \frac{60}{2+1} + \frac{60}{2} = 15 + 20 + 30 = 65\ s$

iii) $t_3 = 15 + \frac{60-15\cdot 1}{2+1} + \frac{60}{2} = 15 + 15 + 30 = 60$ s

Ele chegará em menos tempo usando a opção iii.

PROBLEMA 3

a) Determine o caminho voltando da fração $\frac{27}{17}$ até a fração $\frac{1}{1}$, escrevendo as frações obtidas em cada passo.

O caminho voltando é

$$\frac{27}{17} \leftarrow \frac{27-17}{17} = \frac{10}{17} \leftarrow \frac{10}{17-10} = \frac{10}{7} \leftarrow \frac{10-7}{7} = \frac{3}{7} \leftarrow \frac{3}{7-3} = \frac{3}{4} \leftarrow \frac{3}{4-3} = \frac{3}{1} \leftarrow \frac{3-1}{1} = \frac{2}{1} \leftarrow \frac{2-1}{1} = \frac{1}{1}$$

ou, em resumo,

$$\frac{27}{17} \leftarrow \frac{10}{17} \leftarrow \frac{10}{7} \leftarrow \frac{3}{7} \leftarrow \frac{3}{4} \leftarrow \frac{3}{1} \leftarrow \frac{2}{1} \leftarrow \frac{1}{1}$$

b) Primeiro devemos fazer as divisões por 2

$$\begin{gathered} 114 = 2 \cdot 57 + 0 \\ 57 = 2 \cdot 28 + 1 \\ 28 = 2 \cdot 14 + 0 \\ 14 = 2 \cdot 7 + 0 \\ 7 = 2 \cdot 3 + 1 \\ 3 = 2 \cdot 1 + 1 \end{gathered}$$

Percorrendo os restos de baixo para cima temos em ordem 1, 1, 0, 0, 1, 0 que nos dá

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{2}{1} \rightarrow \frac{3}{1} \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{7} \rightarrow \frac{10}{7} \rightarrow \frac{10}{17}$$

PROBLEMA 4

a) Somando os ângulos ao redor do ponto A temos

$$\angle BAD + 90° + 180° = 360° \Leftrightarrow \angle BAD = 90°\,.$$

Usando o mesmo argumento concluímos que os quatro ângulos são de $90°$.
Podemos calcular o lado fazendo a diferença dos lados do retângulo.

$$AB = x - \frac{1}{x} = 1$$

O quadrado foi recortado em quatro retângulos iguais e um quadrado unitário. Logo sua área é

$$[EFGH] = 1 \cdot 1 + 4 \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 + 4 = 5$$

b) Veja que $\frac{1}{x} = x - 1$, logo, o lado do quadrado é $x + \frac{1}{x} = x + (x - 1) = 2x - 1$. Temos $a = 2$ e $b = 1$.

c) A área do quadrado é o lado ao quadrado e usando as informações dos itens anteriores

$$(2x - 1)^2 = 5 \Rightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\,.$$

PROBLEMA 5

a) O quadrado de lado $(a + b)$ é recortado em dois quadrados, áreas a^2 e b^2, e dois retângulos, de mesma área $a \cdot b$, logo

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + 2ab + b^2$$

b) Após recortar, teremos dois cubos, volumes a^3 e b^3, e 3 paralelepípedos retorretângulos, cada um com volume $a \cdot b \cdot (a + b)$.

c) O volume do cubo maior é $(a + b)^3$ e também é igual à soma dos volumes menores.

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

d) Tomando $a = F_{100}$ e $b = F_{99}$ temos $a + b = F_{100} + F_{99} = F_{101}$. Usando a identidade acima temos

$$F_{100}^3 + F_{99}^3 + 3\,F_{101}\,F_{100}\,F_{99} = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3 = F_{101}^3\,.$$

Todos os números da sequência de Fibonacci são inteiros, logo F_{101}^3 é um cubo perfeito.

XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (12 de agosto de 2017)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Veja o Problema 1 do Nível Alfa

PROBLEMA 2

Veja o Problema 2 do Nível Alfa

PROBLEMA 3

Usaremos a notação $\angle BAC = A$, $\angle ABC = B$ e $\angle ACB = C$. Usando a soma dos ângulos internos do triângulo, $A + B + C = 180°$.

a) Usando que $\angle DBE = \angle DCE = 90°$ e o fato 1, temos

$$SB = SC = SD = SE = \frac{DE}{2}.$$

b) Veja que $\angle CBD = \angle DBA - \angle CBA = 90° - B$.

Pelo fato 2, temos

$$\angle CED = \angle CBD \Rightarrow CED = 90° - B\,.$$

Usando a soma dos ângulos do triângulo ACE temos

$$\angle CEA = 180° - 90° - A = 90° - A\,.$$

Daí temos

$$\angle AED = \angle CED + \angle CEA = (90° - B) + (90° - A) = 180° - A - B \Rightarrow \angle AED = C\,.$$

Como $\angle BAC = \angle EAC$, pois é ângulo comum, temos $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, pelo caso AA.

Solução 2: Veja que a semelhança de triângulos $\Delta ABD \sim \Delta ACE$, pois possuem dois ângulos iguais. Daí

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

isso adicionado ao fato de $\angle BAC = \angle EAC$ nos permite concluir que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, pelo caso LAL.

c) Seja X o ponto de interseção de AS e BC. Veja que M e S são correspondentes na semelhança do item b, por isso

$$\angle MAC = \angle EAS = \angle BAX$$

concluindo que AS é simediana relativa ao vértice A.

d) Usando o fato 2, temos

$$\angle BSC = 2\angle BEC = 2\angle CEA = 2(90° - A) \Rightarrow BSC = 180° - 2A\,.$$

O triângulo SBC é isósceles ($SB = SC$), logo

$$\angle SBC = \angle SCB = \frac{1}{2}(180° - \angle BSC) = \frac{1}{2}(2A) = A = \angle BAC\,.$$

Solução 2: Já sabemos do item b que $\angle ADE = B$ e $\angle AED = C$. O triângulos SCD é isósceles ($SC = SD$), logo $\angle SCD = SDC = B$. Somando os ângulo no ponto C temos

$$\angle ACB + \angle BCS + \angle SCD = 180° \Rightarrow \angle C + \angle BCS + B = 180° \Rightarrow \angle BCS = 180° - B - C \Rightarrow \angle BCS = A\,.$$

Analogamente, $\angle SBC = A$.

PROBLEMA 4

a) Chamando de X' e Y' os pés das perpendiculares de X e Y ao eixo x temos a congruência de triângulos $\Delta OX'X \equiv \Delta YY'O$, pois são triângulos retângulos, em X' e em Y', respectivamente, e que possuem catetos com mesmas medidas, a e b. Seja

$$\angle XOX' = \angle OYY' = \theta\,.$$

Como são triângulos retângulos, temos

$$\angle OXX' = YOY' = 90° - \theta\,.$$

Com isso,

$$\angle X'OX + \angle XOY + \angle YOY' = 180° \Rightarrow \theta + \angle XOY + 90° - \theta = 180° \Rightarrow \angle XOY = 90°.$$

b) Primeiro note que A. O e A' são colineares, pois OA e OA' formam o mesmo ângulo com o eixo x. Mais do que isso, nota-se que O é o ponto médio do segmento AA'.
Em seguida, considere o ponto $Y = (-n^2, mn)$. Pelo item a, sabemos que $\angle AOY = 90°$. Sejam Y' e B' os pés das perpendiculares de Y e B ao eixo x. Veja que $\Delta OY'Y \sim \Delta OB'B$, pelo caso LAL, já que os lados são proporcionais $\frac{OY'}{OB'} = \frac{n^2}{mn} = \frac{n}{m}$ e $\frac{YY'}{BB'} = \frac{mn}{m^2} = \frac{n}{m}$ e possuem o mesmo ângulo entre esses lados $\angle OY'Y = \angle OB'B = 90°$. Daí $\angle BOB' = \angle YOY'$ implicando que os pontos O, Y e B são colineares.
Concluímos que $\angle AOB = 90°$ e $AA' \perp OB$.
c) A congruência de triângulos $\Delta OBA' \equiv \Delta OBA$ vem do caso LAL, já que $OA = OA'$, $\angle AOB = \angle A'OB = 90°$ e $OB = OB$.
d) Veja que C está no segmento $A'B$, pois $x_C = -mn$, e AC forma ângulo de 90° com $A'B$, pois $y_C = n^2 = y_A$ indica que a reta AC é paralela ao eixo x.
Observando o ângulo $\angle ACB = 90°$, concluímos que ABC é um triângulo retângulo de lado $AC = mn - (-mn) = 2mn$, $BC = m^2 - n^2$ e $AB = A'B = m^2 - (-n^2) = m^2 + n^2$.

PROBLEMA 5

a) Seguindo as orientações do problema, temos

$$\frac{11}{9} \leftarrow \frac{11-9}{9} = \frac{2}{9} \leftarrow \frac{2}{9-2} = \frac{2}{7} \leftarrow \frac{2}{7-2} = \frac{2}{5} \leftarrow \frac{2}{5-2} = \frac{2}{3} \leftarrow \frac{2}{3-2} = \frac{2}{1} \leftarrow \frac{2-1}{1} = \frac{1}{1}.$$

Em resumo

$$\frac{11}{9} \leftarrow \frac{2}{9} \leftarrow \frac{2}{7} \leftarrow \frac{2}{5} \leftarrow \frac{2}{3} \leftarrow \frac{2}{1} \leftarrow \frac{1}{1}$$

b) Usando os passos anteriores, determine a fração que está na posição 110.
Primeiro devemos fazer as divisões por 2.

$$110 = 2 \cdot 55 + 0$$
$$55 = 2 \cdot 27 + 1$$
$$27 = 2 \cdot 13 + 1$$
$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$
$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

Considerando os restos de baixo para cima temos 1, 0, 1, 1, 1 e 0. Portanto

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} \rightarrow \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3} \rightarrow \frac{5+3}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow \frac{8+3}{3} = \frac{11}{3} \rightarrow \frac{11}{3+11} = \frac{11}{14}.$$

Em resumo,

$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{2}{1} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{5}{3} \rightarrow \frac{8}{3} \rightarrow \frac{11}{3} \rightarrow \frac{11}{14}.$$

c) Nesse caso, temos $x_n = \frac{p}{p+q} < 1 \Rightarrow \lfloor x_n \rfloor = 0$. Logo

$$\frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor + 1 - x_n} = \frac{1}{2 \cdot 0 + 1 - \frac{p}{p+q}} = \frac{1}{\frac{p+q-p}{p+q}} = \frac{p+q}{q} = x_{n+1}.$$

d) Seja $\frac{p}{q}$ a última fração que aparece nas caminhos de x_n e x_{n+1}. Note que para estas frações serem vizinhas temos os caminhos para x_n sendo uma descida para a esquerda, chegando em $\frac{p}{p+q}$, seguida de m descidas para a direita, resultando em $x_n = \frac{p+m(p+q)}{p+q}$, e para x_{n+1} sendo uma descida para a direita, chegando em $\frac{p+q}{q}$, seguida de m descidas para a esquerda, resultando em $x_{n+1} = \frac{p+q}{q+m(p+q)}$.
Por exemplo, para $x_{19} = \frac{7}{3}$ e $x_{20} = \frac{3}{8}$ a fração comum é $\frac{1}{2}$, $m = 2$ e temos $x_{19} = \frac{1+2(2+1)}{2+1}$ e $x_{20} = \frac{2+1}{2+2(2+1)}$.
Dessa forma, podemos calcular $x_n = \frac{p}{p+q} + m \Rightarrow m < x_n < m+1 \Rightarrow \lfloor x_n \rfloor = m$ e

$$\frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor + 1 - x_n} = \frac{1}{2 \cdot m + 1 - \frac{p+m(p+q)}{p+q}} = \frac{p+q}{2m(p+q) + (p+q) - p - m(p+q)} = \frac{p+q}{q+m(p+q)} = x_{n+1}.$$

XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (12 de agosto de 2017)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Veja o Problema 2 do Nível Alfa

PROBLEMA 2

a) Como a corda foi puxada ao máximo temos y tangente a C e os segmentos R e y perpendiculares. Usando as funções trigonométricas temos

$$\operatorname{tg} x = \frac{y}{R} \Leftrightarrow y = R \operatorname{tg} x\,.$$

b) Comparando o comprimento de C e o comprimento da corda 2 m maior temos

$$2\pi R + 2 = (2\pi - 2x)R + 2y \Leftrightarrow 2 = -2xR + 2R \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x - x = \frac{1}{R}.$$

c) Observe que a corda puxada possui distância $R + h$ para o centro, logo

$$\cos x = \frac{R}{R+h} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{h}{R} \Leftrightarrow h = R\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \Leftrightarrow h = R\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right).$$

d) Usando o item b, podemos calcular o valor aproximado de x

$$\frac{1}{R} = \operatorname{tg} x - x = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 = \frac{3}{R} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3}{R}}.$$

Com isso, podemos calcular o valor aproximado de h

$$h = R\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right) = R\left(\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right) = R\left(\frac{x^2}{2-x^2}\right) \Rightarrow h = R\left(\frac{\left(\frac{3}{R}\right)^{\frac{2}{3}}}{2-\left(\frac{3}{R}\right)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

Podemos substituir os valores e fazer algumas aproximações

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{R}} = \sqrt[3]{0{,}468 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}776 \cdot 10^{-2} \Rightarrow x^2 = 0{,}602 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow h = 6{,}4 \cdot 10^{6}\left(\frac{0{,}602 \cdot 10^{-4}}{2 - 0{,}602 \cdot 10^{-4}}\right) \approx 1{,}93 \cdot 10^{2}\ m\,.$$

A altura máxima é aproximadamente 193 metros.

PROBLEMA 3

Veja o Problema 3 do Nível Beta

PROBLEMA 4

a) Considere o polinômio $x^2 - x - 1 = 0$. Resolvendo a equação do 2º grau temos as raízes $x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Logo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é raiz do polinômio $x^2 - x - 1$ com coeficientes inteiros e φ é algébrico.

Observação: existem infinitos polinômios com coeficientes inteiros que tem φ como raiz, mas todos são múltiplos de $x^2 - x - 1$, pois este é seu polinômio minimal.

b) Pelo Binômio de Newton

$$\varphi^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^{n-k}\sqrt{5}^{k}}{2^n}$$

Veja que para k par temos $k = 2t \Rightarrow \sqrt{5}^k = 5^t$ e para k ímpar temos $k = 2t + 1 \Rightarrow \sqrt{5}^k = 5^t\sqrt{5}$. Portanto existem inteiros R e S tal que

$$\varphi^n = \frac{R\sqrt{5} + S}{2^n} = \left(\frac{R}{2^n}\right)\sqrt{5} + \left(\frac{S}{2^n}\right).$$

Então existem racionais $r = \frac{R}{2^n}$ e $s = \frac{S}{2^n}$.

Veja que se φ^n for racional então $\sqrt{5} = \frac{\varphi^n - s}{r}$ seria racional, mas é conhecido que $\sqrt{5}$ não é racional.

Solução alternativa: pode-se provar por indução que $\varphi^n = F_n\,\varphi + F_{n-1}$ para todo inteiro positivo n, onde F_n representa o termo n da sequência de Fibonacci definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.

c) Suponha que $\log\varphi$ é racional, então podemos escrever $\log\varphi = \frac{p}{q}$ onde $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível e $q > 0$. Daí

$$\log\varphi = \frac{p}{q} \Rightarrow 10^{\frac{p}{q}} = \varphi \Rightarrow 10^p = \varphi^q\,.$$

Isso é uma contradição, pois já sabemos do item b que φ^q é irracional e, portanto, não pode ser 10^p que é racional.

d) Suponha que $\log\varphi$ não é transcendental. Podemos usar o teorema de Gelfond-Schneider, pois sabemos que $a = 10$ é algébrico e que, por hipótese, $b = \log\varphi$ é algébrico irracional. Daí $a^b = 10^{\log\varphi} = \varphi$ seria transcendental. Porém, sabemos que φ é algébrico, gerando uma contradição.
Concluímos que $\log\varphi$ é transcendental.

PROBLEMA 5

a) Temos $F_{n,n} = 1$, pois só existe uma maneira de tem n vértices numerados distribuídos em n árvores.
b) O número de árvores com n vértices e k árvores é $F_{n,k}$. Para cada um desses grafos temos k raízes e $n - k$ vértices que não são raízes. Logo o número de pares floresta e vértice que não é raiz é $T = F_{n,k} \cdot (n - k)$.
c) Outra forma de construir o par ordenado floresta e vértice que não é raiz é partir de uma floresta com n vértices e $k + 1$ árvores. Escolhe-se um vértice qualquer v que pode ser raiz ou não, há n maneiras de fazer isto. Como v está em uma árvore temos outras $k + 1 - 1 = k$ árvores das quais v não faz parte. Basta conectar a raiz de uma dessas k árvores no vértice v. Portanto, temos $T = n \cdot k \cdot F_{n,k+1}$.
A raiz conectada é o vértice selecionado na configuração do item b. Veja que podemos fazer o caminho do item b para essa configuração do item c. Toma-se um dos $(n - k)$ vértices que não são raízes. Podemos recortar a conexão dele para a árvore em direção à raiz e transformá-lo numa nova raiz.

d) Usando o a equação $F_{n,k} \cdot (n - k) = n \cdot k \cdot F_{n,k+1}$ com $k = 1$

$$F_{n,1}(n-1) = n \cdot 1 \cdot F_{n,2} \Leftrightarrow F_{n,1} = \frac{1}{n-1} \cdot n \cdot F_{n,2}$$

e) Podemos usar a mesma equação para $k = 1,2,3, \dots, n - 1$

$$F_{n,1} = \frac{1}{n-1} \cdot n \cdot F_{n,2}$$
$$F_{n,2} = \frac{2}{n-2} \cdot n \cdot F_{n,3}$$
$$F_{n,3} = \frac{3}{n-3} \cdot n \cdot F_{n,4}$$
$$\dots$$
$$F_{n,n-1} = \frac{n-1}{1} \cdot n \cdot F_{n,n}$$

Multiplicando tudo

$$F_{n,1}\,F_{n,2} \dots F_{n,n-1} = \frac{1}{n-1}\frac{2}{n-2} \dots \frac{n-1}{1}\; n^{n-1}\,F_{n,2} \dots F_{n,n-1}F_{n,n}\,.$$

Concluímos que

$$F_{n,1} = n^{n-1}F_{n,n} = n^{n-1}\,.$$

Devemos dividir esse valor por n, pois cada árvore rotulada pode ter qualquer um dos n vértices como raiz. Então o número de árvores com vértices rotulados de 1 a n é $T_n = \frac{1}{n}\,F_{n,1} = n^{n-2}$.