

XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (12 de agosto de 2017)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



Critérios

PROBLEMA 1

Critérios

Nesse problema considerar corretas respostas cuja diferença para a resposta oficial seja menor que ou igual a 5 unidades.

Item a: 0,8 ponto

Escrever que são 96500 km em 5 anos (ou deixar na forma expressão 5×19300)0,4 ponto

Escrever que o modelo híbrido consome 8772,73 (ou deixar indicado, por exemplo $\frac{5 \times 19300}{11}$) +0,2 ponto

Escrever que o modelo não híbrido consome 10842,70 (ou deixar indicado, por exemplo $\frac{5 \times 19300}{8,9}$) +0,2 ponto

Item b: 0,4 ponto

Escrever que o comprador do modelo híbrido gasta 6140,91 dólares em 5 anos (ou deixar a expressão $\frac{5 \times 19300}{11} \times 0,70$)0,4 ponto

Item c: 0,8 ponto

Escrever que o comprador do modelo não híbrido gastaria 7589,89 dólares (ou deixar a expressão $\frac{5 \times 19300}{8,9} \times 0,70$)0,3 ponto

Calcular corretamente o valor economizado de 1448,98 dólares (esse item não pode ficar apenas indicado) +0,3 ponto

Afirmar que os especialistas estavam errados já que o valor economizado é menor que 6200 dólares +0,2 ponto

PROBLEMA 2

Critérios

Item a: 0,8 ponto

Calcular corretamente a velocidade de Desert de 5 m/s0,4 ponto

Calcular corretamente a velocidade da esteira de 1 m/s +0,4 ponto

Item b: 1,2 ponto

Cálculo correto do tempo i de $t_1 = 75$ s0,3 ponto

Cálculo correto do tempo ii de $t_2 = 65$ s0,3 ponto

Cálculo correto do tempo iii de $t_1 = 60$ s0,4 ponto

Concluir que a opção iii faz o percurso em menos tempo +0,2 ponto

Esquecer de somar 15 s da parada para amarrar o cadarço penalizar 0,1 no item até -0,3 ponto

Critério Alternativo (caso o aluno faça os cálculos corretos, mas considerando a velocidade do item a de 5 m/s)

Cálculo do tempo i de $t_1 = 39$ s0,3 ponto

Cálculo do tempo ii de $t_2 = 37$ s0,3 ponto

Cálculo do tempo iii de $t_1 = 34,5$ s0,4 ponto

Concluir que a opção iii faz o percurso em menos tempo +0,2 ponto

Uso de 5 m/s -0,2 ponto

PROBLEMA 3

Critérios

Item a: 0,7 ponto

7 passos corretos $\frac{10}{17} \leftarrow \frac{10}{7} \leftarrow \frac{3}{7} \leftarrow \frac{3}{4} \leftarrow \frac{3}{1} \leftarrow \frac{2}{1} \leftarrow \frac{1}{1}$ 0,1 ponto cada

Item b: 1,3 ponto

6 passos corretos nas divisões por 2 com quociente e resto $(q, r) = (57,0) (28,1) (14,0) (7,0) (3,1) (1,1)$ 0,1 ponto cada

6 passos corretos $\frac{2}{1} \rightarrow \frac{3}{1} \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{7} \rightarrow \frac{10}{7} \rightarrow \frac{10}{17}$ 0,1 ponto cada

Concluir que $\frac{10}{17}$ +0,1 ponto

PROBLEMA 4

Critérios

Item a: 1,0 ponto

Percebeu que $\angle BAD + 90^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ e concluiu que $\angle BAD = 90^\circ$ 0,2 ponto

Usou o mesmo argumento para concluir que os quatro ângulos são de 90° +0,3 ponto

Calculou o lado fazendo a diferença dos lados do retângulo, obtendo $x - \frac{1}{x} = 1$ +0,2 ponto
 Percebeu que o quadrado foi recortado em quatro retângulos iguais e um quadrado unitário +0,2 ponto
 Concluiu que a área $[EFGH] = 1 \cdot 1 + 4 \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 + 4 = 5$ +0,1 ponto

Item b: 0,5 ponto

Percebeu que o lado do quadrado é $x + \frac{1}{x} = x + (x - 1) = 2x - 1$ 0,3 ponto
 Concluiu que $a = 2$ e $b = 1$ +0,2 ponto

Item c: 0,5 ponto

Usando as informações dos itens anteriores obteve a igualdade $(2x - 1)^2 = 5$ 0,3 ponto
 Concluiu que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ +0,2 ponto

PROBLEMA 5

Critérios

Item a: 0,5 ponto

Percebeu que o quadrado de lado $(a + b)$ foi recortado em dois quadrados, áreas a^2 e b^2 , e dois retângulos, áreas $a \cdot b$ 0,3 ponto
 Concluiu que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + 2ab + b^2$ +0,2 ponto

Item b: 0,5 ponto

Percebeu, após recortar, dois cubos, volumes a^3 e b^3 , e três paralelepípedos retortretângulos, volumes $ab(a + b)$ 0,1 ponto cada

Item c: 0,6 ponto

Mostrou que o volume do cubo maior é $(a + b)^3$ 0,2 ponto
 Mostrou que o volume do cubo maior é a soma dos volumes menores +0,2 ponto
 Concluiu que $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ +0,2 ponto

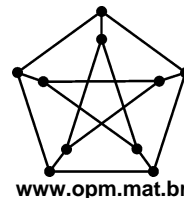
Item d: 0,4 ponto

Mostrou que, tomando $a = F_{100}$ e $b = F_{99}$ temos $a + b = F_{100} + F_{99} = F_{101}$ 0,2 ponto
 Usando a identidade obtida chegou em $F_{100}^3 + F_{99}^3 + 3 F_{101} F_{100} F_{99} = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3 = F_{101}^3$ +0,1 ponto
 Concluiu que, como todos os números da sequência de Fibonacci são inteiros, logo F_{101}^3 é um cubo perfeito +0,1 ponto

XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (12 de agosto de 2017)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



Critérios

PROBLEMA 1

Critérios

Nesse problema considerar correto respostas cuja diferença para a resposta oficial seja menor que ou igual a 5 unidades.

Item a: 0,8 ponto

Escrever que são 96500 km em 5 anos (ou deixar na forma expressão 5×19300)0,4 ponto

Escrever que o modelo híbrido consome 8772,73 (ou deixar indicado, por exemplo $\frac{5 \times 19300}{11}$) +0,2 ponto

Escrever que o modelo não híbrido consome 10842,70 (ou deixar indicado, por exemplo $\frac{5 \times 19300}{8,9}$) +0,2 ponto

Item b: 0,4 ponto

Escrever que o comprador do modelo híbrido gasta 6140,91 dólares em 5 anos (ou deixar a expressão $\frac{5 \times 19300}{11} \times 0,70$)0,4 ponto

Item c: 0,8 ponto

Escrever que o comprador do modelo não híbrido gastaria 7589,89 dólares (ou deixar a expressão $\frac{5 \times 19300}{8,9} \times 0,70$)0,3 ponto

Calcular corretamente o valor economizado de 1448,98 dólares (esse item não pode ficar apenas indicado) +0,3 ponto

Afirmar que os especialistas estavam errados já que o valor economizado é menor que 6200 dólares +0,2 ponto

PROBLEMA 2

Critérios

Item a: 0,8 ponto

Calcular corretamente a velocidade de Desert de 5 m/s0,4 ponto

Calcular corretamente a velocidade da esteira de 1 m/s +0,4 ponto

Item b: 1,2 ponto

Cálculo correto do tempo i de $t_1 = 75$ s0,3 ponto

Cálculo correto do tempo ii de $t_2 = 65$ s0,3 ponto

Cálculo correto do tempo iii de $t_1 = 60$ s0,4 ponto

Concluir que a opção iii faz o percurso em menos tempo +0,2 ponto

Esquecer de somar 15 s da parada para amarrar o cadarço penalizar 0,1 no item até -0,3 ponto

Critério Alternativo (caso o aluno faça os cálculos corretos, mas considerando a velocidade do item a de 5 m/s)

Cálculo do tempo i de $t_1 = 39$ s0,3 ponto

Cálculo do tempo ii de $t_2 = 37$ s0,3 ponto

Cálculo do tempo iii de $t_1 = 34,5$ s0,4 ponto

Concluir que a opção iii faz o percurso em menos tempo +0,2 ponto

Uso de 5 m/s -0,2 ponto

PROBLEMA 3

Critérios

Neste critério será a usada a notação da solução oficial $\angle BAC = A, \angle ABC = B$ e $\angle ACB = C$

Item a: 0,5 ponto

Usar o fato 1 para afirmar que cada um dos segmentos é $\frac{DE}{2}$ 0,5 ponto

Critério Alternativo (por quadriláteros cíclicos)

Provar que $DCBE$ é cíclico usando $\angle DBE = \angle DCE = 90^\circ$ 0,3 ponto

Provar que S é o centro já está inscrito no ângulo de 90° +0,2 ponto

Item b: 0,5 ponto

Provar corretamente que $\angle AED = C$ (ou que ângulo $\angle ADE = B$) ou provar que $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ 0,4 ponto

Concluir que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ por AA ou por LAL +0,1 ponto

Item c: 0,5 ponto

Afirmar que S e M são correspondentes na semelhança0,5 ponto

Item d: 0,5 ponto

Provar que $\angle SCD = B$ ou que $\angle SBC = 180^\circ - 2A$ 0,4 ponto
 Concluir corretamente que $\angle SCB = A$ ou que $\angle SBC = A$ +0,1 ponto

PROBLEMA 4**Crêterios****Item a: 0,3 ponto**

Provar corretamente que $\angle XOX' + \angle YOY' = 90^\circ$ 0,3 ponto

Item b: 0,7 ponto

Argumentar que A , O e A' são colineares por congruência ou afirmando que O   o ponto médio de AA' 0,3 ponto
 Provar corretamente $\angle AOB = 90^\circ$ usando o item a ou por semelhança de tri ngulos0,3 ponto
 Concluir que $AA' \perp OB$ +0,1 ponto

Item c: 0,3 ponto

Provar corretamente a congruência (inclusive supondo que o item b   verdadeiro sem tem sido resolvido)0,3 ponto

Item d: 0,7 ponto

Afirmar que C está no segmento $A'B$ ou marcar corretamente sobre $A'B$ em um desenho0,2 ponto
 Afirmar que $\angle ACB = 90^\circ$ ou marcar corretamente o ângulo reto em um desenho0,2 ponto
 Calcular lados $AC = 2mn$, $BC = m^2 - n^2$ e $AB = m^2 + n^2$ 0,1 ponto cada

PROBLEMA 5**Crêterios****Item a: 0,6 ponto**

6 passos corretos $\frac{2}{9} \leftarrow \frac{2}{7} \leftarrow \frac{2}{5} \leftarrow \frac{2}{3} \leftarrow \frac{2}{1} \leftarrow \frac{1}{1}$ 0,1 ponto cada

Item b: 0,6 ponto

6 passos corretos $\frac{2}{1} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{5}{3} \rightarrow \frac{8}{3} \rightarrow \frac{11}{3} \rightarrow \frac{11}{14}$ 0,1 ponto cada

Item c: 0,2 ponto

Aplicar a equa o de recorrência corretamente no $x_n = \frac{p}{p+q}$ e obter $x_{n+1} = \frac{p+q}{q}$ 0,2 ponto

Item d: 0,6 ponto

Argumentar que deve ser uma descida numa dire o e m descidas na outra.....0,3 ponto

Calcular $x_n = \frac{p+m(p+q)}{p+q}$ +0,1 ponto

Calcular $x_{n+1} = \frac{p+q}{q+m(p+q)}$ +0,1 ponto

Aplicar a equa o de recorrência corretamente no $x_n = \frac{p+m(p+q)}{p+q}$ e obter $x_{n+1} = \frac{p+q}{q+m(p+q)}$ +0,1 ponto

XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (12 de agosto de 2016)
Nível γ (1^o e 2^o séries do Ensino Médio)



Critérios

PROBLEMA 1

Critérios

Item a: 0,8 ponto

Calcular corretamente a velocidade de Desert de 5 m/s0,4 ponto
 Calcular corretamente a velocidade da esteira de 1 m/s +0,4 ponto

Item b: 1,2 ponto

Cálculo correto do tempo i de $t_1 = 75$ s0,3 ponto
 Cálculo correto do tempo ii de $t_2 = 65$ s0,3 ponto
 Cálculo correto do tempo iii de $t_1 = 60$ s0,4 ponto
 Concluir que a opção iii faz o percurso em menos tempo +0,2 ponto
 Esquecer de somar 15 s da parada para amarrar o cadarço penalizar 0,1 no item até -0,3 ponto

Critério Alternativo (caso o aluno faça os cálculos corretos, mas considerando a velocidade do item a de 5 m/s)

Cálculo do tempo i de $t_1 = 39$ s0,3 ponto
 Cálculo do tempo ii de $t_2 = 37$ s0,3 ponto
 Cálculo do tempo iii de $t_1 = 34,5$ s0,4 ponto
 Concluir que a opção iii faz o percurso em menos tempo +0,2 ponto
 Uso de 5 m/s -0,2 ponto

PROBLEMA 2

Critérios

Item a: 0,5 ponto

Afirmar que o segmento tangente de medida y é perpendicular ao raio0,3 ponto
Atenção! A pontuação a seguir não se acumula com as anteriores:
 Resposta correta0,5 ponto

Item b: 0,5 ponto

Escreveu que o comprimento da corda é $2\pi R + 2$ 0,2 ponto
 Escreveu que o comprimento da corda é $(2\pi - 2x)R + 2y$ +0,1 ponto
 Substituiu o valor de y do item a +0,1 ponto
 Concluiu +0,1 ponto

Item c: 0,5 ponto

Observou que a distância entre o ápice da corda puxada e o centro é $R + h$ 0,2 ponto
 Obteve $\cos x = \frac{R}{R+h}$ +0,2 ponto
 Concluiu +0,1 ponto
Atenção! A pontuação a seguir não se acumula com as anteriores:
 Reduziu o problema a provar que $\cos x = \frac{R}{R+h}$ 0,2 ponto

Item d: 0,5 ponto

Atenção! As pontuações a seguir não se acumulam entre si:
 Obteve uma aproximação de x em função somente de R 0,2 ponto
 Obteve uma aproximação de h em função somente de R 0,3 ponto

PROBLEMA 3

Critérios

Neste critério será usada a notação da solução oficial $\angle BAC = A, \angle ABC = B$ e $\angle ACB = C$

Item a: 0,5 ponto

Usar o fato 1 para afirmar que cada um dos segmentos é $\frac{DE}{2}$ 0,5 ponto

Critério Alternativo (por quadriláteros cíclicos)

Provar que $DCBE$ é cíclico usando $\angle DBE = \angle DCE = 90^\circ$ 0,3 ponto
 Provar que S é o centro já está inscrito no ângulo de 90° +0,2 ponto

Item b: 0,5 ponto

Provar corretamente que $\angle AED = C$ (ou que ângulo $\angle ADE = B$) ou provar que $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ 0,4 ponto
 Concluir que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ por AA ou por LAL..... +0,1 ponto

Item c: 0,5 ponto

Afirmar que S e M são correspondentes na semelhança0,5 ponto

Item d: 0,5 ponto

Provar que $\angle SCD = B$ ou que $\angle SBC = 180^\circ - 2A$ 0,4 ponto
 Concluir corretamente que $\angle SCB = A$ ou que $\angle SBC = A$ +0,1 ponto

PROBLEMA 4**Critérios****Item a: 0,6 ponto**

Atenção! As pontuações a seguir não se acumulam entre si:

Considerou o número $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 0,3 ponto
 Calculou $\varphi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 0,3 ponto

Item b: 0,6 ponto

Desenvolveu $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ com o binômio de Newton0,2 ponto
 Observou que $\sqrt{5}^n$ é racional para n par e é um racional vezes $\sqrt{5}$ para n ímpar +0,2 ponto
 Concluiu..... +0,2 ponto
 Atenção! A pontuação a seguir não se acumula com as anteriores:
 Mostrou que $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ (o que pode levar a uma solução por indução)0,4 ponto

Item c: 0,4 ponto

Supôs por absurdo que $\log \varphi$ é racional0,1 ponto
 Chegou a $10^n = \varphi^m$, m, n inteiros não nulos..... +0,2 ponto
 Concluiu..... +0,1 ponto

Item d: 0,4 ponto

Escreveu que $10^{\log \varphi} = \varphi$ 0,2 ponto
 Concluiu usando o Teorema de Gelfond-Schneider para $a = 10$ e $b = \log \varphi$ +0,2 ponto

PROBLEMA 5**Critérios****Item a: 0,4 ponto**

Só afirmou que $F_{n,n} = 1$ 0,3 ponto
 Justificou por que $F_{n,n} = 1$ +0,1 ponto

Item b: 0,4 ponto

Observou que há $n - k$ vértices que não são raízes.....0,2 ponto
 Concluiu, usando o princípio multiplicativo +0,2 ponto

Item c: 0,5 ponto

Começou com uma floresta com $k + 1$ árvores com raiz0,1 ponto
 Observou que n vem do número de escolhas de vértices, raiz ou não +0,1 ponto
 Observou que k vem do número de escolhas de uma das árvores que **não** contêm o vértice escolhido +0,1 ponto
 Concluiu, ligando o vértice escolhido diretamente à raiz da árvore escolhida..... +0,1 ponto
 Verificou que o processo é reversível +0,1 ponto

Item d: 0,3 ponto

Fez a igualdade entre os resultados dos itens b e c0,2 ponto
 Usou $k = 1$ nessa igualdade +0,1 ponto

Item e: 0,4 ponto

Fez a igualdade entre os resultados dos itens b e c para dois valores de k consecutivos0,2 ponto
 Multiplicou as n igualdades +0,1 ponto
 Concluiu..... +0,1 ponto
 Fez a igualdade entre os resultados dos itens b e c para um valor só de k 0,0 ponto